Math. A.

192 9b

Peschka

FREIE PERSPEKTIVE

[CENTRALE PROJEKTION]

IN IHRER

BEGRÜNDUNG UND ANWENDUNG

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE HOHERER LEHRANSTALTEN UND DAS SELBSTSTUDIUM

VON

Dr. GUSTAV AD. V. PESCHKA,

k. k. Regierungsrat, ordentl. Professor der Darstellenden Geometrie und des konstruktiven Zeichnens an der k. k. technischen Hochschule in Brünn; Inhaber der k. k. grossen goldenen Medaille für Wissenschaft und Kunst und des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone, Ritter des Grossherzogl. Hess. Verdienstordens I. Klasse, des Herzogl. Sächs. Ernestin. Hausordens des St. Sava-Ordens, Offizier des königl. serb. Takowo-Ordens etc.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

BAND I.

Mit XIII lithographischen Tafeln.

LEIPZIG 1888.

Baumgärtner's Buchhandlung.

51 D

Verlag von Baumgärtner's Buchhandlung in Leipzig.

Die Geometrie der Lage.

Vorträge von

Dr. **Theodor Reye,**
ordentlicher Professor an der Universität Strassburg.

I. Abth. Mit 92 Holzschnitt. Royal-8. **3. verbesserte Auflage, 1886.** Broschirt 7 M., in Halbzfranz geb. 9 M.

II. Abth. Mit 1 Aufgabensammlung und 1 lithogr. Figurentafel. Royal-8. 2. Aufl. 1880. Brosch. 7 M., in Halbfranz geb. 9 M.

Die Graphische Statik

der Baukonstruktionen

von

H. F. B. Müller-Breslau,
Ingenieur und Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule zu Hannover.

Zweite völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage.

In 3 Bänden. Mit zahlreichen Textfiguren und lithograph. Tafeln.

Bd. I. Die statischen Momente. Die Momente höherer Ordnung. Die Spannungen in geraden Stäben. Die statisch bestimmten Träger.

1887. Lex.-8. Mit 422 Textfig. u. 7 lith. Tafeln. Brosch. 15 M., in Halbfr. geb. 17 M.

Bd. II. erscheint Ende 1888 und wird enthalten: 1. Bestimmung der Formänderungen (elastische Linie, Durchbiegungen von Fachwerkträgern u. s. w.) 2. Theorie der statisch unbestimmten Träger. 3. Nebenspannungen in Eisenkonstruktionen. 4. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte im Raume. 5. Räumliche Trägersysteme.

Bd. III. 1. Theorie des Erddrucks. 2. Untersuchung der Stützmauern. 3. Gewölbetheorie. 4. Steinerne Pfeiler und Widerlager.

FREIE PERSPEKTIVE.

FREIE PERSPEKTIVE

[CENTRALE PROJEKTION]

IN IHRER

BEGRÜNDUNG UND ANWENDUNG

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
HÖHERER LEHRANSTALTEN UND DAS SELBSTSTUDIUM

VON

Dr. GUSTAV AD. V. PESCHKA,

k. k. Regierungsrat, ordentl. Professor der Darstellenden Geometrie und des konstruktiven Zeichnens an der k. k. technischen Hochschule in Brünn; Inhaber der k. k. grossen goldenen Medaille für Wissenschaft und Kunst und des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone, Ritter des Grossherzogl. Hess. Verdienstordens I. Klasse, des Herzogl. Sächs. Ernestin. Hausordens, des St. Sava-Ordens, Offizier des königl. serb. Takowo-Ordens etc.

Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

BAND I.

Mit XIII lithographischen Tafeln.

LEIPZIG 1888.

Baumgärtner's Buchhandlung.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort
zur ersten Auflage.

Indem wir mit vorliegendem Werke vor die Öffentlichkeit treten, können wir nicht umhin zu bemerken, dass das Entstehen desselben in eine Zeit fällt, wo der „freien Perspektive“ noch wenig, oder doch nicht jene Aufmerksamkeit zugewendet wurde, als es gegenwärtig der Fall ist.

In der damaligen Ermanglung eines Lehrbuches über „freie Perspektive“, das ein wohlgeordnetes, leichtfassliches, systematisches Ganzes bilden und Gründlichkeit mit Wissenschaftlichkeit eben so sehr, als Einfachheit der Darstellung mit Kürze und Strenge in der Behandlung des Stoffes verbinden soll, entschlossen wir uns zur Herausgabe unserer Vorträge über obgenannten Gegenstand.

Was dem Einzelnen jedoch allein, überhäufter Berufspflichten wegen, nicht möglich war, dem dürfte durch das gemeinschaftliche Wirken und durch die gleichmässige Arbeit mit vereinten Kräften entsprochen worden sein.

Nur in wenigen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie findet die Centralprojektion als selbständige Projektionsart eine solche Behandlung, wie sie derselben gebührt. Werden auch hier und da die Grundzüge derselben angeführt, so trifft man doch äusserst selten ein Werk, welches der weiteren Ausbildung dieser Projektionsart den erwünschten Raum gönnen würde.

Bei der Wichtigkeit dieses Gegenstandes und bei der so interessanten Anwendung, die man in neuester Zeit von der

Polarprojektion macht, schien es stets auffallend, dass die Untersuchungen über dieses Gebiet zu den besonderen Seltenheiten gehörten. Erst in neuester Zeit fand die Centralprojektion einige Pflege und eine strengere wissenschaftliche Entwickelung, doch ist eine selbständige von der Parallelprojektion ganz unabhängige Behandlung der centralen Projektion von dem Punkte angefangen bis einschliesslich der krummen Flächen bisher nicht versucht worden.

Die Verfasser glaubten daher im Interesse der Wissenschaft zu wirken, wenn sie sich der Aufgabe unterzogen, die „freie Perspektive“ als selbständige Projektionsart mit jener Ausführlichkeit systematisch zu behandeln, deren sich bisher nur die Parallelprojektion erfreute. Deshalb konnte die Durchschnittsmethode nur vorübergehend eine kurze Besprechung finden, weil die Verfasser den Grundsatz festhielten, dass die Benützung der Parallelprojektion in der Perspektive nur eine beschränkte sein und nur dort platzgreifen dürfe, wo deren Gebrauch eine bedeutende Vereinfachung der Konstruktionen nach sich zieht.

Der heutige Stand der Wissenschaft erfordert eine streng wissenschaftliche Begründung aller Prinzipien. Es genügt nicht mehr, einem Gegenstande bloss die praktische Seite abzugewinnen und die Theorie als unnütz beiseite zu lassen. So kann sich auch heutzutage der Vortrag über Perspektive an höheren Unterrichtsanstalten nicht mehr auf die blosse Darstellung einiger architektonischer Gegenstände nach rezeptartig gegebenen Regeln beschränken, sondern es muss die Centralprojektion, wenigstens in ihren wichtigsten Teilen, zur Grundlage genommen werden.

Vorliegendes Werk dürfte somit einerseits als Lehrbuch für jene, die sich eingehender mit der Perspektive vertraut machen wollen, insbesondere daher auch für Lehramtskandidaten bestimmt sein, anderseits aber auch als Leitfaden bei den Vorlesungen an technischen Hochschulen für den Lehrenden sowohl, als für den Schüler mit Nutzen verwendet werden können.

Um jede Schwierigkeit im Studium der freien Perspektive zu beheben, glaubten wir, dem angestrebten Zwecke entsprechend, verpflichtet zu sein, die Grundprinzipien der Perspektive möglichst vollständig und ausführlich behandeln und selbst spezielle Fälle durch Figuren erläutern zu sollen. Hat sich der Anfänger die vorausgeschickten Grundlagen der Perspektive vollkommen eigen gemacht, so wird er mit Leichtigkeit darauf weiter bauen, und gewiss werden ihm bei den sich daran schliessenden Anwendungen auch nicht die geringsten Schwierigkeiten erwachsen.

Dies diene zur Rechtfertigung, wenn wir mitunter sehr ausführlich wurden.

Dass bereits veröffentlichte Arbeiten dort, wo es angezeigt schien oder noch möglich war (das Manuskript unseres Werkes war bereits Ende 1865 in den Händen des Herrn Verlegers) teilweise benützt wurden, ist selbstverständlich und wurde auch grossenteils auf diese Abhandlungen hingewiesen.

Die Verfasser können nicht umhin, dem Herrn Verleger für die sorgfältige Durchführung und schöne Ausstattung des Werkes, sowie für die besondere Bereitwilligkeit, mit welcher er ihren Wünschen stets entgegenkam, den verbindlichsten Dank auszusprechen.

Indem die Verfasser dieses Werk dem sachverständigen Publikum überliefern, glauben sie um so mehr auf eine freundliche Aufnahme und Beurteilung desselben hoffen zu dürfen, als bekannt ist, welche Schwierigkeiten bei der Verfassung eines solchen Werkes zu überwinden sind. Dieselben werden allfällige, ihnen gütigst mitgeteilte Ansichten von Fachmännern mit dem grössten Danke entgegennehmen und bei einer späteren Bearbeitung nach Thunlichkeit benützen.

Brünn im Dezember 1867.

Prof. Peschka und **Docent Koutny.**

Vorwort

zur zweiten vollständig umgearbeiteten und erweiterten Auflage.

Wenn bei dem Ersterscheinen des vorliegenden Werkes an eine Berücksichtigung der tief eingreifenden Errungenschaften der modernen, synthetischen und analytischen Geometrie, obgleich in Fachkreisen bereits damals durchaus bekannt, aus mehrfachen Gründen, insbesondere aber deshalb, weil die „freie Perspektive“ auch dem „Selbstunterrichte“ dienen sollte, nicht gedacht werden konnte, so erscheint es jetzt, wo die vorgenannten neueren Methoden der Geometrie in Theorie und Konstruktion nicht nur in allen wissenschaftlichen Kreisen und an allen Hochschulen Eingang fanden, sondern allmählich auch einen klareren und methodischeren Aufbau erlangt haben, als unabweisliche Aufgabe eines jeden irgend einen Zweig der darstellenden Geometrie oder der Mathematik behandelnden Werkes, von diesen Forschungen der Neuzeit den erforderlichen Gebrauch zu machen und auch weitere Kreise wenigstens in die Prinzipien der Geometrie der Lage, sowie in ihre Anwendung auf die Theorie der Kurven und Flächen zweiten Grades allmählich einzuführen.

Es wäre seitens des Verfassers somit ein übel angebrachter Konservatismus gewesen, dieser Forderung bei der vorliegenden neuen Herausgabe seines Werkes auszuweichen; derselbe sah sich vielmehr, gestützt auf obige Motive, zu einer vollständigen Umarbeitung seiner „Freien Perspektive“ nicht nur veranlasst sondern auch verpflichtet. Aus Zweckmässigkeitsgründen, insbesondere aber auch zur Erleichterung der Anschaffung, wurde das Buch in zwei Bände zerlegt.

In folgendem möge es gestattet sein, die allgemeinen Ge-

sichtspunkte zu skizzieren, welche bei der Verfassung resp. Neugestaltung des Werkes massgebend gewesen.

Die bekannte Thatsache, dass die freie Perspektive in ihrer allgemeinsten und abstraktesten Form, d. i. als „Centralprojektion“ den Schlüssel für die „Geometrie der Lage“ bildet, dürfte schon an und für sich die vollständige Neugestaltung der drei ersten, die Grundzüge der Centralprojektion enthaltenden Kapitel rechtfertigen.

Die diesbezügliche Darstellung wurde so allgemein als möglich gehalten; überall wurde auf den Zusammenhang zwischen Bild und Original deutlich hingewiesen und wurden überdies von den rein projektivischen Beziehungen alle jene, in welchen Massbestimmungen irgend eine Rolle spielen, sorgfältig ausgeschlossen. Die Durchführung der vielen besonderen Fälle, wie sie in der früheren Auflage Platz fanden, wurden hier, ihrer relativen Einfachheit wegen, dem Leser überlassen.

In dieser Form bildet der Inhalt der drei ersten Kapitel einerseits die Methodik der Centralprojektion, anderseits aber auch die zweckmässigste und natürlichste Einleitung in die Geometrie der Lage oder in die projektivische Geometrie.

Die Entwickelung der Elemente dieser letzteren, d. i. der Perspektivität und Projektivität, wurde, im vierten Kapitel, auf die alleinige Grundlage des Begriffes vom „Projizieren“ und des „Zusammenhanges zwischen Orginal und Projektion“ aufgebaut.

Die gewonnenen Resultate werden im fünften Kapitel zur Entwickelung der theoretisch und konstruktiv wichtigsten rein projektivischen Eigenschaften der Kurven zweiten Grades verwendet. Im zweiten Teile dieses Kapitels finden auch die metrischen Beziehungen an projektivischen Gebilden, namentlich aber an den Kurven zweiten Grades insoweit Beachtung, als dieselben einen konstruktiven Wert haben.

Ebenso einfach lassen sich auch die projektivischen Beziehungen der Grundgebilde zweiter Stufe (Kollineation, Affinität, Ähnlichkeit) aus den Grundbegriffen der Centralprojektion ableiten.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Létzteres ist im Kapitel VI geschehen, mit welchem der auf die projektivische Geometrie Bezug habende theoretische Teil abgeschlossen wurde.

Das Kapitel VII zeigt lediglich die konstruktive Anwendung der projektivischen Geometrie. Dass hierbei die Kreisbilder eine Behandlung erfuhren, welche von jener in der früheren Auflage wesentlich abweicht, ist selbstverständlich. Eine willkommene Zugabe dürften an dieser Stelle auch die Spiegelbilder repräsentieren.

Während weiter in der früheren Auflage bloss Transformationen der Centralprojektionen ebener Gebilde unter der Voraussetzung der Verschiebung des Centrums längs der Falllinie der Fluchtebene erörtert wurden, ist nun in Kapitel VIII eine vollständige und allgemein gehaltene Theorie der Transformation gegeben, aus welcher nachträglich der obgenannte spezielle Fall abgeleitet wurde.

Die im Kapitel IX und X behandelten eben begrenzten Gebilde (Dreikant und Polyeder) unterscheiden sich der Hauptsache nach nur formell von den gleichnamigen Betrachtungen der vorhergegangenen Auflage; doch ist es mit Rücksicht auf die eingreifende Umarbeitung der Grundzüge selbstverständlich, dass man sich auch hier nicht auf eine blosse Revision des dortigen Textes und der entsprechenden Figuren beschränken konnte.

Der schon jetzt im Druck fast beendete und noch im Laufe dieses Jahres erscheinende zweite Band des vorliegenden Werkes ist vollständig den krummen Flächen gewidmet, und tritt namentlich auch hier der Gegensatz zu der diesbezüglich spärlichen Behandlung der früheren Auflage hervor.

Das tiefere Eingehenkönnen ist besonders dem Umstande zuzuschreiben, dass in dem ersten Abschnitte durch Berücksichtigung der projektivischen Geometrie ein wesentliches Hilfsmittel für die bequemere Behandlung der krummen Flächen gewonnen wurde.

Nicht nur dass infolgedessen in den die windschiefen und

aufwickelbaren Flächen betreffenden Kapiteln XVI, XVII, XVIII und XIX die Darstellung eine allgemeinere und umfassendere und die Beweisführung eine weitaus einfachere und doch schärfere wurde, war es auch möglich, den in den früheren Auflagen gänzlich fehlenden Flächen zweiten Grades eine eingehende Beachtung sowohl theoretisch als auch konstruktiv (Kapitel XIII, XIV, XV, XVI, XXI, XXII und XXIII) angedeihen zu lassen.

In den Kapiteln XX, XXIV, XXV und XXVI sind beziehungsweise die Rotationsflächen, die Umhüllungsflächen und die Schrauben-Regelflächen vertreten.

Was die Rotationsflächen betrifft, so liegt es in der Natur der Sache, dass, sobald der Meridiankurve kein besonderes Erzeugungsgesetz zu Grunde gelegt wird, nur sehr wenige allgemeine Eigenschaften der besagten Flächen aufgefunden werden können. Hinsichtlich der Umhüllungsflächen sei bemerkt, dass sich schon die fundamentalste Konstruktion derselben, d. i. die der Charakteristiken in centraler Projektion, so mühselig und langwierig gestaltet, wenn nicht gar mit Schwierigkeiten verbunden ist, dass es hier zweckmässig erschien, sich auf die blosse Entwickelung der wichtigsten Eigenschaften dieser Flächengattung zu beschränken.

In bezug auf die „Darstellung“ der krummen Flächen durch ihre „Umrisse“ sei bemerkt, dass sich der Verfasser darauf beschränkte, für jeden Flächentypus die Konstruktion der Kontur an einem Beispiele zu erläutern. Bei allen anderen Konstruktionen an und mit krummen Flächen wurde von der Ermittelung des Umrisses Umgang genommen, einerseits deshalb, um die Konstruktionsresultate deutlich hervortreten und die Figuren, durch Anhäufung von überflüssigen Konstruktionslinien, nicht allzu kompliziert erscheinen zu lassen, anderseits aber auch deswegen, weil die durch die Konturbestimmung erreichte „Bildlichkeit“ in keinem Verhältnisse zu der zeitraubenden und langwierigen Durchführung von sich stets, ohne Abwechselung, wiederholenden Konstruktionen steht, und es gewiss dem Geiste

der darstellenden Geometrie weit mehr entspricht, „Konstruktionsresultate“, als blosse „wohlgelungene Bilder“ dem denkenden Konstrukteur zu liefern. Überdies kann es, mit Zugrundelegung der gewonnenen Resultate, niemandem schwer fallen, sich eine klare Vorstellung von der jeweilig besprochenen Fläche zu schaffen resp. deren Umriss wirklich bildlich darzustellen. Auch glaubt der Verfasser sich bezüglich der „Umrissbestimmung“ auf die frühere Auflage seiner „Freien Perspektive“ berufen zu dürfen.

Die gegenseitigen Schnitte der krummen Flächen wurden nicht, wie sonst üblich, bei den betreffenden Flächengattungen in Betracht gezogen, sondern mit Rücksicht auf die einheitliche Entwickelung der diesbezüglichen Methoden und Konstruktionen in einem besonderen Kapitel XXVII zusammengefasst.

Im Kapitel XXVIII sind die Schlagschatten und Selbstschattenkonstruktionen an einigen Aufgaben erläutert worden. Die betreffenden Beispiele dürften genügen, um auf Grundlage derselben in jedem besonderen Falle die Schattenkonstruktionen anstandslos durchführen zu können, da diese eigentlich dem Wesen nach doch nur auf die bereits bekannten Schnittkonstruktionen von Kegeln und Cylindern mit Ebenen und Flächen zurückzuführen sind.

Der dem Werke beigefügte Anhang (Kapitel XXIX bis inkl. XXXII) behandelt einige besondere Darstellungsarten.

Vor allem wurde hier eine sehr einfache Methode entwickelt, um aus einem centralprojektivisch gegebenen Originalgebilde die Centralprojektion seines Reliefs direkt abzuleiten.

Hieran schliessen sich jene centralprojektivischen Darstellungsarten, von welchen hauptsächlich der Baukünstler bei perspektivischer Darstellung seiner Pläne und Entwürfe Gebrauch zu machen pflegt. Dieselben erscheinen dadurch charakterisiert, dass nebst der Bildebene (Zeichnungsfläche) noch eine zweite Projektionsebene, die sogenannte „Grundebene“, welche zur Bildebene senkrecht steht, zur Verwendung gelangt.

Die hierauf gegründeten Konstruktionsmethoden d. h. die der „perspektivischen Massstäbe“ und die Darstellung mittels „Bild“ und „Bild des Grundrisses“ wurden weit ausführlicher und elementarer behandelt, als es die vorausgehende wissenschaftliche Behandlung der Centralprojektion erwarten lässt; doch soll durch diese Partien gleichzeitig auch dem ungeübteren Leser die Möglichkeit geboten werden, sich mit den Grundzügen der perspektivischen Darstellungsweise einigermassen vertraut zu machen und deren Zusammenhang mit der ihm gewiss geläufigeren orthogonalen Projektionsmethode richtig zu erfassen. Hierdurch dürfte die ins Detail gehende Erläuterung der dortselbst durchgeführten Aufgaben gerechtfertigt erscheinen.

Auch der Schluss des Anhanges „Perspektivische Darstellung architektonischer Gegenstände“ hat das gleiche Ziel und den nämlichen, eben angedeuteten Zweck.

Dieser letzte Absatz (der einzige im vorliegenden Buche) wurde — um das Andenken an meinen gewesenen Schüler, Freund und einstigen, bei Verfassung der ersten Auflage der „Freien Perspektive“ thätigen Mitarbeiter, Herrn Prof. E. Koutny, zu ehren — nahezu unverändert beibehalten.

Bei dieser Gelegenheit sei es mir auch gegönnt meines Schülers und nachherigen Assistenten des Herrn Docenten Otto Rupp in anerkennenswerter Weise zu gedenken, dem ich, infolge der vielen Anknüpfungspunkte und des ununterbrochenen wissenschaftlichen Verkehrs, so manch guten Gedanken, welcher fördernd auf die vorliegende Arbeit wirkte, verdanke. Ich erfülle daher nur eine höchst angenehme Pflicht, wenn ich ihm hiermit meinen Dank öffentlich ausspreche.

Indem ich somit diese meine jüngste geistige Schöpfung den wahren Freunden der Wissenschaft und dem mathematisch denkenden Publikum überantworte, bitte ich auch diesem Werke dieselbe freundliche Aufnahme und wohlwollende Beurteilung zu teil werden zu lassen, welche meinen bisherigen Arbeiten gezollt wurden.

Brünn, am 19. März 1888.

Peschka.

Quellenverzeichnis.

Burmester, Reliefperspektive.

Cremona, Géométrie projective.

De la Gournérie, Géométrie descriptive.

Darboux, Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, Mathem. Annalen, Bnd. XVII, pg. 55.

Fiedler, Darstellende Geometrie.

Hauck, Subjektive Perspektive; Grundzüge der Linearperspektive. Perspektivischer Apparat.

Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Mathem. Annalen, Bnd. VI, pg. 112.

Pohlke, Darstellende Geometrie.

Reye, Geometrie der Lage.

Salmon-Fiedler, Kegelschnitte.

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes.

Schröter, Oberflächen zweiter Ordnung.

Schur, Über den Fundamentalsatz der projektivischen Geometrie, Mathem. Annalen, Bnd. XVIII, pg. 252.

Staudigl, Reliefperspektive.

Staudt, Geometrie der Lage.

Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage.

Steiner, J., Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten.

Thomae, Grundgebilde der Geometrie der Lage.

Weyr, Elemente der projektivischen Geometrie.

Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie.

Inhaltsverzeichnis von Band I.

I. Abschnitt.

Grundzüge der Centralprojektion.

I. Kapitel.

Einleitung.

Seite

§ 1. Allgemeine Bemerkungen 1
§ 2. Perspektivische Bilder; freie Perspektive, Centralprojektion; Polarprojektion 4
§ 3. Grundbegriffe der Methode der Centralprojektion 6
§ 4. Centralprojektionen von Punkten 7
§ 5. Centralprojektion einer Geraden. Durchstosspunkt und Fluchtpunkt einer Geraden 9
§ 6. Folgerungen aus der perspektivischen Darstellung gerader Linien durch ihre Hauptpunkte; Neigungswinkel einer Geraden gegen die Bildebene; besondere Lagen einer Geraden 12
§ 7. Centralprojektivische Darstellung einer Ebene; Bildflächtrace und Fluchttrace einer Ebene 14
§ 8. Folgerungen aus der Darstellung einer Ebene durch ihre Tracen; Neigungswinkel einer Ebene gegen die Bildebene; besondere Lagen einer Ebene 17
§ 9. Darstellung und Bestimmung eines Punktes mittels einer durch denselben geführten Hilfsgeraden 19
§ 10. Die „Parallelebenen“ der Bildebene, und die Centralprojektionen verschiedener Punkte einer und derselben Geraden 20
§ 11. Die Beziehungen einer Ebene gegen die beiden Parallelebenen . 22

II. Kapitel.

Die fundamentalen Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen und hierauf bezügliche Konstruktionen.

§ 12. Kriterium für die Lage einer Geraden in einer Ebene 24
§ 13. 1. Aufgabe: Durch eine Gerade ist eine Ebene zu legen . . . 25
§ 14. 2. Aufgabe: Die orthogonale Bildflächprojektion einer Geraden zu bestimmen 25

Seite

§ 15. Kriterium für die Parallellage einer Geraden und einer Ebene . 26
§ 16. 3. Aufgabe: Eine Ebene durch eine Gerade parallel zu einer zweiten zu legen 26
§ 17. 4. Aufgabe: Durch eine Gerade eine Ebene von gegebener Bildflächneigung zu legen 26
§ 18. 5. Aufgabe: In einer Ebene durch einen Punkt eine Gerade von gegebener Bildflächneigung zu ziehen 27
§ 19. Kriterium für zwei sich schneidende Geraden 28
§ 20. 6. Aufgabe: Durch einen Punkt eine Gerade parallel zu einer gegebenen Geraden zu führen 30
§ 21. 7. Aufgabe: Die orthogonale Bildflächprojektion eines centralprojektivisch gegebenen Punktes zu bestimmen 31
§ 22. 8. Aufgabe: Durch einen Punkt eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene zu führen 31
§ 23. 9. Aufgabe: Durch einen Punkt und eine Gerade eine Ebene zu führen 32
§ 24. 10. Aufgabe: Die Verbindungsgerade zweier gegebenen Punkte zu konstruieren 32
§ 25. 11. Aufgabe: Durch drei Punkte eine Ebene zu legen 33
§ 26. 12. Aufgabe: Die Schnittgerade zweier Ebenen zu bestimmen . 33
§ 27. 13. Aufgabe: Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu konstruieren 34
§ 28. 14. Aufgabe: Durch einen Punkt eine Gerade zu führen, welche zwei gegebene, sich nicht schneidende Geraden in je einem Punkte trifft 34
§ 29. 15. Aufgabe: Einzelne Lagen solcher Geraden zu konstruieren, welche drei sich nicht schneidende Geraden in je einem Punkte treffen. (Erste Methode) 35
§ 30. Zweite Methode für die Lösung desselben Problems 35
§ 31. Centralprojektivische Darstellung von zur Bildebene parallelen Geraden und Ebenen 35
§ 32. 16. Aufgabe: Durch einen Punkt und eine zur Bildebene parallele Gerade eine Ebene zu legen 36
§ 33. 17. Aufgabe: Der Schnittpunkt einer Ebene mit einer zur Bildebene parallelen Geraden ist zu ermitteln 37
§ 34. 18. Aufgabe: Der Schnittpunkt einer Geraden mit einer zur Bildebene parallelen Ebene ist zu konstruieren 37
§ 35. 19. Aufgabe: Der Schnitt einer Ebene mit einer zur Bildebene parallelen Ebene ist zu ermitteln 38
§ 36. 20. Aufgabe: Den Schnitt zweier Ebenen zu bestimmen, welche zu einander parallele Tracen besitzen 38
§ 37—38. Hilfskonstruktionen 39
§ 39. 21. Aufgabe: Durch den Spurpunkt einer Geraden parallel zu einer zweiten Geraden eine Gerade zu ziehen 40
§ 40. 22. Aufgabe: Die Verbindungsgerade eines Punktes mit einem gegebenen Spurpunkte ist zu bestimmen 41
§ 41. 23. Aufgabe: Durch einen Punkt und eine der Spurebene angehörende Gerade ist eine Ebene zu legen 41

Seite

§ 42. 24. Aufgabe: Den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen, deren Bilder sich decken 42
§ 43. 25. Aufgabe: Den Schnitt einer centralprojizierenden Ebene mit einer zur Bildebene parallelen Ebene zu konstruieren 42

III. Kapitel.

Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, welche von Längen- und Winkelgrössen abhängig sind.

§ 44. Allgemeine Bemerkungen 43
§ 45. Die wahre Grösse und Form centralprojektivisch dargestellter Gebilde und die Mittel zu ihrer Bestimmung 44
§ 46. 26. Aufgabe: Die wahre Grösse eines centralprojektivisch dargestellten zur Bildebene parallelen Dreieckes zu ermitteln . . . 46
§ 47—48. Die Drehung oder „Umlegung“ eines in einer zur Bildebene geneigten Ebene liegenden Gebildes in die Bildebene 47
§ 49. 27. Aufgabe: Die wahre Grösse eines Winkels zu bestimmen . . 50
§ 50. 28. Aufgabe: In einer Ebene durch einen gegebenen Punkt unter einem bestimmten Winkel gegen eine in der genannten Ebene liegende Gerade eine zweite Gerade zu ziehen 52
§ 51. 29. Aufgabe: Die Lage eines Punktes einer Ebene nach der Umlegung der letzteren in die Bildebene zu ermitteln 52
§ 52. Zweite Methode der Lösung desselben Problems (mittels Nebenhaupt- und Nebendistanz-Punkt) 53
§ 53. Dritte Methode für die Lösung des nämlichen Problems (mittels besonderer Hilfsgeraden) 55
§ 54. Das umgelegte Projektionscentrum als Fluchtpunkt 55
§ 55. Vierte Methode der Umlegung (mittels der umgelegten Spurlinie) 56
§ 56. 30. Aufgabe: Bestimmung der wahren Grösse einer Strecke . . 57
§ 57. 31. Aufgabe: Bestimmung des Winkels, welchen eine Gerade mit ihrer Centralprojektion bildet 58
§ 58. 32. Aufgabe: Die wahre Grösse und Form eines centralprojektivisch dargestellten ebenen Polygons zu ermitteln 58
§ 59. 33. Aufgabe: Die Centralprojektion eines in einer gegebenen Ebene liegenden Quadrates aus dem Bilde der einen Quadratseite abzuleiten 60
§ 60. 34. Aufgabe: Eine Ebene ist durch ihre Tracen und ihre Bildflächneigung gegeben; ferner ist die Centralprojektion eines in dieser Ebene liegenden gleichseitigen Dreieckes bekannt; es ist die Lage des Projektionscentrums zu ermitteln 61
§ 61. 35. Aufgabe: Ein in der Bildebene gegebenes Viereck ist als Centralprojektion eines Quadrates von bestimmter Seitenlänge zu betrachten; es ist die Ebene dieses Quadrates und die Lage des Projektionscentrums zu ermitteln 62
§ 62—63. Die „Teilpunkte“ und „Teilkreise“ centralprojektivisch dargestellter Geraden 64
§ 64. 36. Aufgabe: Auf eine Ebene eine senkrechte Gerade zu fällen und durch eine Gerade eine Ebene senkrecht zu einer zweiten Ebene zu legen 67

Seite

§ 65. 37. Aufgabe: Eine Ebene senkrecht zu einer Geraden zu führen 69
§ 66. 38. Aufgabe: Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist zu bestimmen 70
§ 67. 39. Aufgabe: Den Neigungswinkel zweier Ebenen zu bestimmen . 71
§ 68. Zweite Methode für die Lösung desselben Problemes 72
§ 69. 40. Aufgabe: Den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu ermitteln 73
§ 70. 41. Aufgabe: Bestimmung des Abstandes zweier parallelen Ebenen 74
§ 71. 42. Aufgabe: Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier sich nicht schneidenden Geraden der Lage und Grösse nach 76
§ 72. Betrachtungen über Neigungswinkel von Geraden und Ebenen . 78
§ 73. 43. Aufgabe: Durch einen Punkt eine zur Bildebene parallele Gerade unter bestimmtem Winkel gegen eine gegebene Ebene zu ziehen 79
§ 74. 44. Aufgabe: Durch eine Gerade eine Ebene unter bestimmtem Winkel gegen eine gegebene Ebene zu legen 80
§ 75. Zweite Lösung desselben Problemes 81
§ 76. 45. Aufgabe: Bestimmung der Fluchttrace einer zur Bildebene senkrechten Ebene, welche mit einer gegebenen Ebene einen bestimmten Winkel einschliesst 83
§ 77. Zweite Methode der Lösung desselben Problemes 83
§ 78. 46. Aufgabe: Durch einen Punkt eine Gerade unter gegebenen Winkeln gegen zwei Ebenen zu führen 84
§ 79. 47. Aufgabe: Bestimmung des Fluchtpunktes einer Geraden, welche mit der Bildebene und mit einer zur Bildebene senkrechten Ebene gegebene Winkel einschliesst 88
§ 80. 48. Aufgabe: Durch einen Punkt eine Ebene unter bestimmten Winkeln gegen zwei gegebene Ebenen zu führen 89
§ 81. 49. Aufgabe: Bestimmung einer Geraden, welche zwei gegebene sich nicht schneidende Geraden unter bestimmten Winkeln schneidet 89
§ 82. 50. Aufgabe: Den Halbierungspunkt einer centralprojektivisch dargestellten Strecke ohne Hilfe des Projektionscentrums zu ermitteln 92
§ 83. 51. Aufgabe: In einer Geraden jenen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten eine gleiche Entfernung hat 92
§ 84. 52. Aufgabe: Bestimmung eines Punktes, der von der Bildebene und von zwei gegebenen Ebenen gegebene Abstände besitzt . . 93
§ 85. 53. Aufgabe: Einen Punkt um eine Gerade so lange zu drehen, bis er in eine gegebene Ebene gelangt; Bestimmung des Drehungswinkels 94
§ 86. 54. Aufgabe: Eine Ebene um eine Gerade so lange zu drehen, bis sie centralprojizierend wird 95
§ 87. 55. Aufgabe: In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten bestimmte Abstände hat 96
§ 88. 56. Aufgabe: Ein Dreieck darzustellen, dessen eine Seite gegeben ist, dessen dritter Eckpunkt in einer gegebenen Ebene liegen soll, und dessen beide andere Seiten der wahren Länge nach bekannt sind 98
§ 89. 57. Aufgabe: In einer gegebenen Ebene ist jener Punkt zu bestimmen, der von drei bestimmten Punkten gleich weit absteht . 99

II. Abschnitt.

Die Elemente der projektivischen Geometrie.

IV. Kapitel.

Seite

§ 90. Einleitende Bemerkungen und Definitionen 100
§ 91. Erster Fundamentalsatz 101
§ 92. Zweiter Fundamentalsatz 102
§ 93. Die Aufeinanderfolge von Punkten einer Geraden und deren gegenseitige Lage im allgemeinen 103
§ 94. Die allgemeine gegenseitige Lage von Strahlen durch einen und denselben Punkt 107
§ 95. Zusammenhang der beiden vorhergehenden Fälle 109
§ 96. Das vollständige Viereck und die Definition harmonischer Gebilde 110
§ 97. Das vollständige Vierseit und die harmonischen Gebilde desselben 112
§ 98—101. Konstruktion harmonischer Elemente mittels des vollständigen Viereckes; eindeutiges Resultat dieser Konstruktionen; rationale Punktsysteme 114
§ 102. Das Dualitätsprinzip 119
§ 103. Die Grundgebilde der Geometrie der Lage 121
§ 104. Die incidente oder perspektivische Lage zweier ebenen Grundgebilde erster Stufe 124
§ 105. Perspektivische Punktreihen 126
§ 106. Perspektivische Strahlenbüschel 127
§ 107—108. Die projektivische Beziehung zweier ebenen Grundgebilde erster Stufe 129
§ 109—112. Konlokale Grundgebilde und deren Doppelelemente; identische Grundgebilde 132
§ 113—115. Vervollständigung zweier durch drei Paare entsprechender Elemente gegebener projektivischer Grundgebilde erster Stufe . 138
§ 116. Das paarweise Auftreten von Doppelelementen konlokaler Grundgebilde 140
§ 117—118. Projektivität von Würfen 141
§ 119. Konlokale involutorische Gebilde 144
§ 120. Doppelelemente einer Involution 145
§ 121. Bestimmung einer Involution durch zwei Elementenpaare . . 146
§ 122. Involution am vollständigen Viereck und Vierseit 146

V. Kapitel.

Die Kurven zweiten Grades als projektivische Erzeugnisse.

§ 123—125. Das geometrische Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel 148
§ 126. Der Pascal'sche Satz 153
§ 127. Bestimmung einer Kurve zweiter Ordnung durch Punkte und Tangenten 153

Seite

§ 128—131. Der Pascal'sche Satz in speziellen Fällen; degenerierte einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebene Polygone . . . 154
§ 132. Konstruktion der Doppelelemente zweier konlokalen Grundgebilde mittels einer Kurve zweiter Ordnung 158
§ 133—138. Der Desargues'sche Satz im allgemeinen, und seine Spezialisierungen 161
§ 139—141. Das geometrische Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen 168
§ 142—143. Der Brianchon'sche Satz 172
§ 144—146. Der Brianchon'sche Satz in Anwendung auf degenerierte umschriebene Sechsecke 173
§ 147. Die Identität der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse 177
§ 148—151. Die den Desargues'schen Sätzen dual gegenüber stehenden Sätze 179
§ 152—158. Pol und Polare 182
§ 159. Das Reciprocitätsgesetz in der Ebene 189
§ 160—165. Die Einführung metrischer Beziehungen in die projektivische Geometrie 191
§ 166. Besondere Grundgebilde und besondere perspektivische und projektivische Beziehungen 197
§ 167. Ähnliche Punktreihen 198
§ 168. Kongruente Punktreihen 200
§ 169. Kongruente Strahlenbüschel 202
§ 170—171. Metrische Beziehungen an involutorischen Punktreihen . 203
§ 172. Besondere involutorische Gebilde 208
§ 173. Die Rechtwinkelinvolution 209
§ 174. Metrische Eigenschaften der Kurven zweiten Grades 210
§ 175. Die projektivische Erzeugung einer Parabel 212
§ 176—179. Durchmesser, Mittelpunkt und Achsen der Kurven zweiten Grades 213
§ 180. Der Kreis als Kurve zweiten Grades und die imaginären unendlich fernen Kreispunkte einer Ebene 219
§ 181—188. Die Brennpunkte einer Kurve zweiten Grades 220
§ 189. Gemeinschaftliche Punkte, Tangenten zweier Kurven zweiten Grades 228
§ 190—191. Gemeinschaftliche Poldreiecke; Berührung zweier Kurven zweiten Grades 230

VI. Kapitel.

Die kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Systeme und die speziellen Formen derselben.

§ 192—195. Perspektivisch-kollineare Systeme im allgemeinen und deren Eigenschaften 234
§ 196. Besondere Formen der perspektivischen Kollineation. Perspektivische Ähnlichkeit, Affinität und Kongruenz 239
§ 197—199. Konlokale kollineare Systeme oder ebene perspektivische Kollineation 240

Seite

§ 200. Involutorische Kollineation 247
§ 201—204. Kollineare Kurven zweiten Grades 248
§ 205. 58. Aufgabe: Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden mit einer durch drei Punkte und zwei Tangenten gegebenen Kurve zweiten Grades 253
§ 206. 59. Aufgabe: Tangentenkonstruktion für eine durch zwei Punkte und drei Tangenten gegebene Kurve zweiten Grades 255
§ 207—211. 60.—64. Aufgabe: Kollineare und affine Transformation von Kurven zweiten Grades, welche durch verschiedene Elemente gegeben sind, in Kreise 257
§ 212. 65. Aufgabe: Die Ableitung der Achsen einer Ellipse aus einem Paare konjugierter Durchmesser 261
§ 213—216. 66.—68. Aufgabe: Affine Transformation von Ellipsen, die durch verschiedene Elemente gegeben sind, in Kreise . . 262
§ 217. Räumliche perspektivische Kollineation 265
§ 218. Besondere Formen räumlich-perspektivischer Kollineation . . 269

VII. Kapitel.

Aufgaben in centralprojektivischer Darstellung mit Benützung projektivischer und kollinearer Konstruktionen.

§ 219. 69. Aufgabe: Ein beliebiges in der Bildebene gegebenes Viereck ist als die Centralprojektion eines zweiten in wahrer Grösse gegebenen Viereckes zu betrachten; es sind die Tracen der Ebene des letzteren und die Lage des Projektionscentrums zu ermitteln 271
§ 220. Centralprojektivische Darstellung von Kreisbildern 273
§ 221. 70. Aufgabe: In einer gegebenen Ebene ist ein Kreis so zu wählen, dass sein Bild als Ellipse erscheint, und sind a) ein Paar konjugierter Durchmesser, b) die Achsen der letzteren zu konstruieren 274
§ 222. 71. Aufgabe: Die reelle Achse und die Asymptoten eines sich als Hyperbel darstellenden Kreisbildes zu konstruieren . . . 277
§ 223. 72. Aufgabe: Die Achse, Scheiteltangente und den Brennpunkt eines als Parabel erscheinenden Kreisbildes zu ermitteln . . 278
§ 224. 73. Aufgabe: Ein in der Bildebene gegebener Kreis ist als Centralprojektion eines zweiten Kreises von (auf einem Träger) gegebenem Mittelpunkte zu betrachten; es ist der Radius und die Ebene des letzteren, sowie die Lage des Projektionscentrums zu bestimmen 279
§ 225. Centralprojektivische Darstellung von Spiegelbildern 281
§ 226. 74. Aufgabe: Unter Voraussetzung einer gegebenen spiegelnden Ebene die Spiegelbilder eines Punktes einer Geraden und einer Ebene darzustellen 282
§ 227. 75. Aufgabe: Konstruktion des Spiegelbildes eines ebenen Gebildes und Feststellung der Beziehung seines Bildes zu jenem des Originales 285

Seite

§ 228. 76. Aufgabe: Konstruktion des Glanzpunktes einer Ebene für zwei gegebene Punkte 286
§ 229. 77. Aufgabe: Konstruktion des Glanzpunktes einer Ebene für drei gegebene Punkte 287

III. Abschnitt.

Transformationen centralprojektivischer Bilder.

VIII. Kapitel.

§ 230—233. Allgemeine Bemerkungen. Transformation durch Lagenänderung des Projektionscentrums 290
§ 234. 78. Aufgabe: Das Bild eines gegebenen Dreieckes durch Verschiebung des Centrums so zu transformieren, dass es mit einem in der Bildebene liegenden Dreiecke perspektivisch ähnlich wird 297
§ 235. 79. Aufgabe: Zwei sich schneidende Geraden sind durch eine zur Bildebene normale Verschiebung des Centrums so zu transformieren, dass ihre Bilder einen gegebenen Winkel bilden, und ist die Grösse der hierzu erforderlichen Verschiebung zu ermitteln 298
§ 236—237. 80.—81. Aufgabe: Anwendung der Transformation als Hilfskonstruktion bei begrenzter (unzureichender) Zeichnungsfläche 299

IV. Abschnitt.

Aus Ebenen zusammengesetzte Gebilde.

IX. Kapitel.

Das Dreikant oder die dreiseitige körperliche Ecke.

§ 238. Allgemeine Bemerkungen 303
§ 239. 82. Aufgabe: Darstellung und Auflösung eines durch seine drei Kantenwinkel gegebenen Dreikantes 304
§ 240. 83. Aufgabe: Darstellung und Auflösung eines Dreikantes aus zwei Kantenwinkeln und dem eingeschlossenen Seitenwinkel . 305
§ 241. 84. Aufgabe: Darstellung und Auflösung eines Dreikantes aus zwei Kantenwinkeln und dem dem einen derselben gegenüber liegenden Seitenwinkel 307
§ 242. 85. Aufgabe: Konstruktion des Dreikantes aus einem Kantenwinkel und den beiden anliegenden Seitenwinkeln 308
§ 243. 86. Aufgabe: Darstellung eines durch die drei Seitenwinkel gegebenen Dreikantes 309
§ 244. 87. Aufgabe: Es sind die Centralprojektionen dreier sich in einem Punkte schneidender Geraden gegeben; das Projektionscentrum unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass diese drei Geraden die Kanten eines rechtwinkligen Dreikantes repräsentieren 310

X. Kapitel.

Centralprojektivische Darstellung der durch ebene Flächenstücke (Polygone) begrenzten Gebilde (Polyeder), ihrer ebenen und gegenseitigen Schnitte.

Seite

§ 245. Allgemeine Betrachtungen 311
§ 246. 88. Aufgabe: Darstellung einer fünfseitigen Pyramide unter gegebenen Bedingungen und Konstruktion eines ebenen Schnittes derselben 312
§ 247. Netzbestimmung einer Pyramide 316
§ 248. 89. Aufgabe: Darstellung eines Prisma und Bestimmung seines Schnittes mit einer Geraden und mit einer Ebene 317
§ 249. 90. Aufgabe: Konstruktion des gegenseitigen Schnittes zweier Pyramiden 319
§ 250. 91. Aufgabe: Konstruktion des gegenseitigen Schnittes einer Pyramide und eines Prisma, die ein Paar gebundener Kanten besitzen 323
§ 251. 92. Aufgabe: Konstruktion der Durchdringung zweier Prismen 325
§ 252. 93. Aufgabe: Centralprojektivische Darstellung eines Würfels und eines ebenen Schnittes desselben 326
§ 253. 94. Aufgabe: Darstellung eines Tetraeders 328
§ 254. 95. „ Darstellung eines Oktaeders 329
§ 255. 96. „ Darstellung eines Dodekaeders 330
§ 256. 97. „ Darstellung eines Ikosaeders 333
§ 257. 98. „ Darstellung eines unregelmässigen Polyeders (Prismatoid) 335

Erster Teil.

I. Abschnitt.

Grundzüge der Centralprojektion.

I. Kapitel.

Einleitung.

§ 1.

Allgemeine Bemerkungen.

Die Lichtstrahlen, welche ein Körper unmittelbar aussendet, sobald er selbstleuchtend ist, oder welche von seiner Oberfläche nach allen Richtungen reflektiert werden, wenn er ein beleuchteter jedoch an sich dunkler Körper ist, bewirken, sofern sie in das Auge gelangen, das Sichtbarwerden dieses Körpers.

Sämtliche Lichtstrahlen sind, vorausgesetzt, dass der Raum, in welchem deren Fortpflanzung stattfindet, von einem homogenen Mittel ausgefüllt ist und dass dieselben auf kein Hindernis stossen, welches sie absorbieren oder reflektieren würde, erfahrungsgemäss geradlinig.

Die ideale Gerade, längs welcher der von irgend einem Punkte im Raume ausgehende Lichtstrahl verläuft, bis er in das Auge gelangt, bezeichnet man als den, jenem Raumpunkte entsprechenden Sehstrahl.

Vergegenwärtigen wir uns zunächst den gesamten Sehprozess, d. i. die Art und Weise, wie dem Auge ein räumliches Objekt sichtbar wird, und wie man dessen Lage und Grösse sowohl, als auch dessen Entfernung vom Auge zu beurteilen pflegt.

Um unsere Betrachtung nicht unnötigerweise kompliziert zu gestalten, wollen wir nicht nur davon absehen, dass die Lichtstrahlen, sobald sie aus dem lufterfüllten Raume in das Linsensystem des Auges übergehen, gleichzeitig gebrochen werden, sondern überdies annehmen, dass die Lichtstrahlen sämtlich durch

einen festen Punkt, den wir das Centrum des Auges nennen, gehen, und dass sie, nach diesem Durchgange, im Inneren des Auges ihre ursprüngliche Richtung nicht ändern.

Wenn von irgend einem selbstleuchtenden oder beleuchteten Punkte **A** im Raume ein Lichtstrahl in das Auge gelangt, also unserer Voraussetzung nach durch das Centrum **C** des Auges geht, so wird er die hinter diesem Centrum liegende Netzhaut an einer gewissen Stelle **a** treffen, und daselbst einen Nervenreiz verursachen. Erfahrungsgemäss suchen wir die Ursache dieses Reizes, d. i. den leuchtenden Punkt **A**, in der Verlängerung jener geraden Linie, welche die Reizstelle **a** mit dem Augencentrum **C** verbindet. Dieser Vorgang, in Verbindung mit einer begleitenden Gedankenthätigkeit, bewirkt das Sichtbarwerden des Punktes **A** im Raume.

Der eben angestellten Betrachtung entnehmen wir eine wichtige Folgerung.

Denken wir uns auf dem dem Punkte **A** entsprechenden Sehstrahle **ACa** einen zweiten Punkt **A′** angenommen, so wird dieser genau dieselbe Stelle **a** der Netzhaut erregen wie der Punkt **A**, und die Eindrücke, welche die beiden Punkte **A** und **A′** auf das Auge ausüben, werden ganz die nämlichen sein, vorausgesetzt, dass nicht Umstände anderer Art, wie beispielsweise Farbe, Lichtstärke u. s. w., eine Unterscheidung resp. ein Urteil ermöglichen, ob **A** weiter vom Auge entfernt ist, als **A′** oder umgekehrt. Das Gleiche gilt von je zwei anderen Punkten welche auf einem und demselben Sehstrahle liegen, und weiters auch von räumlichen Objekten, welche von derartigen Punktepaaren gebildet werden.

Erscheint nämlich die Gerade **AB** [Fig. 1, Taf. I] irgend eines räumlichen Gebildes dem in **C** befindlichen Auge unter dem Sehwinkel **ACB**, so wird auch **A′B′**, für welche der Sehwinkel **A′CB′** = **ACB** ist, im Auge den nämlichen Eindruck hervorbringen.

Diese Behauptung scheint mit der Thatsache im Widerspruche zu stehen, dass wir bei gewöhnlichen Sehweiten über die Entfernung, die Form und Grösse der Körper ziemlich richtig zu urteilen vermögen, wenn uns dieselben auch unter dem nämlichen Sehwinkel erscheinen.

Der Grund hiervon ist jedoch bloss darin zu suchen, dass unser diesfälliges Urteil durch die Vergleichung mit anderen benachbarten Gegenständen geleitet wird, deren Grösse, Form und Entfernung uns entweder durch unmittelbares Betasten oder durch wirkliche Messung bekannt sind.

Als Richtschnur bei dieser Beurteilung dient gewöhnlich auch der Umstand, dass ein Körper einen anderen teilweise unsichtbar macht, oder dass der Schatten des einen Körpers auf den zweiten fällt, was zur beiläufigen richtigen Bestimmung der gegenseitigen Lage dieser Körper genügt, oder, dass eine dunkle oder eine glänzende Kante des einen oder anderen Körpers sichtbar wird, was auf den Vorsprung einer ersten Grenzfläche vor einer zweiten deutet, u. s. w.

Für geringe Entfernungen hat man einen Anzeiger in der Muskelanstrengung, welche gemacht werden muss, um beide Augenaxen auf den nämlichen Punkt des betrachteten Gegenstandes zu richten. Je nachdem diese Anstrengung grösser oder kleiner ist, schliesst man unwillkürlich auf eine grössere oder geringere Nähe jenes Punktes. Handelt es sich aber um grössere Distanzen, so wird die Veränderung des Winkels jener beiden Axen ganz unmerklich und kann daher im allgemeinen nicht mehr als Massstab der Entfernungen dienen.

Bei Gegenständen, die auf weitem Felde zerstreut umher liegen, beurteilt man die Entfernung nach der grösseren oder geringeren Intensität des Lichtes, welches sie zurückwerfen; oder man schätzt gleichsam die Distanzen aller dazwischen liegenden Gegenstände ab, um die Entfernung von demjenigen Objekte, welches insbesondere ins Auge gefasst wurde, darnach bemessen zu können.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Urteile, welche man unter Anleitung des Gesichtssinnes allein über Entfernungen fällt, viel von gewissen begleitenden Umständen und Kenntnissen bedingt sind, die nur durch lange Übung und Gewohnheit erworben werden konnten. Das Sehen muss so wie das Gehen gelernt und geübt werden. Beweis dafür ist, dass, wie die Erfahrung lehrt, ein Blindgeborener, welcher allenfalls durch die glückliche Hand eines tüchtigen Operateurs den Gebrauch seiner Augen erlangt, anfänglich ganz falsch über die Entfernungen der ihn umgebenden Gegenstände urteilt.

Selbst der Sehende verfällt in ähnliche Irrtümer, wenn ihm die Anwendung der oben angeführten Vergleichungsmittel unmöglich gemacht ist. Die Fixsterne und die Planeten scheinen dem ungeübten Beschauer, obgleich ihre Entfernungen vom beobachtenden Auge ungeheuer verschieden sind, alle auf einer und derselben Kugelfläche zu liegen, da es eben in diesem Falle an zwischenliegenden Objekten bekannter Grösse und Entfernung mangelt.

Ebenso wird der Ungeübte auf offenem Meere die Entfernungen sehr fehlerhaft abschätzen, und auf ähnliche Weise wird man auch dann nicht richtig urteilen, wenn man mittels eines einfachen cylindrischen Rohres, durch welches man bloss einen einzigen Gegenstand wahrnehmen kann, in die Weite sieht.

Bei grossen perspektivischen Gemälden, welche man Panoramen nennt, wähnt man nicht selten in grosser Distanz von den betrachteten Gegenständen zu sein, obwohl sich dieselben in einer Entfernung von wenigen Metern befinden. Diese Täuschung, der man sich mitunter unmöglich erwehren kann, rührt hauptsächlich daher, dass der Zuschauer aufs Sorgfältigste isoliert und seinen Blicken alles verborgen wird, was in unmittelbarer Berührung mit dem Gemälde selbst ist, dieselbe verschwindet jedoch augenblicklich, sobald man die Umfassung wahrnimmt, oder Gegenstände erblickt, die, zwischen dem Beschauer und dem Gemälde liegend, dem ersteren die empfangenen Eindrücke berichtigen helfen.

§ 2.

Perspektivische Bilder, freie Perspektive, Central- oder Polarprojektion.

Auf Grund der Erfahrung und all der oben angeführten Beobachtungen, welche die Richtigkeit der früher ausgesprochenen Behauptung bestätigen, lässt sich der allgemein gültige Satz folgern, dass ein leuchtender oder beleuchteter Punkt an jeder Stelle eines und desselben Sehstrahles den nämlichen Eindruck auf das Auge hervorbringt, vorausgesetzt, dass man nur die direkte Sinneswahrnehmung berücksichtigt, und von allen Nebenumständen, als Farbe, Lichtintensität, Umgebung u. s. w. absieht.

Denkt man sich daher von dem Punkte, welcher das Augencentrum eines Beobachters vorstellt, nach allen Punkten eines räumlichen Gebildes die Sehstrahlen gezogen, und diese Punkte durch andere, auf den ihnen entsprechenden Sehstrahlen ersetzt, so werden diese ein zweites Gebilde liefern, welches im obigen Sinne genau denselben Eindruck hervorbringen wird, wie das ursprüngliche Gebilde, so dass der Beschauer in der Lage ist, sich mit Zuhilfenahme seiner Phantasie durch den Anblick des zweiten abgeleiteten Gebildes eine mehr oder weniger richtige Vorstellung von dem ursprünglichen, oder Originalgebilde zu machen.

Ein solches aus einem Originalgebilde abgeleitetes Hilfsgebilde wird, sobald es zu dem Zwecke hergestellt ist, den nämlichen Eindruck wie das Originalgebilde auf das Auge hervorzubringen, und hierdurch die Vorstellung desselben zu ermöglichen, ein *„perspektivisches Bild“* im allgemeinsten Sinne des Wortes genannt.

Insbesondere nennt man aber das abgeleitete Gebilde dann das *„perspektivische Bild“*, die *„Linearperspektive“* oder kurz die *„Perspektive“* des Originalgebildes, wenn seine sämtlichen Punkte auf einer und derselben Fläche, als welche am häufigsten eine Ebene angenommen wird, liegen resp. daselbst abgebildet erscheinen.

Wir verstehen mithin unter dem perspektivischen Bilde eines räumlichen Gebildes den geometrischen Ort der Schnittpunkte aller nach den einzelnen Punkten desselben gehenden Sehstrahlen mit einer festen Ebene, der sogenannten *„Bildebene“* oder *„Tafel“*.

Werden auf eine derartige perspektivische Darstellung eines räumlichen Gebildes auch dessen Farben und Beleuchtungsverteilung übertragen, so wird dasselbe (in der Terminologie der graphischen Künste) als *„Luftperspektive“* bezeichnet.

Lässt man jedoch bei der perspektivischen Darstellung eines räumlichen Gebildes den Sehvorgang beiseite, betrachtet man also den Punkt, welchen wir früher mit dem Centrum des Auges identifiziert haben, als einen ideellen oder mathematischen Punkt, und das perspektivische Bild des räumlichen Gebildes lediglich als den Durchschnitt der Bildebene mit der Gesamtheit aller von diesem Punkte nach den einzelnen Punkten des Originalgebildes gehenden geraden Linien, und wird sodann ein derartig perspektivisches Bild Gegenstand geometrischer Untersuchungen und Konstruktionen, welche sich auf das Originalgebilde beziehen, so heisst das genannte Bild eine *„perspektivische Projektion“*, *„Polarprojektion“* oder *„Centralprojektion“* des Originalgebildes, während der obgedachte feste Punkt als das *„Projektionscentrum“* oder als *„Pol“* bezeichnet wird.

Ausserdem nennt man auch jenen Zweig der geometrischen Wissenschaften (speziell der darstellenden Geometrie), welche sich mit jenen Methoden beschäftigt, nach welchen die erwähnten Untersuchungen und Konstruktionen vorzunehmen sind, die *„Methode der Centralprojektion“* oder *„Perspektive“*.

Die Grundzüge dieser Methode zu entwickeln, zu begründen

und dieselbe in ihrer Anwendung zu zeigen, soll der Zweck und der Gegenstand des vorliegenden Buches sein.

Bevor wir hierauf übergehen, mag noch auf einen Unterschied zwischen der Centralprojektion und dem perspektivischen Bilde eines Objektes im früheren Sinne hingewiesen werden.

Wird nämlich das Projektionscentrum mit dem Auge eines Beobachters identifiziert, so ist es mit Rücksicht auf die Beschaffenheit unseres Organismus notwendig, das abzubildende Objekt sowohl, als auch die Bildebene vor diesem Auge anzunehmen, da Punkte des Raumes, welche hinter dem Auge liegen, keine reellen Bilder ergeben können.

Fasst man jedoch die Centralprojektion abstrakt als den Ort der Schnittpunkte der Bildebene mit allen von dem Projektionscentrum nach den Punkten des darzustellenden Gebildes gehenden Strahlen auf, so ist ohne weiteres einleuchtend, dass jedem Punkte des Raumes ein reelles Bild entspricht, wobei es ganz gleichgültig bleibt, welche gegenseitige Lage der Punkt, das Projektionscentrum und die Bildebene besitzen.

§ 3.

Grundbegriffe der Methode der Centralprojektion.

Wie überhaupt bei den meisten graphischen Darstellungen nimmt man auch in der Centralprojektion als *„Bildebene“* oder *„Tafel“* ein Zeichnungsblatt oder eine Zeichentafel an.

Die nächste Aufgabe besteht darin, die Lage des im Raume gedachten Projektionscentrums gegen diese Bildebene festzustellen.

Letzteres geschieht am einfachsten, wenn man von dem Projektionscentrum (**C**) [Fig. 2, Taf. I] eine Senkrechte (**C**)**A** auf die Bildebene **BE** fällt, und von dem Fusspunkte **A** derselben auf irgend eine in der Bildebene liegenden Geraden die Länge **d** des genannten Perpendikels **A**(**C**) nach **AC** aufträgt, oder auch aus **A** als Mittelpunkt mit dem Radius **d** einen Kreis **D** beschreibt.

Es ist ohne weiteres einleuchtend, dass durch die Angabe der Strecke **AC** oder des Kreises **D** und seines Mittelpunktes **A** in der Bildebene die räumliche Lage des Projektionscentrums bestimmt ist. Man hat sich nämlich bloss im Punkte **A** eine Senkrechte (Normale) zur Bildebene gezogen, und auf derselben von **A** aus die Strecke **AC** oder den Radius **d** des Kreises **D** nach **A**(**C**)

aufgetragen zu denken, um in deren zweiten Endpunkt (C) das fragliche Projektionscentrum zu erhalten.

Wie leicht ersichtlich erhält man durch diese Konstruktion zwei Punkte (C) und (C′), welche symmetrisch gegen die Bildebene liegen, und von welchen jeder ein Projektionscentrum vorstellen kann.

Um diese Zweideutigkeit zu beheben, wollen wir ein für allemal festsetzen, dass das Projektionscentrum (C) vor der Bildebene, d. h. auf jener Seite der Bildebene liege, auf welcher sich der Konstrukteur befindet.

Soll jedoch ausnahmsweise von dem hinter der Bildebene liegenden Punkte (C′) als Projektionscentrum Gebrauch gemacht werden, so wollen wir dies dadurch anzeigen, dass wir dem Buchstaben C oder D ein Minuszeichen als Fussindex beisetzen, also statt C und D, beziehungsweise C_- und D_- schreiben.

Der Fusspunkt A der vom Projektionscentrum (C) auf die Bildebene BE gefällten Normale (Hauptstrahl, Hauptnormale) heisst der *„Hauptpunkt“*; die Strecke d = A(C) (wahre Grösse der Entfernung des Centrums (C) vom Fusspunkte A der Normale aus (C) zur Bildebene) pflegt man die *„Distanz“* zu nennen, während die Strecke d = AC in der Bildebene die *„umgelegte Distanz“* und der Kreis D der *„Distanzkreis“* genannt wird.

Soll die centrale Projektion eines räumlichen Gebildes gleichzeitig auch eine perspektivische Ansicht des letzteren liefern, wie dies bei der perspektivischen Darstellung technischer Objekte gefordert wird, so pflegt man, wie wir an späterer Stelle sehen werden, die Lage des Hauptpunktes und die Grösse des Distanzkreises noch von anderen charakteristischen Bestimmungsstücken abhängig zu machen, gleichzeitig aber die Horizonts- und Vertikallinie beizufügen.

§ 4.

Centralprojektionen von Punkten.

Wenn ein beliebiger Punkt P [Fig. 3, Taf. I] im Raume gegeben, d. h. seiner Lage nach vollständig bestimmt ist, so gilt das Gleiche auch von seiner Centralprojektion p auf die Bildebene BE bezüglich des Projektionscentrums (C), nachdem diese Centralprojektion, der früher aufgestellten Definition gemäss, den Schnittpunkt der Bildebene BE mit dem Verbindungsstrahle von (C) mit P d. i. dem *„Projektionsstrahle“* (C)P repräsentiert.

Hieraus ist sofort zu entnehmen, dass einem Punkte P im Raume stets nur eine einzige Centralprojektion p entspricht, und dass dieselbe vollständig bestimmt sei, wenn der Punkt P selbst seiner Lage nach gegen die Bildebene und das Projektionscentrum gegeben ist.

Die einzige Ausnahme von dieser allgemein gültigen Regel macht nur das Projektionscentrum (C), sobald es gleichzeitig als ein darzustellender Punkt P des Raumes aufgefasst wird. Diesfalls kann nämlich jeder durch das Projektionscentrum (C) geführte Strahl als Projektionsstrahl für P, und mithin jeder beliebige Punkt der Bildebene als Centralprojektion von P aufgefasst werden, oder mit anderen Worten:

„Die Centralprojektion des Projektionscentrums ist völlig unbestimmt.“

Die vorher aufgestellte Behauptung, dass die Centralprojektion p eines beliebig im Raume gegebenen Punktes P vollständig bestimmt ist, wenn p und (C)p als bekannt vorliegen, kann nicht umgekehrt werden. Es lässt sich nämlich sehr leicht zeigen, dass durch die blosse Angabe der Centralprojektion p eines Raumpunktes P dieser letztere keineswegs eindeutig festgestellt sei.

Der Projektionsstrahl, auf welchem der darzustellende Punkt P liegen muss, ist wohl durch die Verbindungsgerade des Punktes p mit dem Projektionscentrum (C) gegeben; wir finden aber gleichzeitig, dass ebenso jeder beliebig andere auf diesem Strahle gewählte Punkt P seine Centralprojektion thatsächlich in p haben werde, dass also:

„Jeder Punkt der Bildebene die Centralprojektion aller auf dem durch ihn gehenden Projektionsstrahle liegenden Punkte darstelle.“

Auf jedem Projektionsstrahle (C)p gibt es jedoch zwei besonders ausgezeichnete Punkte, nämlich den Schnittpunkt desselben mit der Bildebene, d. i. p selbst, und den unendlich fernen Punkt V_∞ dieses Strahles.

Die genannten Punkte haben ihre Centralprojektionen ebenfalls in p, und es ist einleuchtend, dass es, wenn p die Centralprojektion eines der beiden Punkte p oder V_∞ vorstellen soll, bloss eines hierauf abzielenden Hinweises bedarf. Dieser Hinweis wird, wie allgemein gebräuchlich, in der Form gegeben, dass man diesfalls die Centralprojektion nicht mit p, sondern im ersten Falle

mit einem der Buchstaben d, D, δ, Δ, ∂, Θ, ϑ, 𝔇 und im zweiten Falle mit einem der Buchstaben v, V, φ, Φ, ψ, Ψ, f, F bezeichnet.

Wenn also irgend ein in der Bildebene liegender Punkt mit einem der Buchstaben d, D, δ, Δ, ∂, Θ, ϑ, 𝔇 (welchen wieder zur Unterscheidung anderweitige Buchstaben, Zahlen oder Striche als Indexe beigefügt werden können) bezeichnet ist, so soll dies bedeuten, dass dieser Punkt als ein in der Bildebene liegender Originalpunkt, welcher mit seiner Centralprojektion zusammenfällt, anzusehen sei.

Ist hingegen ein beliebiger Punkt der Bildebene durch einen der Buchstaben v, V, f, F, φ, Φ, ψ, Ψ (mit oder ohne Index) gekennzeichnet, so soll dieser Punkt die Centralprojektion oder das Bild des unendlich fernen Punktes des ihm entsprechenden Projektionsstrahles repräsentieren.

§ 5.

Centralprojektion einer Geraden. Durchstosspunkt und Fluchtpunkt einer Geraden.

Es stelle BE [Fig. 4, Taf. I] die Bildebene, (C) das Projektionscentrum und L irgend eine unbegrenzte, gegen BE geneigte Gerade dar.

Unter der Centralprojektion oder dem Bilde dieser Geraden L auf der Bildebene BE, [für das Projektionscentrum (C)] haben wir den geometrischen Ort der Centralprojektionen aller ihrer Punkte zu verstehen.

Dass der genannte geometrische Ort selbst wieder eine Gerade sein müsse, ist unschwer nachzuweisen.

Denken wir uns nämlich nach allen Punkten P_1, P_2 .... der Geraden L die Projektionsstrahlen (C)P_1, (C)P_2 .... gezogen, so liegen diese sämtlich in jener Ebene, welche durch die Gerade L und durch das Projektionscentrum (C) bestimmt ist. Die genannte Ebene schneidet ferner die Bildebene in einer Geraden l, und diese Schnittgerade wird selbstverständlich alle Schnittpunkte p_1, p_2 ... der Projektionsstrahlen (C)P_1, (C)P_2 ... mit der Bildebene, d. h. die Centralprojektionen aller Punkte P_1, P_2 ... von L enthalten.

Bezeichnet man die durch die Gerade L und durch das Projektionscentrum bestimmte Ebene als die *„die Gerade* L *centralprojizierende Ebene“*, so folgt aus der vorstehenden Betrachtung,

dass: *„die Centralprojektion einer beliebigen Geraden stets wieder eine Gerade sei und dass dieselbe durch den Schnitt der Bildebene mit der der Originalgeraden entsprechenden centralprojizierenden Ebene dargestellt werde.“*

Ausgenommen hiervon sind jene Geraden im Raume, welche insbesondere durch das Projektionscentrum gehen, und die man *„centralprojizierende Geraden“* nennt. Da jede derartige Gerade gleichzeitig ein Projektionsstrahl ist, so folgt aus den Betrachtungen in § 4, dass sich ihre Centralprojektion auf einen einzigen Punkt, d. i. auf ihren Schnitt mit der Bildebene reduziert.

Den obigen Auseinandersetzungen entnehmen wir weiteres, dass, sobald eine Gerade **L** im Raume ihrer Lage nach vollständig gegeben ist, auch ihre Centralprojektion „als Schnitt der ihr entsprechenden centralprojizierenden Ebene mit der Bildebene“ unzweideutig bestimmt ist.

Umgekehrt ist aber die Lage einer Geraden im Raume, von welcher bloss die Centralprojektion **l** gegeben ist, nicht bestimmt; denn die durch **l** und das Projektionscentrum (**C**) gelegte Ebene ist nicht bloss für eine bestimmte Gerade, sondern für alle möglichen in ihr liegenden Geraden die centralprojizierende Ebene, d. h. mit anderen Worten:

„Eine beliebige in der Bildebene liegende Gerade repräsentiert zu gleicher Zeit die Centralprojektion aller jener Geraden, welche in der durch die vorgenannte Gerade und das Projektionscentrum bestimmten Ebene liegen.“

Genau so wie in § 4 der Schnittpunkt mit der Bildebene und der unendlich ferne Punkt eines Projektionsstrahles als besonders ausgezeichnete Elemente erkannt wurden, erweisen sich auch bezüglich der centralprojektivischen Darstellung einer beliebigen nicht durch das Projektionscentrum gehenden Geraden, einerseits deren Schnittpunkt mit der Bildebene und andererseits deren unendlich ferner Punkt von wesentlicher Bedeutung.

Was den Schnittpunkt der Geraden **L** mit der Bildebene anbelangt, welchen man den *„Bildflächdurchstosspunkt“*, die *„Bildflächspur“* oder kurz auch den *„Durchstosspunkt“* der Geraden **L** nennt, so fällt derselbe als ein in der Bildebene liegender Punkt des Raumes mit seiner Centralprojektion zusammen. Dass dieser Punkt, welcher im Sinne des § 4 mit **d** bezeichnet wird, auch der Centralprojektion **l** der Geraden **L** angehören muss, ist einleuchtend,

wenn man bedenkt, dass er sowohl in der Bildebene, als auch in der centralprojizierenden Ebene der Geraden **L**, also auch im Schnitte **l** der beiden eben genannten Ebenen liegt.

Liegt nun ausser der Centralprojektion **l** einer Geraden **L** auch noch der in **l** liegende Bildflächdurchstosspunkt **d** als gegeben vor, so findet man unmittelbar, dass die frühere Unbestimmtheit der Originalgeraden **L** im Raume einigermassen eingeschränkt wird, da unter diesen Voraussetzungen nicht mehr jede beliebige in der durch **l** und das Centrum (**C**) bestimmten centralprojizierenden Ebene liegende Gerade die gedachte Originalgerade **L** vorstellen kann, sondern es wird nur eine von jenen Geraden sein können, welche gleichzeitig durch den Punkt **d** gehen.

Denkt man sich ferner durch das Projektionscentrum (**C**) den mit der Geraden **L** parallelen Projektionsstrahl gezogen, d. h. jenen Strahl geführt, welcher durch den unendlich fernen Punkt V_∞ von **L** geht. Dieser Strahl schneidet die Bildebene **BE** in einem Punkte, welchen wir als die Centralprojektion oder als das Bild des vorgenannten unendlich fernen Punktes V_∞ ansehen können, und welchen wir, gemäss dem in § 4 getroffenen Übereinkommen, mit **v** bezeichnen.

Der Punkt **v**, welcher der *„Fluchtpunkt“*, *„Verschwindungspunkt“* oder der *„Gegenpunkt“* der Geraden **L** heisst, muss notwendig in der Centralprojektion **l** der Geraden **L** liegen.

Infolge der Parallelität der Geraden **L** und (**C**)**v** liegt der Strahl (**C**)**v** in der durch **L** und (**C**) bestimmten centralprojizierenden Ebene, und mithin der Schnittpunkt **v** desselben mit der Bildebene im Schnitte der letzteren mit der genannten projizierenden Ebene, d. i. in der Centralprojektion **l** der Geraden **L**.

Die beiden Punkte **d** und **v**, d. i. den Durchstosspunkt und den Fluchtpunkt der Geraden **L** pflegt man die *„Hauptpunkte“* oder die *„Kardinalpunkte“* der Geraden **L** zu nennen, während die von ihnen auf der Centralprojektion **l** dieser Geraden bestimmte endliche Strecke **dv** als die *„Bildlänge“* der Geraden **L** bezeichnet wird.

Man erkennt jetzt unschwer, dass die Lage einer Geraden **L** im Raume vollständig bestimmt ist, sobald — selbstverständlich bei gegebenem Projektionscentrum — ihre beiden Hauptpunkte **d** und **v** gegeben sind. Da nämlich diesen beiden Hauptpunkten zwei ganz bestimmte, der Geraden **L** im Raume angehörende Punkte **d** und V_∞ entsprechen, so ergiebt sich **L** unmittelbar als die Ver-

bindungsgerade dieser Punkte resp. als die durch **d** parallel zu (**C**)**v** geführte Gerade.

Setzen wir die Zeichnungsebene als Bildebene voraus, seien ferner **A** [Fig. 5, Taf. I] der Hauptpunkt und $\mathbf{D}_k$ der Distanzkreis, welche vereint die Lage des Projektionscentrums (**C**) bestimmen, und seien weiters **d** der Durchstosspunkt und **v** der Fluchtpunkt irgend einer Raumgeraden **L**, so ist durch **dv** die centrale Projektion der letzteren eindeutig festgestellt.

Das Projektionscentrum erhält man diesfalls als jenen Punkt (**C**) im Raume, welcher auf der durch **A** senkrecht zur Bildebene gezogenen Geraden, in einem Abstande von **A** liegt, welcher dem Radius des Distanzkreises $\mathbf{D}_k$ gleichkommt.

Nach den vorhergehenden Ausführungen gibt sodann der Strahl, welcher dieses Projektionscentrum (**C**) mit dem Fluchtpunkte **v** verbindet und der *„Fluchtstrahl“* genannt wird, die Richtung der dargestellten Geraden **L** an. Da die letztere durch den Durchstosspunkt **d** gehen muss, so ist sie als die Parallele durch **d** zum Strahle (**C**)**v** vollkommen bestimmt.

§ 6.

Folgerungen aus der perspektivischen Darstellung gerader Linien durch ihre Hauptpunkte; Neigungswinkel einer Geraden gegen die Bildebene. Besondere Lagen einer Geraden.

Nachdem, wie im Vorhergehenden gezeigt wurde, jede Gerade im Raume zu der Verbindungsgeraden des Projektionscentrums mit ihrem Fluchtpunkte, d. i. zu ihrem *„Parallel-“* oder *„Fluchtstrahle“* parallel ist, so ergiebt sich unmittelbar, dass:

Gerade Linien, welche sämtlich untereinander parallel sind, sonst aber beliebige Lagen im Raume haben können, einen und denselben Fluchtstrahl, und mithin auch einen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt besitzen müssen.

Konvergieren umgekehrt die Centralprojektionen irgend welcher Geraden in einem und demselben Fluchtpunkte, so lässt sich daraus schliessen, dass diese Geraden im Raume untereinander parallel sein müssen.

Geht eine Gerade **L** im Raume durch das Projektionscentrum, so fällt sie mit ihrem Fluchtstrahl zusammen; der Schnittpunkt einer solchen Geraden mit der Bildebene ist daher gleichzeitig ihr Durchstosspunkt und ihr Fluchtpunkt.

Liegt eine Gerade im Raume parallel zur Bildebene, so gilt das Gleiche auch von ihrem Flucht- oder Parallelstrahle; es ergiebt sich daher weder ein im Endlichen liegender Durchstosspunkt noch Fluchtpunkt. Hieraus ist zu ersehen, dass die Darstellungsweise einer Geraden durch „Durchstosspunkt und Fluchtpunkt", für solche Geraden, die zur Bildebene parallel sind, ihre Dienste versagt, und dass daher in der Folge für diesen Fall ein anderweitiges Mittel resp. eine andere Methode der Darstellung wird festgestellt werden müssen, um derartige Geraden centralprojektivisch eindeutig zu bestimmen.

Steht eine Gerade senkrecht auf der Bildebene, so gilt das Gleiche auch von ihrem Fluchtstrahle; dieser fällt also mit dem Hauptstrahle zusammen. Der Fluchtpunkt von zur Bildebene senkrechter Geraden ist mithin durch den Hauptpunkt **A** (Mittelpunkt des Distanzkreises) dargestellt.

Aus dem eben Gesagten ist zu entnehmen, dass die Lage des Fluchtpunktes einer Geraden auf der Bildebene in einer gewissen Beziehung zu der Neigung dieser Geraden gegen die Bildebene steht. Um das diesbezügliche Gesetz kennen zu lernen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Es sei **BE** [Fig. 6, Taf. I] die Bildebene, (**C**) das Projektionscentrum, **A** der Hauptpunkt, **L** eine gegen die Bildebene unter irgend einem Winkel α geneigte Gerade, (**C**)**v** der ihr entsprechende Fluchtstrahl und **v** ihr Fluchtpunkt.

Da der Fluchtstrahl (**C**)**v** zur Geraden **L** parallel läuft, so wird derselbe ebenfalls den Winkel α mit der Bildebene einschliessen. Dieser Winkel α wird bekanntlich als derjenige erhalten, welchen die Gerade (**C**)**v** mit der Schnittgeraden **Av** der Bildebene **BE** und der durch (**C**)**v** senkrecht zur Bildebene gelegten Ebene **v**(**C**)**A** einschliesst, d. i. als jener Winkel erhalten, welchen der Fluchtstrahl (**C**)**v** mit seiner orthogonalen Projektion **vA** auf der Bildebene einschliesst.

Es ist mithin der Winkel (**C**)**vA** der fragliche Neigungswinkel α. Berücksichtigen wir nun, dass das Dreieck (**C**)**Av** bei **A** rechtwinklig ist, und dass die eine Kathete (**C**)**A** desselben gleich der Hauptdistanz **d**, also unveränderlich ist, so folgt ohne weiteres, dass die zweite Kathete **vA** nur von der Grösse des Winkels α abhängig sei, oder dass, algebraisch ausgedrückt:

$$\mathbf{vA} = \mathbf{d} \,.\, \operatorname{ctg} \alpha$$

sein müsse. Wir entnehmen dieser Beziehung, dass, sobald α

unverändert bleibt, auch **vA** sich nicht ändert, dass also die Fluchtpunkte **v**, **v′**, **v″** . . . aller Geraden **L**, **L′**, **L″** . . . im Raume, welche sämtlich mit der Bildebene den gleichen Winkel α einschliessen, auf der Peripherie des aus dem Mittelpunkte **A** mit dem Radius **vA** beschriebenen Kreises K_α liegen müssen, und dass dieser Kreis vollständig bestimmt sei, sobald der Winkel α seiner Grösse nach gegeben ist, indem sich sein Radius $vA = r$ als eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes **vA(C)** ergibt, dessen andere Kathete der Distanz **d** gleich ist, während der der letzteren gegenüberliegende Winkel den gegebenen Neigungswinkel α repräsentiert.

Der so erhaltene Kreis K_α heisst der dem Neigungswinkel α entsprechende *„Fluchtkreis“* oder *„Neigungskreis.“*

Wenn wir die Gleichung $vA = r = d \operatorname{cotang} \alpha$ diskutieren, so gelangen wir ohne weiteres zu den bereits früher angeführten besonderen Lagen einer Geraden. So findet man beispielsweise für α gleich 0 (Null) einen Fluchtkreis von unendlich grossem Radius, d. h. der Fluchtpunkt einer mit der Bildebene den Winkel 0 einschliessenden, also zur Bildebene parallelen Geraden liegt in unendlicher Entfernung.

Wird der besagte Neigungswinkel $\alpha = 45°$, so ist der Radius **r** des Fluchtkreises der Distanz **d** gleich, d. h. der *Fluchtkreis* K_α *für alle gegen die Bildebene unter dem Winkel* $\alpha = 45°$ *geneigten Geraden fällt mit dem Distanzkreis* D_k *zusammen.*

Ist der Neigungswinkel $\alpha = 90°$, so ist der Radius **r** des Neigungskreises K_α gleich 0 (Null); der letztere reduziert sich somit auf den Hauptpunkt.

Weiteres entnimmt man dem Gesagten mit Hilfe der vorher aufgestellten Gleichung $r = d \operatorname{cotang} \alpha$ unmittelbar auch die Richtigkeit des Satzes:

Von zwei perspektivisch dargestellten Geraden schliesst diejenige den grösseren Winkel mit der Bildebene ein, deren Fluchtpunkt dem Hauptpunkte näher liegt.

§ 7.

Centralprojektivische Darstellung einer Ebene. Bildflächtrace und Fluchttrace einer Ebene.

Denken wir uns irgend eine gegen die Bildebene und das Projektionscentrum beliebig liegende Ebene **E** gegeben. Jedem

Punkte dieser Ebene entspricht eine Centralprojektion, und umgekehrt ist jeder Punkt der Bildebene die Centralprojektion eines gewissen Punktes der Ebene E. Es ist daher die ganze Bildebene von den Projektionen der Punkte der Ebene E stetig ausgefüllt, und da ein Gleiches von jeder anderen nicht durch das Projektionscentrum gehenden Ebene gilt, so ist einleuchtend, dass auf diesem Wege für die centralprojektivische Darstellung einer Ebene nichts gewonnen wird.

Wir befinden uns hier in einem analogen Falle, wie bei der Darstellung einer geraden Linie. Ebenso wie hier die Bildebene gewissermassen als die Centralprojektion aller möglichen Ebenen im Raume angesehen werden kann, so war eine beliebige Gerade in der Bildebene gleichzeitig die Centralprojektion aller möglichen in der durch sie bestimmten centralprojizierenden Ebene liegenden Geraden. Erst dadurch, dass man deren Durchstosspunkt und Fluchtpunkt ihrer Centralprojektion hinzufügte, wurde eine bestimmte unter den letztgenannten Geraden befindliche Gerade auf eine unzweideutige Weise festgestellt.

Es wird sich mithin, um Einheitlichkeit in die Darstellungsmethode zu bringen, empfehlen, zur Darstellung einer Ebene analoge Hilfsmittel, wie zur Darstellung einer Geraden zu verwenden.

Eine gerade Linie ist durch zwei in ihr liegende Punkte, und eine Ebene durch zwei in ihr liegende Geraden bestimmt.

Für die Darstellung der Geraden in centraler Projektion wurden, wie wir gesehen haben, zwei besondere Punkte derselben benützt, und zwar einerseits jener Punkt, welchen die Gerade mit der Bildebene gemein hat, und andrerseits der unendlich ferne Punkt der Geraden. Analog wird man sich auch bei der centralprojektivischen Darstellung einer Ebene zweier besonderen Geraden bedienen, welche in derselben liegen.

Die eine dieser Geraden E_b [Fig. 7, Taf. I] ist diejenige, welche die Ebene E mit der Bildebene gemein hat; sie stellt als solche ihre eigene Centralprojektion vor und wird die *„Bildflächtrace“* oder *„Bildflächspur“* der Ebene E genannt.

Die zweite Gerade, welche bei der Darstellung einer Ebene E zweckmässig zur Verwendung gelangt, ist diejenige, welche die besagte Ebene E mit der unendlich fernen Ebene gemein hat, d. h. die unendlich ferne Gerade V der Ebene E.

Da bekanntlich diese unendlich ferne Gerade V auch allen

zu E parallelen Ebenen angehört, so wird offenbar ihre Centralprojektion E_v als Schnitt der Bildebene BE mit der durch das Projektionscentrum (C) parallel zu E gelegten Ebene VE erhalten. Diese Centralprojektion E_v bezeichnet man als die *„Fluchttrace“*, *„Verschwindungstrace“* oder *„Gegenaxe“* der Ebene E, und die zu E durch das Centrum (C) parallel gelegte Ebene VE oder FE als die *„Fluchtebene“* der dargestellten Ebene E.

Nachdem die letztgenannte Ebene VE oder FE die Flucht- oder Parallelstrahlen aller Geraden enthält, welche in der Ebene E gedacht werden können, so kann die erstere auch als Parallelebene zu der letzteren und die Fluchttrace als der Ort der Fluchtpunkte aller in der Ebene E liegenden Geraden aufgefasst werden.

Da die Bildflächtrace E_b und die Fluchttrace E_v einer Ebene E die Schnittgeraden der Bildebene BE mit zwei zu einander parallelen Ebenen, d. i. der Ebene E und ihrer Fluchtebene VE, repräsentieren, so müssen sie notwendig parallele Geraden sein.

Dass durch die Angabe der beiden Tracen E_b und E_v die Ebene E räumlich vollständig bestimmt sei, ist ohne weiteres klar, wenn man berücksichtigt, dass dieselben zwei Geraden im Raume eindeutig bestimmen, oder wenn man aus E_b und E_v die Ebene E konstruiert. Denkt man sich nämlich durch das Projektionscentrum (C) und die Fluchttrace E_v die Fluchtebene VE — es gibt offenbar nur eine solche — gelegt, so wird die dargestellte Ebene E jene sein, welche sich durch die Bildflächtrace E_b parallel zu VE führen lässt.

Was mit Rücksicht auf die graphische Ausführung die Bezeichnung der beiden Tracen einer Ebene betrifft, so wählen wir für dieselben den gleichen Buchstaben, der für die Benennung der darzustellenden Ebene gewählt wurde und fügen demselben, je nachdem er sich auf die Bildflächtrace oder die Fluchttrace bezieht, den Fussindex b resp. v bei. Überdies kennzeichnen wir, der leichteren Unterscheidung halber, die Bildflächtrace durch eine voll ausgezogene, die Fluchttrace dagegen durch eine strichulierte Gerade.

§ 8.

Folgerungen aus der centralprojektivischen Darstellung einer Ebene durch ihre Tracen. Neigungswinkel einer Ebene gegen die Bildebene. Besondere Lagen einer Ebene.

Da alle untereinander parallelen Ebenen nur eine unendlich ferne Gerade gemein haben, so wird deren Centralprojektion die Fluchttrace einer jeden dieser Ebenen vorstellen, oder mit anderen Worten, da man zu einer Schar paralleler Ebenen durch einen Punkt, — diesfalls durch das Projektionscentrum —, nur eine einzige parallele Ebene legen kann, so wird nach der früher entwickelten Darstellungsmethode der Schnitt dieser letzteren Ebene (der Fluchtebene) mit der Bildebene die Fluchttrace für alle vorgenannten Ebenen repräsentieren. Hieraus ergibt sich der wichtige Satz:

„Alle untereinander parallelen Ebenen besitzen eine gemeinschaftliche Fluchttrace.“

Wenn nun umgekehrt zwei oder mehrere durch ihre Tracen centralprojektivisch dargestellte Ebenen eine und dieselbe Fluchttrace besitzen, so müssen diese Ebenen notwendig untereinander parallel sein.

Enthält eine Ebene das Projektionscentrum, ist dieselbe also eine *„centralprojizierende“* Ebene, so ist ihr Schnitt mit der Bildebene gleichzeitig die Centralprojektion aller in ihr liegenden Geraden, mithin auch der unendlich fernen Geraden; die Bildflächtrace und die Fluchttrace einer centralprojizierenden Ebene fallen demnach in eine und dieselbe Gerade zusammen.

Ist eine Ebene parallel zu der Bildebene, so gilt das Gleiche auch von ihrer Fluchtebene. Beide Ebenen schneiden sodann die Bildebene in der unendlich fernen Geraden. Eine solche Ebene besitzt daher keine eigentlichen, d. h. im Endlichen liegenden Tracen. Die unendlich ferne Gerade der Bildebene kann für die Darstellung einer solchen Ebene nicht verwendet werden, da durch sie überhaupt jede zur Bildebene parallele Ebene repräsentiert wäre. Wir werden daher erst an späterer Stelle ein Mittel kennen lernen, welches es uns ermöglichen wird eine zur Bildebene parallele Ebene auf eine höchst einfache Weise eindeutig zu bestimmen.

Eine sehr wichtige Rolle spielt der Abstand der Fluchttrace einer Ebene vom Hauptpunkte.

Selbst eine bloss oberflächliche Betrachtung zeigt schon, dass dieser Abstand um so grösser sei, je kleiner die Neigung der betreffenden Ebene gegen die Bildebene ist.

Das Gesetz der diesbezüglichen Abhängigkeit kann leicht abgeleitet werden.

Vor allem ist einleuchtend, dass, weil eine Ebene **E** und deren Fluchtebene **VE** zu einander parallel, also notwendig gleichgeneigt gegen die Bildebene sind, zur Ermittelung ihrer Neigung gegen die Bildebene nur die Kenntnis der Fluchtebene, oder was gleichbedeutend ist, die Kenntnis der Fluchttrace und jene des Projektionscentrums erforderlich ist.

Es stelle **BE** [Fig. 8, Taf. I] die Bildebene, (**C**) das Projektionscentrum, **A** den Hauptpunkt und E_v die Fluchttrace jener Ebene vor, deren Neigung gegen die Bildebene bestimmt werden soll. Der betreffende Neigungswinkel ist, wie bereits hervorgehoben wurde, jenem Winkel gleich, welchen die Fluchtebene $[(C), E_v] = VE$ mit der Bildebene einschliesst.

Um diesen Winkel zu erhalten, hat man bekanntlich eine zur Schnittgeraden E_v dieser beiden Ebenen senkrechte Hilfsebene zu konstruieren, und deren Schnittgeraden mit den beiden Ebenen zu bestimmen. Für den vorliegenden Zweck denken wir uns die genannte Hilfsebene durch das Projektionscentrum (**C**) geführt. Da dieselbe senkrecht zur Geraden E_v sein soll, so müssen auch deren Schnittgeraden mit der Bildebene **BE** und der Fluchtebene **VE** senkrecht auf der Fluchttrace E_v stehen. Nachdem weiter die durch (**C**) geführte Hilfsebene auch senkrecht zur Bildebene steht, so ist ihre Schnittgerade mit der letzteren die durch den Hauptpunkt **A** auf die Fluchttrace E_v gefällte Normale **AA'**. Bezeichnet **A'** den Schnittpunkt dieser letztgenannten Senkrechten **AA'** mit der Fluchttrace E_v, so ergibt sich, wie man sofort erkennt, der Schnitt der Hilfsebene mit der Fluchtebene **VE** als Verbindungsgerade der Punkte **A'** und (**C**). Wie bekannt ist nun der so erhaltene Winkel α, welchen die beiden Geraden **AA'** und (**C**)**A'** einschliessen, der gesuchte Neigungswinkel der Fluchtebene **VE**, also auch der gegebenen Ebene **E** gegen die Bildebene.

Die angestellte Betrachtung zeigt, dass der verlangte Neigungswinkel $AA'(C) = \alpha$ als ein Winkel in einem rechtwinkeligen Dreiecke **AA'** (**C**) gefunden wird, in welchem die ihm anliegende und die ihm gegenüberliegende Kathete beziehungsweise gleich der Entfernung $r = AA'$ der Fluchttrace E_v vom Hauptpunkte **A** und der

Distanz $d = A(C)$ sind. Hiernach ergibt sich so wie an früherer Stelle auch diesfalls:

$$r = d \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ist $\alpha = 90°$, steht also eine Ebene zur Bidebene senkrecht, so ist $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, also auch $r = 0$, d. h. die Fluchttrace einer zur Bildebene senkrecht stehenden Ebene geht stets durch den Hauptpunkt.

Ferner entnimmt man der obigen Gleichung, dass, sobald α konstant ist, auch r konstant sein müsse, dass also die Fluchttracen aller Ebenen, welche denselben Winkel mit der Bildebene einschliessen, die gleiche Entfernung r vom Hauptpunkte A besitzen, oder mit anderen Worten, dass diese Fluchttracen einen Kreis K_α berühren, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius $r = d \operatorname{ctg} \alpha$ ist. Es besteht hiernach der Satz:

„Die Fluchttracen von Ebenen gleicher Neigung gegen die Bildebene erscheinen als Tangenten an jenen Fluchtkreis, welcher sich als Ort der Fluchtpunkte solcher Geraden ergibt, die den nämlichen Neigungswinkel mit der Bildebene einschliessen.“

Der Kreis K_α heisst der dem Neigungswinkel α entsprechende *„Fluchtkreis“* oder *„Neigungskreis“*.

Für Ebenen, welche mit der Bildebene den Winkel von 45° einschliessen, fällt der Fluchtkreis mit dem Distanzkreise zusammen, da in diesem Falle $\operatorname{ctg} \alpha = 1$, also $r = d$ ist.

§ 9.

Darstellung und Bestimmung eines Punktes mittels einer durch denselben geführten Hilfsgeraden.

Es sei P [Fig. 9, Taf. I] ein Punkt im Raume und L irgend eine denselben enthaltende Gerade; ferner seien d der Bildflächdurchstosspunkt und v der Fluchtpunkt dieser Geraden. Da die Centralprojektion l der Geraden L der geometrische Ort der Centralprojektionen aller Punkte von L ist, so ist klar, dass die Centralprojektion p des Punktes P in der Centralprojektion l der Geraden L liegen muss.

Es ist nun leicht darzuthun, dass durch p und die Hauptpunkte d und v die Lage des Punktes P vollkommen bestimmt ist; denn der die Centralprojektion p liefernde Punkt P muss sowohl in dem durch p und (C) geführten Projektionsstrahle, als auch in der durch d und v bestimmten Geraden L, also im Schnitte beider liegen.

Ein Punkt im Raume ist demnach centralprojektivisch dargestellt und bestimmt, wenn ausser seiner Centralprojektion noch die Centralprojektion (d. i. die Hauptpunkte **d** und **v**) irgend einer durch ihn geführten Hilfsgeraden als gegeben vorliegt.

Eine solche Hilfsgerade, welche zur centralprojektivischen Darstellung eines Raumpunktes dient, wird ein *„Träger“* dieses Punktes genannt.

Wählt man als Träger für einen Punkt die durch ihn senkrecht zur Bildebene geführte Gerade, deren Fluchtpunkt bekanntlich mit dem Hauptpunkte **A** zusammenfällt, so wird der Durchstosspunkt **d** dieser Geraden gleichzeitig die orthogonale Projektion des Raumpunktes **P** auf die Bildebene vorstellen.

Es folgt also, dass ein Punkt im Raume speziell auch durch seine centrale und seine orthogonale Projektion auf die Bildebene gegeben ist. Selbstverständlich müssen diese beiden Projektionen stets in einer durch den Hauptpunkt gehenden Geraden liegen.

§ 10.

Die Parallelebenen zur Bildebene, und die Centralprojektionen verschiedener Punkte einer und derselben Geraden.

Sei wieder **BE** [Fig. 10, Taf. I] die Bildebene, (**C**) das Projektionscentrum, **A** der Hauptpunkt.

Denken wir uns durch (**C**) eine Ebene PE_1 parallel zur Bildebene gelegt, und weiter eine zweite zur Bildebene parallele Ebene PE_2 so geführt, dass dieselbe mit PE_1 symmetrisch gegen die Bildebene **BE**, d. h. ebenso weit hinter der Bildebene, als PE_1 vor der Bildebene, liegt.

Die Ebene PE_1 bezeichnen wir als die *„vordere“* oder *„erste Parallelebene“* oder *„Spurebene“* und die Ebene PE_2 als die *„rückwärtige“* oder *„zweite Parallelebene“* oder *„zweite Spurebene“*.

Um die Bedeutung dieser Parallelebenen kennen zu lernen, stellen wir irgend eine Gerade **L** centralprojektivisch dar. Diese Gerade **L** treffe die Bildebene **BE** in ihrem Durchstosspunkte **d** und die beiden Parallelebenen PE_1 und PE_2 beziehungsweise in den Punkten **U** und **M**, wobei, wie von selbst einleuchtend, $dU = dM$ ist. Ferner sei **Cv** der Fluchtstrahl der Geraden **L**, **v** der entsprechende Fluchtpunkt, d. i. das Bild des unendlich fernen Punktes der hinter die Bildebene sich erstreckenden Geraden, und mithin

die Verbindungsgerade **l** von **d** und **v** die Centralprojektion der Geraden **L**.

Die Gerade **L** und der Fluchtstrahl **Cv** sind selbstverständlich zu einander parallel, und die durch **L** und **Cv** gelegte centralprojizierende Ebene schneidet die beiden parallelen Ebenen **BE** und $\mathbf{PE}_1$ in den parallelen Geraden **l** = **dv** und **CU**. Hieraus folgt, dass **CvdU** ein Parallelogramm, und mithin **CU** = **dv**, **Cv** = **dU** ist.

Die Strecke **dv** der Centralprojektion **l**, welche von den Hauptpunkten **d** und **v** begrenzt wird, heisst die *„Bildlänge“* der Geraden **L**, und der Punkt **U**, in welchem **L** die Ebene $\mathbf{PE}_1$ trifft, der *„Spurpunkt“* oder der *„zweite Gegenpunkt“* der Geraden **L**.

Da, wie oben gezeigt wurde, **CU** stets parallel und gleich **dv** ist, so lassen sich unmittelbar folgende Eigenschaften aussprechen:

„Zwei gerade Linien, welche entweder einen gemeinschaftlichen Spurpunkt besitzen, oder deren Spurpunkte symmetrisch gegen das Projektionscentrum liegen, besitzen parallele Bilder und gleiche Bildlängen. Im ersteren Falle sind die Bildlängen gleichsinnig gerichtet, d. h. die Verbindungsgerade der Durchstosspunkte ist parallel zu jener der Fluchtpunkte; im zweiten Falle sind die Bildlängen entgegengesetzt gerichtet.“

„Die Bildlänge einer Geraden ist stets gleich der Entfernung ihres Spurpunktes von dem Projektionscentrum. Gerade Linien, deren Spurpunkte auf der Peripherie eines Kreises (Spurkreis) liegen, dessen Mittelpunkt das Projektionscentrum ist, besitzen sämtlich Bildlängen, welche dem Radius jenes Kreises gleich sind.“

Weitere Eigenschaften ergeben sich aus der Betrachtung der einzelnen Punkte von **L** und ihrer Centralprojektionen.

Ein besonders ausgezeichneter Punkt ist in dieser Beziehung der Spurpunkt **U** der Geraden **L**. Nachdem nämlich der dem Punkte **U** entsprechende Projektionsstrahl **CU** parallel zur Centralprojektion **l** ist, so trifft er die letztere erst in unendlicher Entfernung, d. h. *die Centralprojektion* $\mathbf{U}_\infty$ *des Spurpunktes einer Geraden ist der unendlich ferne Punkt der Centralprojektion dieser Geraden.*

Ein weiterer charakteristischer Punkt der Geraden **L**, dessen Centralprojektion gleichfalls eine gewisse charakteristische Lage auf **l** besitzt, ist der Schnittpunkt **M** der Geraden mit der rückwärtigen Parallelebene $\mathbf{PE}_2$. Seine Centralprojektion **m** erhalten wir bekanntlich im Schnitte von **CM** und **l**. Nachdem **dU** = **Cv** und **dU** = **dM**, so ist auch **dM** = **Cv** und die Dreiecke **Cvm** und **Mdm** sind deshalb kongruent, woraus folgt, dass **vm** = **dm** sei,

d. h. *die Centralprojektion* **m** *des Punktes* **M** *in welchem eine Gerade* **L** *die rückwärtige Parallel- oder Spurebene* $\mathbf{PE_2}$ *schneidet, halbiert die Bildlänge* **dv** *dieser Geraden.*

Die ausgezeichneten Punkte der Centralprojektion einer Geraden bieten überdies auch ein Hilfsmittel zur Orientierung über die Lage anderer durch ihre Centralprojektionen gegebenen Punkte dieser Geraden.

Durch blosse Anschauung ergeben sich weiter folgende Beziehungen. Jedem Punkte $\mathbf{A_1}$ der Geraden **L**, welcher sich hinter der Bildebene befindet, entspricht eine Centralprojektion $\mathbf{a_1}$, welche zwischen dem Durchstosspunkt **d** und dem Fluchtpunkt **v** der Geraden **L** liegt. Je nachdem $\mathbf{A_1}$ zwischen der Bildebene **BE** und der rückwärtigen Parallelebene $\mathbf{PE_2}$ oder aber hinter der letzteren liegt, wird seine Centralprojektion $\mathbf{a_1}$ dem Durchstosspunkte **d** oder aber dem Fluchtpunkte **v** näher liegen.

Jeder Punkt $\mathbf{A_2}$ der Geraden **L**, welcher sich zwischen der Bildebene **BE** und der vorderen Parallelebene $\mathbf{PE_1}$ befindet, hat seine Centralprojektion $\mathbf{a_2}$ ausserhalb **dv** und zwar auf der Seite des Durchstosspunktes **d**.

Endlich liegen die Centralprojektionen $\mathbf{a_3}$ aller Punkte $\mathbf{A_3}$ von **L**, welche sich vor der ersten Parallelebene oder der vorderen Spurebene $\mathbf{PE_1}$ befinden, ausserhalb der Strecke **dv** und zwar auf der Seite des Fluchtpunktes **v**.

§ 11.

Die Beziehung einer Ebene gegen die beiden Parallelebenen.

Sei wieder **BE** [Fig. 11, Taf. I] die Bildebene, $\mathbf{PE_1}$ die erste und $\mathbf{PE_2}$ die zweite Parallelebene. Ferner sei **E** eine beliebige gegen die Bildebene geneigte Ebene und stelle $\mathbf{E_b}$ deren Bildflächtrace vor, während **VE** die entsprechende Fluchtebene und $\mathbf{E_v}$ die Fluchttrace derselben repräsentiere. Ausserdem schneidet die Fluchtebene **VE** die vordere Spurebene $\mathbf{PE_1}$ in einer durch das Projektionscentrum **C** gehenden Geraden $\mathbf{E_c}$, während die Ebene **E** selbst die vordere Spurebene in einer Geraden $\mathbf{E_s}$ trifft, welche man die *„Spurgerade“* oder auch die *„zweite Gegenaxe“* der Ebene **E** nennt.

Weiter wird auch die rückwärtige Parallelebene $\mathbf{PE_2}$ von der Ebene **E** in einer Geraden $\mathbf{E_\mu}$ geschnitten, welcher Schnittgeraden wir jedoch für den Augenblick keine Aufmerksamkeit zuwenden wollen.

Die beiden Paare **E** und **VE**; **BE** und PE_1 paralleler Ebenen bilden ein parallelopipedisches Prisma, dessen vier Kanten die E_b, E_v, E_c und E_s sind. Wie bei jedem derartigen Prisma, so ist auch hier der Abstand der Kanten E_b und E_s gleich dem Abstand der Kanten E_v und E_c, und der Abstand der Kanten E_v und E_b gleich dem Abstande der Kanten E_c und E_s, oder, da E_c das Projektionscentrum **C** enthält, gleich dem Abstande des letzteren von der Spurlinie E_s.

Den Abstand der beiden Tracen E_v und E_b einer Ebene pflegt man die *„Bildbreite“* dieser Ebene zu nennen.

Gleichzeitig ist zu ersehen, dass die Bildflächtrace E_b auf die Fluchttrace E_v in demselben Sinne folgt, wie die Spurtrace E_s auf die Gerade E_c oder auf das Projektionscentrum **C**. Es ergeben sich mithin nachstehende, aus den eben gefundenen Eigenschaften unmittelbar folgende Sätze:

„Die Bildbreite einer Ebene ist gleich dem Abstand des Projektionscentrums von der Spurgeraden dieser Ebene.

Zwei Ebenen besitzen parallele Tracen und gleiche Bildbreiten, sobald ihre Spurgeraden entweder zusammenfallen oder symmetrisch in bezug auf das Projektionscentrum als Symmetriepunkt liegen. Im ersteren Falle folgen Bildflächtrace und Fluchttrace beider Ebenen in gleichem, im zweiten Falle dagegen in entgegengesetztem Sinne aufeinander.

Sämtliche Ebenen, deren Spurgeraden einen und denselben Kreis mit dem Projektionscentrum als Mittelpunkt berühren, besitzen Bildbreiten, welche dem Radius dieses Kreises gleich sind.“

Durch blosse Anschauung findet man auch weiter ohne jedwede Schwierigkeit, dass die Centralprojektion eines der Ebene **E** angehörenden Punktes zwischen den Tracen E_v und E_b oder ausserhalb derselben auf der Seite von E_b, oder endlich ausserhalb und auf der Seite von E_v liegt, je nachdem der Punkt selbst sich entweder hinter der Bildebene, oder zwischen der Bildebene und der vorderen Parallelebene, oder endlich vor der letzteren befindet.

II. Kapitel.

Die fundamentalsten Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, und hierauf bezügliche Konstruktionen.

§ 12.

Centralprojektivisches Kriterium für die Lage einer Geraden in einer Ebene.

In dem Vorhergegangenen wurde gezeigt, dass eine Gerade durch den „Durchstosspunkt und Fluchtpunkt“, eine Ebene durch die „Bildflächtrace und Fluchttrace“, und ein Punkt durch eine ihm als „Träger“ unterlegte Gerade und durch seine „Centralprojektion“ vollständig gegeben ist.

Unsere nächste Aufgabe besteht nun darin, zu untersuchen, welche Beziehungen zwischen den Elementen, welche Punkt, Gerade und Ebene bestimmen, herrschen, sobald unter den letzteren selbst irgend eine gegenseitige Beziehung stattfindet.

Als einfachster Fall ist hier der anzusehen, wenn eine centralprojektivisch durch „Durchstosspunkt und Fluchtpunkt“ dargestellte Gerade **L** in einer gegebenen, durch „Bildflächtrace und Fluchttrace“ dargestellten Ebene **E** liegen soll.

Die Bildflächtrace E_b der Ebene **E** [Fig. 12, Taf. I] ist der Ort jener Punkte, welche der Ebene **E** und der Bildebene gemeinschaftlich sind. Die Gerade **L** soll in der Ebene **E** liegen; ihr Durchstosspunkt **d** muss sich daher, als ein der Ebene **E** und der Bildebene angehörender Punkt, in der Bildflächtrace E_b befinden.

Andrerseits liegt auch der unendlich ferne Punkt der Geraden **L** in der unendlich fernen Geraden der Ebene **E**; es ist mithin notwendigerweise die Centralprojektion dieses unendlich fernen Punktes, d. i. der Fluchtpunkt **v** der Geraden **L** ein Punkt der Centralprojektion der unendlich fernen Geraden der Ebene **E**, oder mit anderen Worten ein Punkt der Fluchttrace E_v dieser Ebene.

Dieses Kriterium ergibt unmittelbar die Lösung der folgenden fundamentalen Aufgaben.

§ 13.

1. Aufgabe: **Durch eine Gerade ist eine Ebene zu legen.**

Es seien wieder **d** und **v** [Fig. 12, Taf. I] beziehungsweise der Durchstosspunkt und der Fluchtpunkt der gegebenen Geraden. Da für die Lage der zu führenden Ebene keine weiteren Bedingungen vorliegen, wird man bloss durch **d** eine beliebige Gerade E_b zu ziehen haben, um durch dieselbe die Bildflächtrace einer der möglichen durch **dv** gehenden Ebenen repräsentiert zu erhalten. Führt man weiter durch **v** eine zu E_b parallele Gerade E_v so wird schon durch die letztere die zugehörige Fluchttrace einer Ebene **E** und daher durch E_b und E_v eine der verlangten Ebenen dargestellt erscheinen.

Wie selbstverständlich, ist diese Aufgabe in der gestellten Form unbestimmt, da die Wahl der Richtung der Tracen vollkommen frei steht; es gibt somit diesfalls unendlich viele Lösungen d. i. unendlich viele Ebenen, die sich durch **dv** legen lassen und der Bedingung der Aufgabe genügen. Bestimmt ist hingegen die folgende mit der soeben besprochenen, verwandte Aufgabe.

§ 14.

2. Aufgabe: **Es ist die orthogonale Projektion einer gegebenen Geraden auf die Bildebene zu bestimmen.**

Sei wieder **dv** [Fig. 12, Taf. I] die gegebene Gerade und **A** der Hauptpunkt. Die orthogonale Projektion der Geraden **dv** auf die Bildebene ist der Schnitt der letzteren mit der durch **dv** senkrecht zur Bildebene gelegten Ebene.

Nach früherem (§ 8) wissen wir bereits, dass die Fluchttrace einer zur Bildebene senkrechten Ebene, oder mit anderen Worten: die Fluchttrace einer *„bildflächprojizierenden Ebene“* durch den Hauptpunkt geht.

Soll nun die betreffende Ebene auch die Gerade **dv** enthalten, so muss ihre Fluchttrace nebstbei durch den gegebenen Fluchtpunkt **v** gehen, und erscheint somit als Verbindungsgerade P_v der Punkte **A** und **v** dargestellt.

Die Bildflächtrace P_b derselben, welche gleichzeitig auch als Schnitt der durch **dv** gelegten bildflächprojizierenden Ebene mit der Bildebene, die verlangte Orthogonalprojektion I_p der Geraden **dv** darstellt resp. enthält, ist die durch **d** zu P_v geführte Parallele P_b.

§ 15.

Kriterium für die Parallellage einer Geraden und einer Ebene.

Seien E_v und E_b die Fluchttrace resp. Bildflächtrace irgend einer Ebene **E**.

Eine Gerade **l** wird zu der Ebene **E** parallel sein, wenn man in **E** eine (eigentlich unenendlich viele) Gerade **l'** ziehen kann, die zu **l** parallel ist. Nun muss einerseits, wenn **l'** in der Ebene **E** liegt, der Fluchtpunkt **v** von **l'** in der Fluchttrace von **E** d. i. in E_v liegen, andrerseits muss dieser Fluchtpunkt **v** aber auch, da **l'** zu **l** parallel sein soll, mit dem Fluchtpunkte von **l** zusammenfallen.

Hieraus ergibt sich unmittelbar das Kennzeichen für die Parallelität von **l** und **E**. Es wird nämlich der Fluchtpunkt von **l** in der Fluchttrace E_v von **E** liegen müssen. Die Lage des Durchstosspunktes von **l** in bezug auf die Bildflächtrace E_b ist selbstverständlich gleichgültig resp. von E_b unabhängig.

§ 16.

3. Aufgabe: Durch eine gegebene Gerade ist eine Ebene zu legen, welche zu einer zweiten gegebenen Geraden parallel ist.

Die Ebene **E** [Fig. 13, Taf. I] soll durch die Gerade l_d^v parallel zur Geraden $K_{d_1}^{v_1}$ gelegt werden.

Die Fluchttrace E_v der zu bestimmenden Ebene muss (den in § 12 und 15 aufgestellten Kriterien gemäss) offenbar durch die beiden Fluchtpunkte **v** und v_1 gehen, und wird sich mithin als Verbindungsgerade vv_1 derselben darstellen.

Die Bildflächtrace E_b geht (nach § 12) durch **d** und ist parallel zu E_v oder vv_1, womit die Aufgabe gelöst erscheint.

§ 17.

4. Aufgabe: Durch eine Gerade ist eine Ebene zu legen, welche mit der Bildebene einen gegebenen Winkel einschliesst.

Sei **dv** [Fig. 14, Taf. I] die gegebene Gerade, **A** der Hauptpunkt und **AC** die Distanz. Die zu suchende Ebene **E** soll durch **dv** gehen und mit der Bildebene den gegebenen Winkel α einschliessen.

Die Fluchttrace E_v der zu bestimmenden Ebene **E** ist daher zwei Bedingungen unterworfen. Dieselbe muss nämlich einerseits durch den Fluchtpunkt **v** der Geraden l_d^v gehen (§ 12) und andererseits (nach § 8) einen Kreis K_α berühren, welcher den dem Winkel α entsprechenden Fluchtkreis repräsentiert, d. h. als Tangente an jenen Kreis erscheinen, welcher den Hauptpunkt **A** zum Mittelpunkt hat und einen Radius $A\varphi$ besitzt, welcher sich als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes $AC\varphi$ ergibt, in welchem die andere Kathete der Distanz **AC**, und der derselben gegenüberliegende Winkel $A\varphi C$ dem gegebenen Winkel α gleich ist.

An diesen Kreis lassen sich von **v** aus zwei Tangenten E_v und E_v' ziehen, deren jede die Fluchttrace einer der Aufgabe entsprechenden Ebene darstellt. Die zugehörigen Bildflächtracen E_b resp. E_b' erhält man einfach als die Parallelen durch **d** zu E_v resp. E_v'. Es lässt also die Aufgabe im vorliegenden Falle zwei Lösungen zu.

Wie leicht einzusehen ist die gestellte Aufgabe nicht unter allen Umständen eine mögliche.

Fällt nämlich der Fluchtpunkt **v** von **l** innerhalb des besagten Fluchtkreises, so lässt sich keine Tangente an denselben führen, folglich auch keine den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Fluchttrace, resp. Ebene finden. Fällt **v** in die Peripherie des genannten Kreises so gibt es auch nur eine der Aufgabe genügende Ebene. Kommt **v**, wie in unserem Beispiele, ausserhalb des bezeichneten Fluchtkreises zu liegen, so ergeben sich zwei Ebenen.

Im ersteren Falle ist der Neigungswinkel α der durch l_d^v zu führenden Ebene kleiner als jener ω der Geraden **l** gegen die Bildebene; im zweiten Falle ist $\measuredangle \alpha = \measuredangle \omega$; im dritten Falle dagegen ist $\measuredangle \alpha > \measuredangle \omega$. Es darf also, falls die gestellte Aufgabe möglich sein soll, der Neigungswinkel α der durch **l** zu legenden Ebene gegen die Bildebene **BE** nicht kleiner sein, als jener der gegebenen Geraden **l** gegen dieselbe Ebene **BE**.

§ 18.

5. Aufgabe: **In einer gegebenen Ebene ist durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit der Bildebene einen gegebenen Winkel einschliesst.**

Sei $E_v E_b$ [Fig. 15, Taf. I] die gegebene Ebene, **p** die Centralprojektion desjenigen Punktes in derselben, durch welchen die

verlangte Gerade geführt werden soll; ferner sei **A** der Hauptpunkt, **AC** die Distanz und α der gegebene Winkel.

Der Fluchtpunkt der zu bestimmenden Geraden muss (nach § 12) einerseits in der Fluchttrace E_v, andererseits aber auch (nach § 6) auf dem, dem Winkel α entsprechenden Fluchtkreise K_α liegen.

Konstruiert man daher den Kreis K_α in derselben Weise wie in der vorhergehenden Aufgabe, vermittels des rechtwinkligen Dreieckes **ACK**, so ergeben sich in seinem Schnitte mit E_v zwei Punkte **v** und v_1, von welchen jeder als Fluchtpunkt einer der Aufgabe entsprechenden Geraden gelten kann. Die Centralprojektionen dieser Geraden ergeben sich sodann als die Verbindungsgeraden **vp** und $v_1 p$, deren zugehörige Durchstosspunkte **d** und d_1 im Schnitte von E_b mit **vp** resp. $v_1 p$ erhalten werden.

Je nachdem die Entfernung der Fluchttrace E_v vom Hauptpunkte **A** kleiner oder grösser ist als der Radius des Kreises K_α, d. h. je nachdem (im Sinne der §§ 6 und 8) der Neigungswinkel der Ebene **E** gegen die Bildebene grösser oder kleiner ist als der Winkel α, gibt es entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Punkte **v** und v_1, mithin auch zwei reelle oder imaginäre der Aufgabe entsprechende Geraden.

Wenn insbesondere die Bildflächneigung der Ebene **E** dem Winkel α gleich ist, so berührt der Fluchtkreis K_α die Fluchttrace E_v, und die beiden der Aufgabe entsprechenden Geraden fallen in eine einzige zusammen, deren Fluchtpunkt der Berührungspunkt ist.

§ 19.

Kriterium für zwei sich schneidende Geraden.

Wenn zwei Geraden **dv** und $d_1 v_1$ sich in einem Punkte **p** schneiden, so kann bekanntlich durch dieselben eine Ebene gelegt werden. Nach § 12 muss die Fluchttrace E_v dieser Ebene die beiden Fluchtpunkte **v** und v_1 enthalten, mithin durch die Verbindungsgerade E_v der letzteren dargestellt sein, während man in gleicher Weise die Bildflächtrace E_b als die Verbindungsgerade der Durchstosspunkte **d** und d_1 erhalten wird. Nachdem aber die beiden Tracen einer Ebene (§ 7) notwendig zu einander parallel sein müssen, so folgt, dass zwei centralprojektivisch dargestellte Geraden **vd** und $v_1 d_1$ sich nur dann schneiden, wenn die Verbindungsgerade ihrer Durchstosspunkte **d**

und d_1 zu der Verbindungsgsgeraden ihrer Fluchtpunkte v und v_1 parallel ist. Diese Verbindungsgeraden $dd_1 = E_b$ und $vv_1 = E_v$ repräsentieren sodann beziehungsweise die Bildfläch- und Fluchttrace der durch die beiden schneidenden Geraden gelegten Ebene.

Hierbei kann nicht unerwähnt gelassen werden, dass sich der Schnittpunkt p der centralprojektivisch gegebenen Geraden $l = dv$ und $l_1 = d_1 v_1$ entweder a) zwischen der Bildfläch- und Fluchttrace, b) in der Bildflächtrace $dd = E_b$, c) in der Fluchttrace $vv_1 = E_v$, d) ausserhalb der genannten Tracen auf der Seite der Bildflächtrace E_b, e) ausserhalb E_v und E_b auf der Seite der Fluchttrace E_v ergeben könne, oder f) in unendliche Ferne falle d. h. dass die centralprojektivischen Bilder $l = vd$ und $l_1 = v_1 d_1$ zu einander parallel sind und, als von E_v und E_b eingeschlossen, gleiche Bildlängen besitzen.

Auf Grund des Vorausgeschickten ist an und für sich klar, dass im ersten Falle (a) der Schnittpunkt P der Geraden L und L_1 im Raume hinter der Bildebene in endlicher Entfernung liege; dass im zweiten Falle (b) der Schnitt P von L und L_1 in der Bildebene erfolge; dass im dritten Falle (c) der Schnittpunkt P im Unendlichen zu suchen sei, dass also L zu L_1 parallel laufe; dass ferner im vierten Falle (d) der den beiden Geraden L und L_1 gemeinschaftliche Punkt P zwischen der Bildebene BE und der vorderen Spurebene PE_1 liege; dass weiter im fünften Falle (e) der Schnittpunkt P von L und L_1 vor der Bildebene und vor der vorderen Spurebene PE_1 sich ergebe und dass endlich im sechsten Falle (f) der Schnitt P von L und L_1 in der vorderen Spurebene PE_1 selbst erfolge.

Sind nämlich l, l_1, l_2 . . . die untereinander parallelen Centralprojektionen von den Geraden L, L_1, L_2 . . . im Raume; v, v_1, v_2 . . . die Fluchtpunkte und d, d_1, d_2 . . . die Durchstosspunkte derselben; sind ferner d, d_1, d_2 . . . und v, v_1, v_2 . . . zwischen zwei zu einander parallelen Geraden E_b und E_v enthalten, so werden die diesen Bildern vd, $v_1 d_1$, $v_2 d_2$ . . . entsprechenden Geraden im Raume selbstverständlich nicht auch parallel sein können, weil sie verschiedene Fluchtpunkte haben; dieselben müssen sich daher, da sie sämtlich in einer und derselben Ebene E liegen, schneiden. Es fragt sich nun um den Ort des Schnittpunktes der Geraden L, L_1, L_2 . . . .

Denken wir uns zu diesem Behufe durch das Centrum C und

durch die centralprojektivischen Bilder I, I_1, I_2 . . . der Geraden L, L_1, L_2 . . . im Raume, welch erstere als die Centralprojektionen der letzteren in der Bildebene liegen, Ebenen gelegt, so werden sich diese offenbar in einer Geraden G schneiden, welche durch das Centrum C geht und zu den Bildern I, I_1, I_2 . . . , also auch zur Bildebene parallel ist. In dieser Geraden G, welche somit der vorderen Spurebene angehört, muss demnach der gemeinschaftliche Schnittpunkt der den Bildern I, I_1, I_2 . . . entsprechenden Geraden L, L_1, L_2 . . . liegen. Der besagte Schnittpunkt befindet sich aber auch in der den gegebenen Geraden L, L_1, L_2 . . . entsprechenden Ebene E, folglich im Schnitte der letzteren mit der in der vorderen Spurebene PE_1 liegenden Geraden G. Hieraus folgt der Satz:

„Geraden, die in einer und derselben Ebene $E_b E_v$ liegen und parallele centrale Projektionen haben ohne jedoch zur Bildebene selbst parallel zu sein, schneiden sich in einem Punkte der vorderen Spurebene. Die Entfernung dieses Schnittpunktes von der Bildebene ist somit der Distanz gleich.“

§ 20.

6. Aufgabe: **Durch einen gegebenen Punkt ist eine Gerade parallel zu einer gegebenen Geraden zu ziehen.**

Der gegebene Punkt sei durch seine Centralprojektion p auf dem Träger $\delta\varphi$ [Fig. 16, Taf. I] dargestellt. Durch denselben soll eine Gerade parallel zu der gegebenen Geraden dv gezogen werden.

Vor allem ist bekannt, dass parallele Geraden einen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt besitzen, dass also v gleichzeitig auch der Fluchtpunkt der zu suchenden Geraden sein wird. Die Centralprojektion der letzteren ist mithin die Verbindungsgerade vp. Behufs ihrer centralprojektivischen Bestimmung erübrigt nur noch die Feststellung ihres Durchstosspunktes. Zu diesem Zwecke berücksichtigen wir, dass die gesuchte Gerade und der Träger $\delta\varphi$ den Punkt p gemein haben und daher, als zwei in p sich schneidende Geraden, in einer und derselben Ebene liegen, deren Fluchttrace (nach § 19) die Verbindungsgerade h_v der Fluchtpunkte v und φ, und deren Bildflächtrace die Parallele h_b durch δ zu h_v ist. Im Schnitte d_1 von h_b mit der Geraden vp erhalten wir den Durchstosspunkt der letzteren.

§ 21.

7. Aufgabe: **Es ist die orthogonale Bildflächprojektion eines centralprojektivisch gegebenen Punktes zu bestimmen.**

Die gestellte Aufgabe ist mit der vorhergehenden übereinstimmend, nur tritt an die Stelle des im vorigen Falle allgemein liegenden Fluchtpunktes **v** insbesondere der Hauptpunkt **A**, da dieser (§ 6) den Fluchtpunkt aller zur Bildebene senkrechten Geraden repräsentiert.

Ersetzt man daher den Träger des gegebenen Punktes **p** durch einen zur Bildebene senkrechten, d. h. durch einen solchen, dessen Fluchtpunkt der Hauptpunkt **A** ist, so wird der Bildflächdurchstosspunkt **p'** dieses neuen Trägers **Ap** die gesuchte Orthogonalprojektion vorstellen.

§ 22.

8. Aufgabe: **Durch einen Punkt ist eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene zu legen.**

Der gegebene Punkt sei **p** [Fig. 17, Taf. I]; $\delta\varphi$ sei dessen Träger, und $\mathbf{e_v e_b}$ die gegebene Ebene.

Da, wie wir bereits wissen, parallele Ebenen eine gemeinschaftliche Fluchttrace besitzen, so wird im vorliegenden Falle die Fluchttrace $\mathbf{e_v}$ der gegebenen Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ zugleich die Fluchttrace $\mathbf{E_v}$ der zu konstruierenden Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ repräsentieren.

Die Bildflächtrace $\mathbf{E_b}$ der letzteren wird, da sie parallel zu $\mathbf{E_v}$ sein muss, bestimmt sein, sobald wir einen Punkt derselben kennen. Ein solcher Punkt kann leicht, wie folgt, gefunden werden. Wie vorausgesetzt, soll die zu suchende Ebene den Punkt **p** enthalten. Verbinden wir demnach **p** mit einem beliebigen Punkte **v** der Fluchttrace $\mathbf{E_v}$, so erhalten wir die Centralprojektion einer in der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ liegenden Geraden. Diese Gerade **l** und der Träger $\delta\varphi$ haben aber den Punkt **p** gemein; wir können sonach den Durchstosspunkt **d** der ersteren (wie in Aufgabe 6) mittels der durch **l** und $\delta\varphi$ gelegten Hilfsebene $\mathbf{h_v h_b}$ bestimmen. Die Bildflächtrace $\mathbf{E_b}$ der gesuchten Ebene ist nun die durch **d** parallel zu $\mathbf{E_v}$ geführte Gerade.

§ 23.

9. Aufgabe: **Durch einen Punkt und eine Gerade ist eine Ebene zu legen.**

Der Punkt **p** ist auf dem Träger $\delta\varphi$ [Fig. 18, Taf. I] gegeben; die gegebene Gerade sei **dv**.

Die Bildfläch- und die Fluchttrace der zu bestimmenden Ebene **E** gehen durch **d** resp. **v**, und werden sofort vollständig bekannt sein, sobald noch ein zweiter Punkt $\mathbf{d}_1$ oder $\mathbf{v}_1$ der bezüglichen Tracen angegeben werden kann. Ein solcher Punkt wird leicht folgendermassen erhalten.

Da die Ebene **E** ausser der Geraden **dv** auch den Punkt **p** enthalten soll, so wird dieselbe auch alle jene Geraden enthalten, welche den Punkt **p** mit den einzelnen Punkten der Geraden **dv** verbinden.

Anstatt aber eine beliebige dieser Geraden zur Konstruktion zu verwenden, werden wir, um die Ausführung möglichst einfach zu gestalten, eine besondere Hilfsgerade benützen. Hierzu eignen sich in gleicher Weise die Gerade, welche durch **p** parallel zu **dv** läuft und jene Gerade, welche **d** mit **p** verbindet.

Wir wollen von der ersteren Gebrauch machen, d. h. wir werden (wie in Aufgabe 6 gezeigt wurde) den Träger $\delta\varphi$ durch die zu **dv** parallele Gerade $\mathbf{d}_1\mathbf{v}$ ersetzen.

Die durch **dv** und $\mathbf{d}_1\mathbf{v}$ gelegte Ebene $\mathbf{E}_v\mathbf{E}_b$ enthält sodann selbstverständlich auch den gegebenen Punkt **p** und repräsentiert somit die gesuchte Ebene.

§ 24.

10. Aufgabe: **Zwei Punkte sind durch ihre Centralprojektionen auf zwei Trägern gegeben; es soll die Verbindungsgerade derselben konstruiert werden.**

Seien $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ [Fig. 19, Taf. I] die Centralprojektionen der beiden gegebenen Punkte und $\delta_1\varphi_1$ resp. $\delta_2\varphi_2$ deren Träger.

Die Centralprojektion der zu suchenden Geraden ergibt sich unmittelbar als die Verbindungsgerade **l** der Punkte $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$, und es erübrigt, behufs centralprojektivischer Darstellung von **l**, noch den Durchstosspunkt **d** und den Fluchtpunkt **v** dieser Geraden **l** zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke wird es bloss darauf ankommen, irgend eine durch die Gerade **l** gehende Ebene zu konstruieren. Als solche

kann offenbar jene Ebene, welche den Punkt p_1 und den Träger $\delta_2 \varphi_2$, oder auch die Ebene, welche den Punkt p_2 und den Träger $\delta_1 \varphi_1$ enthält, gelten. Wählen wir die letztere Ebene — $e_v e_b$ —, so wird dieselbe (nach Aufgabe 9) konstruiert, indem man zuerst den Träger $\delta_2 \varphi_2$ des Punktes p_2 durch den zu $\delta_1 \varphi_1$ parallelen Träger $\delta'_1 \varphi_1$ ersetzt, und hierauf durch $\delta'_1 \varphi_1$ und $\delta_1 \varphi_1$ die Ebene $e_v e_b$ legt.

Diese Ebene enthält die beiden Punkte p_1 und p_2, mithin auch deren Verbindungsgerade l, so dass sich die Hauptpunkte d und v der letzteren im Schnitte mit den Tracen e_b resp. e_v ergeben.

§ 25.

11. Aufgabe: **Durch drei Punkte, welche auf verschiedenen Trägern liegen, ist eine Ebene zu legen.**

Seien p_1, p_2 und p_3 [Fig. 20, Taf. I] die drei gegebenen Punkte, und $\delta_1 \varphi_1$, $\delta_2 \varphi_2$, $\delta_3 \varphi_3$ deren Träger.

Die gesuchte Ebene wird offenbar auch die drei Geraden enthalten, welche die gegebenen drei Punkte paarweise verbinden. Dies zu Grunde gelegt, ist auch das Mittel für die Konstruktion beziehungsweise Darstellung der verlangten Ebene gefunden.

Wir werden nämlich zuerst die Verbindungsgerade irgend zweier der drei gegebenen Punkte, beispielsweise etwa die Verbindungsgerade dv von p_1 und p_2 (nach der in Aufgabe 10 auseinander gesetzten Methode) ermitteln, und hierauf durch diese Gerade dv und durch den Punkt p_3 (Aufgabe 9) die Ebene $E_v E_b$ führen.

§ 26.

12. Aufgabe: **Es ist die Schnittgerade zweier gegebenen Ebenen zu konstruieren.**

Seien $E_v^1 E_b^1$ und $E_v^2 E_b^2$ [Fig. 21, Taf. I] die beiden gegebenen Ebenen. Die zu suchende Schnittgerade Δ ist jene, welche den beiden gegebenen Ebenen gleichzeitig angehört. Der Fluchtpunkt derselben muss daher sowohl in der Fluchttrace E_v^1 der einen Ebene, als auch in der Fluchttrace E_v^2 der anderen Ebene liegen, kann mithin nur der Schnittpunkt v der beiden letzteren sein. Ebenso muss der Durchstosspunkt der Schnittgeraden, als beiden Ebenen gemeinschaftlich, auch beiden Bildflächtracen angehören, kann also nur durch den Schnittpunkt d derselben repräsentiert erscheinen. Es wird somit dv die Centralprojektion der gesuchten Schnittlinie Δ darstellen.

§ 27.

13. Aufgabe: **Es ist der Schnittpunkt einer gegebenen Geraden mit einer gegebenen Ebene zu konstruieren.**

Der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene ist offenbar jener Punkt, welcher sowohl der Geraden, als auch der Ebene gleichzeitig angehört.

Legt man demnach durch die gegebene Gerade l_d^v [Fig. 22, Taf. I] irgend eine Hilfsebene $F_v F_b$ und bestimmt ihren Durchschnitt $d_1 v_1$ mit der gegebenen Ebene $E_v E_b$, so ist klar, dass derjenige Punkt, in welchem die eben aufgefundene Schnittlinie $v_1 d_1$ die gegebene Gerade vd trifft, den verlangten Schnittpunkt p angibt; denn einerseits müssen die beiden Geraden dv und $d_1 v_1$, als in derselben Ebene $F_v F_b$ liegend, notwendig einen Punkt p gemein haben, welcher andrerseits, da $d_1 v_1$ eine Gerade der Ebene E repräsentiert, auch der gegebenen Ebene $E_v E_b$ angehört.

§ 28.

14. Aufgabe: **Durch einen Punkt ist eine Gerade zu legen, welche zwei gegebene sich nicht schneidende Geraden in je einem Punkte trifft.**

Der gegebene Punkt sei durch seine Centralprojektion p [Fig. 23, Taf. I] auf dem Träger dv dargestellt. Die beiden gegebenen Geraden seien $l_{1\,d_1}^{v_1}$ und $l_{2\,d_2}^{v_2}$.

Die zu bestimmende Gerade soll durch p gehen und die beiden Geraden $d_1 v_1$ und $d_2 v_2$ schneiden. Die zu ermittelnde Gerade wird daher notwendig in jener Ebene $e_v e_b$ liegen müssen, welche durch p und $d_1 v_1$ geht. Besagte Ebene kann auf Grund der in Aufgabe 9 durchgeführten Lösung leicht konstruiert werden. Führt man in dieser Ebene $e_v e_b$ durch den Punkt p eine ganz beliebige Gerade, so ist einleuchtend, dass dieselbe notwendig die Gerade $d_1 v_1$ in einem Punkte treffen muss. Nachdem aber die zu bestimmende in $e_v e_b$ liegende Gerade auch mit der Geraden $d_2 v_2$ einen Punkt gemein haben soll, so ist klar, dass dieser Punkt kein anderer sein kann, als der Schnittpunkt p_2 dieser Geraden $d_2 v_2$ mit der Ebene $e_v e_b$.

Bestimmen wir daher den eben genannten Schnittpunkt p_2 (wie in Aufgabe 13 gezeigt wurde) und verbinden wir denselben

mit **p**, so erhalten wir die verlangte Gerade **L**, während im Schnitte derselben mit den Tracen $\mathbf{e_v}$ und $\mathbf{e_b}$ deren Fluchtpunkt **V** und Durchstosspunkt **D** sofort gefunden werden.

§ 29.

15. Aufgabe: **Es sind drei sich nicht schneidende Geraden gegeben; man soll einzelne Lagen solcher Geraden ermitteln, welche mit jeder der drei gegebenen je einen Punkt gemein haben.**

Erste Methode. Wenn man auf einer der drei gegebenen Geraden einen beliebigen Punkt wählt und hierauf nach der vorhergehenden Aufgabe jene Gerade konstruiert, welche durch den gewählten Punkt geht und die beiden anderen gegebenen Geraden schneidet, so wird dieselbe offenbar bereits eine Lage der gesuchten Geraden vorstellen.

Durch die Wahl beliebiger anderer Punkte auf der einen oder der anderen der gegebenen Geraden kann man in gleicher Weise willkürlich viele Lagen von der Aufgabe entsprechenden Geraden bestimmen.

§ 30.

Zweite Methode. Wir legen durch eine der drei gegebenen Geraden, beispielsweise durch $\mathbf{l_1}\,^{\mathbf{v_1}}_{\mathbf{d_1}}$, [Fig. 24, Taf. I], eine beliebige Hilfsebene $\mathbf{h_v h_b}$ und bestimmen deren Schnittpunkte σ_2 und σ_3 mit den beiden anderen gegebenen Geraden $\mathbf{l}\,^{\mathbf{v_2}}_{\mathbf{d_2}}$ und $\mathbf{l}\,^{\mathbf{v_3}}_{\mathbf{d_3}}$. Die Verbindungsgerade **L** der beiden Punkte σ_2 und σ_3 schneidet nicht bloss die Geraden $\mathbf{l_2}$ und $\mathbf{l_3}$ in den bezeichneten Punkten, sondern sie schneidet auch die Gerade $\mathbf{l_1}$ in irgend einem Punkte σ_1, da **L** und $\mathbf{l_1}$ in einer und derselben Ebene $\mathbf{h_v h_b}$ liegen. Der Durchstosspunkt **D** und der Fluchtpunkt **V** von **L** ergeben sich im Schnitte der letzteren mit den Tracen $\mathbf{h_b}$ und $\mathbf{h_v}$.

Gibt man der durch $\mathbf{l}\,^{\mathbf{v_1}}_{\mathbf{d_1}}$ gelegten Hilfsebene nach und nach verschiedene Lagen, so kann man successive, durch einfache Wiederholung der eben durchgeführten Konstruktion, beliebig viele der Aufgabe entsprechende Geraden ermitteln.

§ 31.

Centralprojektivische Darstellung einer zur Bildebene parallelen Geraden und einer zur Bildebene parallelen Ebene.

Wir haben bereits an früherer Stelle (§ 6 und § 8) erwähnt, dass gerade Linien und Ebenen, welche zur Bildebene parallel sind,

ihre Hauptpunkte resp. ihre Tracen in unendlicher Entfernung haben, also nach der allgemeinen Methode nicht darstellbar sind.

Denken wir uns die Centralprojektion l einer zur Bildebene parallelen Geraden L, d. h. den Schnitt l der Bildebene mit der durch L gelegten centralprojizierenden Ebene bestimmt, so ist einleuchtend, dass l zu L selbst parallel sein muss, was übrigens direkt auch daraus hervorgeht, dass die Centralprojektion l und die Gerade L den — diesfalls unendlich fernen — Bildflächdurchstosspunkt, beziehungsweise den im Unendlichen liegenden Fluchtpunkt gemein haben.

Um daher eine zur Bildfläche parallele Gerade L centralprojektivisch eindeutig zu bestimmen, wird es genügen einen ihrer Punkte p [Fig. 25, Taf. I] durch seine Centralprojektion auf einem Träger $\delta\varphi$ anzugeben, und die durch p gehende Centralprojektion l entsprechend der Geraden L im Raume anzunehmen.

Wenn übrigens eine zur Bildebene parallele Gerade L gleichzeitig in einer gegebenen Ebene $E_v E_b$ liegt, wobei selbstverständlich sowohl die Gerade L, als auch ihre Centralprojektion l zu den Tracen dieser Ebene parallel sein müssen, so genügt die Angabe ihrer Centralprojektion l an und für sich schon vollständig zur räumlichen Festlegung derselben. Die Gerade L ergibt sich dann sofort im Schnitte der Ebene $E_v E_b$ mit der durch l gehenden centralprojizierenden Ebene.

In gleicher indirekter Weise wird eine zur Bildebene parallele Ebene dadurch dargestellt, dass man einen ihrer Punkte durch seine Centralprojektion und einen seiner Träger bestimmt.

Obwohl es zur Darstellung von zur Bildebene parallelen Geraden und Ebenen noch andere Mittel gibt, so werden sich denn doch die oben angegebenen Bestimmungsstücke, wie wir sofort sehen werden, als die einfachsten und natürlichsten herausstellen.

§ 32.

16. Aufgabe: **Durch einen gegebenen Punkt und eine zur Bildebene parallele Gerade ist eine Ebene zu legen.**

Der Punkt p [Fig. 26, Taf. I] sei durch den Träger $\delta\varphi$; die zur Bildebene parallele Gerade durch ihre Centralprojektion l und einen ihrer Punkte a auf einem Träger $\delta_1\varphi_1$ gegeben.

Zunächst bestimmt man die Verbindungsgerade der beiden Punkte **p** und **a** sowie ihren Durchstosspunkt **d** und ihren Fluchtpunkt **v**.

Da die Gerade **dv** die gegebene zur Bildebene parallele Gerade **l** im Punkte **a** schneidet, so kann durch **l** und **dv** eine Ebene $E_v E_b$ gelegt werden, welch letztere offenbar schon die der Aufgabe entsprechende Ebene sein wird, da sie nebstbei auch den gegebenen auf **dv** liegenden Punkt **p** enthält. Die Tracen E_v und E_b der besagten Ebene gehen selbstverständlich durch **v** und **d** und sind zu **l** parallel.

§ 33.

17. Aufgabe: **Es ist der Schnitt einer zur Bildebene parallelen Geraden mit einer beliebigen Ebene zu konstruieren.**

Die zur Bildebene parallele Gerade ist wieder durch ihre Centralprojektion **l** [Fig. 27, Taf. II] und einen ihrer Punkte **p** auf einem Träger $\delta\varphi$; die Ehene hingegen durch ihre beiden Tracen E_v und E_b gegeben.

Wir werden hier dieselbe Methode in Anwendung bringen, die bereits bei Lösung der allgemeinen Aufgabe (§ 27) zur Verwendung gelangte, d. h. wir werden durch die Gerade **l** irgend eine Hilfsebene legen. Der Einfachheit halber benützen wir im vorliegenden Falle jene Ebene $h_v h_b$, welche gleichzeitig den Träger $\delta\varphi$ enthält, da sich deren Tracen h_v und h_b unmittelbar als die durch φ resp. δ parallel zu **l** geführten Geraden ergeben.

Die Ebenen $h_v h_b$ und $E_v E_b$ schneiden sich in der Graden **dv**, welche ihrerseits die Gerade **l** in dem gesuchten Schnittpunkte σ trifft.

§ 34.

18. Aufgabe: **Es ist der Schnittpunkt einer Geraden mit einer zur Bildebene parallelen Ebene zu konstruieren.**

Sei **dv** [Fig. 28, Taf. II] die gegebene Gerade; die zur Bildebene parallele Ebene **E** ist durch einen ihrer Punkte **p** auf einem Träger $\delta\varphi$ dargestellt.

Wir legen vor allem auf bekannte Weise durch **dv** und den Punkt **p** die Hilfsebene $h_v h_b$. Die letztere hat mit der gegebenen Ebene **E** den Punkt **p** gemein, schneidet sie daher in einer zur Bildebene parallelen Geraden, deren Centralprojektion **l** durch **p**

parallel zu den Tracen h_v und h_b geht. Diese Schnittgerade **l** trifft endlich die gleichfalls in der Ebene $h_v h_b$ liegende Gerade **dv** in dem gesuchten Punkte σ.

§ 35.

19. Aufgabe: **Es ist die Schnittgerade einer zur Bildebene parallelen Ebene mit irgend einer anderen Ebene zu konstruieren.**

Die zur Bildebene parallele Ebene **P** möge durch den auf dem Träger δφ [Fig. 29, Taf. II] gegebenen Punkt **p** gehen, die zweite, gegen die Bildebene geneigte Ebene sei $E_v E_b$.

Der Schnitt dieser beiden Ebenen muss notwendig zu den Tracen E_v und E_b, also auch zur Bildebene selbst parallel sein; es wird mithin zum Behufe der Konstruktion des Schnittes, die Feststellung eines einzigen Punktes desselben genügen. Ein solcher Punkt kann einfach folgends erhalten werden.

Wir legen durch den Träger δφ eine beliebige Hilfsebene $h_v h_b$. Da dieselbe auch den Punkt **p** enthält, so schneidet sie die zur Bildebene parallele, durch **p** gehende Ebene **P** in einer durch **p** gehenden zur Trace h_b parallelen Geraden **l**. Ferner wird die Ebene $E_v E_b$ von der Ebene $h_v h_b$ in der Geraden **vd** geschnitten. Die beiden in der Ebene $h_v h_b$ liegenden Geraden **l** und **dv** treffen sich in einem Punkte **a**, welcher gleichzeitig den drei Ebenen **h**, **E** und **P**, folglich auch der Schnittgeraden der beiden letzteren angehört. Die Centralprojektion der gesuchten Schnittgeraden selbst ist, wie bereits vorher bemerkt wurde, jene Gerade **s**, welche durch **a** parallel zu E_b gezogen werden kann.

§ 36.

20. Aufgabe: **Es ist die Schnittgerade zweier Ebenen, deren Tracen zu einander parallel sind, zu konstruieren.**

Da sich in diesem Falle sowohl die beiden Bildflächtracen E_b^1 und E_b^2 [Fig. 30, Taf. II], als auch die beiden Fluchttracen E_v^1 und E_v^2 erst in unendlicher Entfernung schneiden, so ist einleuchtend, dass die im allgemeinen für die Schnittbestimmung gültige Methode hier nicht anwendbar ist.

Da jedoch, wie ohne weiteres ersichtlich, die Schnittgerade der Ebenen E^1 und E^2 zu deren Tracen selbst parallel sein muss,

so wird wieder die Kenntnis eines Punktes derselben hinreichen. Dieser Punkt kann folgendermassen ermittelt werden.

Wir schneiden die beiden Ebenen $E^1_v E^1_b$ und $E^2_v E^2_b$ mittels einer beliebigen Hilfsebene $h_v h_b$ in den bezüglichen Geraden $v_1 d_1$ und $v_2 d_2$. Der Punkt σ in welchem sich die letzteren begegnen, ist den drei genannten Ebenen E^1, E^2 und h gemeinsam, gehört somit auch der gesuchten Schnittgeraden an; die letztere ergibt sich nunmehr als die durch σ zu den Tracen der Ebenen E_1 und E_2 geführte Parallele **s**.

§ 37.

Die in der vorstehenden Aufgabe benützte Hilfskonstruktion kann auch bei allgemeiner gegenseitiger Lage der beiden sich schneidenden Ebenen, und zwar in jenem Falle verwendet werden, wenn entweder der Schnittpunkt der Bildflächtracen oder der Schnittpunkt der Fluchttracen oder beide ausserhalb der Grenzen der zur Verfügung stehenden Zeichnungsfläche fallen. Wählen wir beispielsweise den Fall, dass weder der Durchstosspunkt **d** noch der Fluchtpunkt **v** der Schnittgeraden erhalten werden kann, dass sich also sowohl die Bildflächtracen E^1_b und E^2_b, als auch die Fluchttracen E^1_v und E^2_v [Fig. 31, Taf. II] erst ausserhalb der Zeichnungsfläche schneiden.

In diesem Falle schalten wir zwei Hilfsebenen ein und wählen als solche, der Einfachheit halber, die zwei zu einander parallelen Ebenen $h_v h_b$ und $h_v h'_b$.

Die erstere $h_v h_b$ schneidet die gegebenen Ebenen E_1 und E_2 in den beiden Geraden $d_1 v_1$ und $d_2 v_2$, deren gemeinschaftlicher Punkt σ der gesuchten Schnittgeraden **s** angehört. Ebenso schneidet die zweite Hilfsebene $h_v h'_b$ die beiden gegebenen Ebenen E_1 und E_2 in den Geraden $v_1 d'_1$ und $v_2 d'_2$, deren gemeinschaftlicher Punkt σ' ebenfalls der Schnittgeraden **s** angehört, so dass die centrale Projektion **s** der letzteren als die Verbindungsgerade von σ und σ' erhalten wird.

§ 38.

Wie aus den Aufgaben 16 bis 20 zu ersehen, erleiden die früher im allgemeinen entwickelten Prinzipien resp. Konstruktionsmethoden Abweichungen, sobald gerade Linien oder Ebenen insbesondere zur Bildebene parallele Lagen annehmen.

Derartige Modifikationen treten in grösserem oder geringerem

Masse überall dort auf, wo überhaupt spezielle Lagen gegebener oder gesuchter Gebilde vorkommen.

Wir wollen dies noch an einigen Problemen zeigen, welche sich auf Punkte und Geraden in der vorderen Parallel- oder Spurebene, sowie auch auf Geraden und Ebenen beziehen, welche durch das Projektionscentrum gehen.

§ 39.

21. Aufgabe: **Durch den Spurpunkt einer gegebenen Geraden ist eine Gerade parallel zu einer zweiten gegebenen Geraden zu ziehen.**

Es stelle $d_1 v_1$ [Fig. 32, Taf. II] jene Gerade vor, durch deren Spurpunkt **s** (dessen centrale Projektion, wie bereits bekannt, im Unendlichen liegt) die verlangte Gerade **Dv** zu führen ist, und ferner repräsentiere **vd** jene Gerade, zu welcher **Dv** parallel sein soll.

In § 10 wurde gezeigt, dass zwei Geraden, welche einen gemeinschaftlichen Spurpunkt haben, parallele Bilder und gleiche Bildlängen besitzen, und dass gleichzeitig die Verbindungsgerade ihrer Fluchtpunkte zur Verbindungsgeraden ihrer Durchstosspunkte parallel sein muss.

Nachdem nun, gemäss der obangeführten Forderung, **v** der Fluchtpunkt der zu bestimmenden Geraden sein soll, so werden wir, dem Gesagten zufolge, bloss noch den vierten Eckpunkt **D** eines Parallelogrammes zu ermitteln haben, dessen übrige drei Eckpunkte, **v**, v_1 und d_1 gegeben sind. Die Gerade **vD** hat sodann in der That die vorerwähnten Eigenschaften, d. h. sie ist die der gestellten Aufgabe entsprechende Gerade.

Wenn an die Stelle des allgemein liegenden Fluchtpunktes **v** insbesondere der „Hauptpunkt **A**“ (als Fluchtpunkt aller zur Bildebene senkrechten Geraden) tritt, so erhält der Durchstosspunkt **D** der gesuchten Geraden die Bedeutung der orthogonalen Bildflächprojektion des Spurpunktes der Geraden $d_1 v_1$. Man gelangt hiernach zu dem Satze:

„Die orthogonale Bildflächprojektion des Spurpunktes einer durch den Fluchtpunkt und den Durchstosspunkt gegebenen Geraden ist der vierte Eckpunkt jenes Parallelogramms, dessen übrige drei Eckpunkte der Hauptpunkt, der Durchstosspunkt und der Fluchtpunkt sind, wobei gleichzeitig die beiden ersteren einander gegenüberliegende Eckpunkte des Parallelogrammes vorstellen müssen.“

§ 40.

22. Aufgabe: **Es ist die Verbindungsgerade eines gegebenen Punktes mit einem gegebenen Spurpunkte zu bestimmen.**

Um durch den gegebenen Punkt p [Fig. 33, Taf. II], dessen Träger $\delta\varphi$ ist, eine Gerade nach dem gegebenen Spurpunkte, als welchen wir den Spurpunkt **s** der Geraden **dv** annehmen wollen, zu ziehen, haben wir zunächst zu berücksichtigen, dass (nach § 10) deren Bild durch **p** parallel zu **dv** geht. Es erübrigt sonach nur noch den Fluchtpunkt **V** und den Durchstosspunkt **D** dieser Geraden zu bestimmen.

Zum Behufe dieser Bestimmung kann folgendermassen vorgegangen werden. Die zu suchende Gerade **DV** und der Träger $\delta\varphi$ des Punktes **p** bestimmen, da sie den Punkt **p** gemein haben sollen, eine Ebene $\mathbf{h_v h_b}$, welche offenbar auch jene Gerade $\varphi\delta'$ enthalten muss, die parallel zum Träger $\delta\varphi$ durch den Spurpunkt von δ**v** gezogen wird.

Der Durchstosspunkt δ' dieser Geraden ist einfach (wie in Aufgabe 21 gezeigt wurde) zu ermitteln. Ist dies geschehen, so erhält man $\mathbf{h_b}$ als Verbindungsgerade von δ und δ' und $\mathbf{h_v}$ als die Parallele zu $\mathbf{h_b}$ durch φ. Die Tracen $\mathbf{h_v}$ und $\mathbf{h_b}$ bestimmen auf der durch **p** parallel zu **dv** gezogenen Geraden bereits die gesuchten Punkte **V** und **D**; denn, da **VD** parallel zu $\varphi\delta'$ und gleich lang mit $\varphi\delta'$, also auch gleich und parallel mit **vd** ist, so entspricht die bezeichnete Gerade den in § 10 ausgesprochenen Bedingungen, wird also wirklich durch den Spurpunkt **s** von **dv** gehen.

§ 41.

23. Aufgabe: **Durch einen gegebenen Punkt und durch eine gegebene Gerade der Spurebene ist eine Ebene zu legen.**

Der gegebene Punkt sei **p** [Fig. 34, Taf. II] bestimmt durch den Träger $\delta\varphi$. Die Gerade der Spurebene ist als „Spurgerade“ der Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ gegeben.

Da die zu suchende Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ und die Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ die Spurgerade gemein haben sollen, so werden diese Ebenen offenbar von einer beliebigen dritten Ebene $\mathbf{h_v h_b}$ in zwei Geraden geschnitten werden, welche einen gemeinschaftlichen Spurpunkt besitzen, und deshalb parallele und gleich lange Bilder aufweisen.

Wählt man überdies die schneidende Hilfsebene $h_v h_b$ so, dass sie durch den Träger $\delta\varphi$ des Punktes **p**, also auch durch diesen letzteren selbst geht, so wird $h_v h_b$ die Ebene $e_v e_b$ in einer Geraden **dv** treffen, während deren Schnitt $d_1 v_1$ mit der zu bestimmenden Ebene $E_v E_b$ durch **p** geht und parallel zu **dv** als auch gleich lang mit **dv** sein wird.

Führt man endlich durch v_1 und d_1 die bezüglichen Tracen E_v und E_b parallel zu den Tracen e_v und e_b, so ist hierdurch auch die verlangte Ebene bereits dargestellt, welche (nach § 11) der angegebenen Konstruktion zufolge gleiche Bildbreite mit der Ebene $e_v e_b$ besitzt.

§ 42.

24. Aufgabe: **Es ist der Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen, deren Bilder sich decken.**

Die beiden gegebenen Geraden **dv** und $d_1 v_1$ [Fig. 35, Taf. II] liegen der Voraussetzung nach so, dass die vier Punkte **v**, v_1, **d**, d_1 einer und derselben Geraden, d. i. der gemeinschaftlichen Centralprojektion **l** der beiden Geraden **vd** und $v_1 d_1$ angehören.

In dieser Lage ist der Schnittpunkt der beiden genannten Geraden (welche sich notwendig schneiden müssen, weil sie in der durch **l** bestimmten centralprojizierenden Ebene liegen) nicht unmittelbar ersichtlich, sondern es muss derselbe erst durch Konstruktion gefunden werden.

Wir legen zu diesem Zwecke durch jede der beiden Geraden **dv** und $d_1 v_1$ eine beliebige Ebene, welche etwa durch $e_v e_b$ und $e'_v e'_b$ repräsentiert werden mögen.

Da diese beiden Ebenen den zu suchenden Schnittpunkt enthalten müssen, so wird offenbar auch deren Schnittgerade **d' v'** durch denselben gehen, und kann besagter Schnittpunkt daher nur jener Punkt σ sein, in welchem **d' v'** die gemeinschaftliche Projektion **l** der beiden gegebenen Geraden trifft.

§ 43.

25. Aufgabe: **Es ist die Schnittgerade einer centralprojizierenden Ebene mit einer zur Bildebene parallelen Ebene zu konstruieren.**

Seien e_v und e_b [Fig. 36, Taf. II] die beiden vereinigten Tracen der centralprojizierenden Ebene, während die zur Bildebene

parallele Ebene **P** durch den Punkt **p** auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben sei.

Die zu suchende Schnittgerade wird einerseits parallel zur Bildebene sein, und andererseits wird ihre Centralprojektion **s**, sowie überhaupt die einer jeden Geraden der centralprojizierenden Ebene **e**, mit dem Tracenpaare e_v, e_b zusammenfallen.

Um demnach die Aufgabe gelöst zu erhalten, wird es vollständig genügen irgend einen Punkt von **s** centralprojektivisch (durch einen Träger) zu bestimmen. Zu diesem Zwecke legen wir durch $\delta\varphi$ eine beliebige Hilfsebene $h_v h_b$. Dieselbe schneidet die zur Bildebene parallele Ebene **P** in der durch **p** gehenden zu h_b parallelen Geraden **l**. Ferner treffen sich die beiden Geraden **l** und **s** (da sie in der Ebene **P** liegen) in einem Punkte **a**, und da endlich auch dieser der Ebene $h_v h_b$ angehört, so kann man dem besagten Punkte **a** irgend einen in dieser Ebene liegenden Träger, beispielsweise den zu $\delta\varphi$ parallelen Träger $\varphi\delta'$ geben.

Die gesuchte Schnittgerade ist somit durch ihre Centralprojektion **s**, und einen ihrer Punkte **a** auf dem Träger $\varphi\delta'$ bestimmt.

III. Kapitel.

Beziehungen zwischen Punkt, Gerade und Ebene, die von Längen- und Winkelgrössen abhängig sind.

§ 44.

Allgemeine Bemerkungen.

Ein grosser Teil der bisher angestellten Betrachtungen und der bis nun durchgeführten Aufgaben hat sich bloss auf solche Beziehungen zwischen Punkt, Gerade und Ebene beschränkt, bei welchen nur die gegenseitige Lage dieser Elemente in Betracht gezogen wurde, oder mit kurzen Worten, wo bloss die sogenannten *„projektivischen Beziehungen“* zwischen Punkt, Gerade und Ebene den Gegenstand unserer Erörterungen bildeten. Nur wenige Paragraphe waren solchen Beziehungen gewidmet, in welchen Längen- resp. Winkelgrössen in den Kreis unserer Be-

sprechungen eintraten, in welchen also beispielsweise, wie in §§ 6 und 8, von der Neigung von Geraden und Ebenen gegen die Bildebene, oder wie in §§ 10 und 11, wo von den Beziehungen derselben zu den beiden Parallelebenen die Rede war.

Verfolgt man alle vorhergehenden Betrachtungen und Aufgaben etwas aufmerksamer, so wird man auf eine höchst auffällige und charakteristische Erscheinung geführt.

Es zeigt sich nämlich, dass bei allen Beziehungen, welche bloss projektivischer Natur sind, und bei all den damit verbundenen Aufgaben, die Kenntnis der Lage des Projektionscentrums ganz gleichgültig ist, ja dass dasselbe bei den einschlägigen Konstruktionen gar nicht in Betracht oder Verwendung kommt und folglich nicht einmal bekannt zu sein braucht.

Hingegen spielt bei allen Betrachtungen und Aufgaben, in welchen Längen- oder Winkelgrössen auftreten, d. i. in allen *„metrischen“* Betrachtungen und Aufgaben, die Lage des Projektionscentrums eine wesentliche Rolle, und wären derartige centralprojektivisch gestellte Probleme konstruktiv unmöglich durchzuführen, wenn das Projektionscentrum nicht gegeben vorliegen würde.

Allerdings sind im Vorhergehenden auch einige Aufgaben gelöst worden, die obwohl streng genommen metrischer Natur, dennoch die Kenntnis des Projektionscentrums entbehren konnten.

Diese Ausnahme liegt in der Bedeutung der unendlich fernen Elemente und ihrer Centralprojektionen und bezieht sich auf die zur Bildebene parallelen Geraden und Ebenen.

Wir werden in weiterer Folge den Grund für dieses charakteristische Verhalten, sowie auch für die letzterwähnten Ausnahmen finden. Für jetzt genügt es zu wissen, dass eine Untersuchung oder eine Aufgabe, welche unter allen Umständen die Kenntnis der Lage des Projektionscentrums notwendig macht, zweifellos eine metrische Aufgabe ist.

§ 45.

Die wahre Grösse und Form centralprojektivisch dargestellter Gebilde, und die Mittel zu ihrer Bestimmung.

In der darstellenden Geometrie tritt sehr häufig die Bestimmung der wahren Grösse von Strecken und Winkeln, sowohl als selbständige Aufgabe wie auch als Teiloperation eines zu lösenden Problemes auf.

Wir verstehen unter den „wahren Grössen“ eines centralprojektivisch dargestellten Raumgebildes diejenigen Längen- und Winkelgrössen, welche an dem letzteren selbst vorkommen, zum Unterschiede von jenen Längen- und Winkelgrössen, welche seine Centralprojektion aufweist, und welche allenfalls, da sie den ersteren im allgemeinen nicht gleich sind, als „scheinbare Grössen“ bezeichnet werden könnten.

Vor allem wird nun zu untersuchen sein, welche Lage ein Gebilde gegen die Bildebene und das Projektionscentrum haben muss, damit dasselbe in wahrer Grösse erscheine, d. h. dass alle Winkel und alle Dimensionen, welche in der Centralprojektion auftreten, den entsprechenden Winkeln und Dimensionen des dargestellten Gebildes unmittelbar selbst gleich seien.

Bei Beantwortung dieser Frage werden wir uns auf Strecken, Winkel und ebene Figuren beschränken, da alle anderen Grössenbestimmungen auf diese zurückgeführt werden können.

Zunächst ist klar, dass jede Strecke, jeder Winkel und jedes ebene Gebilde, sobald diese in der Bildebene selbst liegen, mit ihren bezüglichen Centralprojektionen zusammenfallen, also unmittelbar in wahrer Grösse erscheinen. Ausserdem wird sich auch ein Winkel, dessen beide Schenkel und folglich auch dessen Ebene parallel zur Bildebene liegen, centralprojektivisch in wahrer Grösse darstellen.

Hingegen werden alle zur Bildebene bloss parallele Strecken, alle zur Bildebene parallele ebene Gebilde, sowie ferner alle gegen die Bildebene geneigten Strecken, Winkel und ebenen Gebilde im allgemeinen nicht in wahrer Grösse erscheinen.

(Bemerkung.) Wenn ein zur Bildebene nicht paralleles Gebilde, centralprojektivisch dargestellt, in wahrer Grösse erscheint, so setzt dies eine besondere Lage gegen die Bildebene und das Projektionscentrum voraus.

Hierbei beachte man folgende Sätze, welche, gestützt auf die Lehre von Pyramidenschnitten, leicht elementar bewiesen werden können.

Besitzt eine Strecke eine solche Lage, dass eine der beiden Geraden, welche den Winkel zwischen der Trägergeraden dieser Strecke und deren Projektion halbieren, das Projektionscentrum enthält und nebstbei auch die Winkelhalbierende der nach den Endpunkten der Strecke gehenden Prejektionsstrahlen repräsentiert, so erscheint die Strecke centralprojektivisch in wahrer Grösse.

Besitzt ein ebenes Gebilde eine solche Lage, dass eine der beiden Winkelhalbierebenen zwischen seiner Ebene und der Bildebene das Projektionscentrum enthält, und ist die Winkelhalbierebene gleichzeitig eine Symmetrieebene des das fragliche Gebilde projizierenden Strahlensystems, so erscheinen alle Strecken und Winkel des ebenen Gebildes in der Centralprojektion in wahrer Grösse.

Die Modifikation, welche diese Sätze für zur Bildebene parallele Strecken resp. ebene Gebilde erfahren, ist leicht zu erkennen.

Soll nun die wahre Grösse irgend einer Strecke oder irgend eines ebenen, centralprojektivisch dargestellten Gebildes ermittelt werden, so wird man, den obigen Auseinandersetzungen zufolge, mittels gewisser Operationen die betreffende Strecke oder das betreffende Gebilde durch eine gleiche Strecke resp. ein gleiches Gebilde in der Bildebene zu ersetzen haben.

Dies wird am einfachsten durch eine Drehung oder Parallelverschiebung in die Bildebene erreicht, und kommt die Drehung dann zur Anwendung, wenn die zu bestimmenden Grössen gegen die Bildebene geneigt sind, während eine Parallelverschiebung hinreicht, sobald sie zur Bildebene parallel sind.

Wir wollen den letzteren Fall, als den einfacheren, zuerst erledigen, und zu diesem Zwecke folgende Aufgabe durchführen.

§ 46.

26. Aufgabe: **In einer zur Bildebene parallelen Ebene liegt ein Dreieck, dessen Centralprojektion gegeben ist; es soll die wahre Grösse dieses Dreieckes ermittelt werden.**

Die zur Bildebene parallele Ebene **P** [Fig. 37, Taf. II], welche das Dreieck enthält, sei auf bekannte Weise durch einen Punkt **p** auf einem Träger $\delta\varphi$ gegeben; die Centralprojektion des Dreieckes sei **abc**.

Infolge der besonderen, d. i. zur Bildebene parallelen Lage des Dreieckes **abc**, ist es möglich, dasselbe durch eine Parallelverschiebung (in beliebiger Richtung) in die Bildebene selbst zu bringen. Hierbei werden die drei Eckpunkte des Dreieckes drei zu einander parallele Geraden durchlaufen, und die Bildflächdurchstosspunkte der letzteren die Eckpunkte des verschobenen Dreieckes repräsentieren.

Da ausserdem bei der Parallelverschiebung des Dreieckes dessen Seiten stets parallel zur ursprünglichen Lage bleiben, so wer-

den im vorliegenden Falle die Seiten des in die Bildebene verschobenen Dreieckes parallel zu den Seiten seiner Centralprojektion sein.

Um daher die Aufgabe graphisch durchzuführen, wählen wir eine beliebige Verschiebungsrichtung, — am einfachsten die des Trägers $\delta\varphi$, — und bestimmen die Bildflächdurchstosspunkte jener drei Geraden, welche beziehungsweise durch **a**, **b** und **c** parallel zu $\delta\varphi$ gezogen werden können.

Um zunächst den Durchstosspunkt von $a\varphi$ zu ermitteln, ist bloss zu berücksichtigen, dass die durch $a\varphi$ und $\delta\varphi$ gelegte Hilfsebene **h** die zur Bildebene parallele Ebene **P** in der Geraden **ap**, und mithin die Bildebene selbst in der durch δ gehenden zu **ap** parallelen Geraden h_b schneidet. Die Bildflächtrace h_b und die Gerade $a\varphi$ begegnen sich in dem gesuchten Durchstosspunkte d_a.

Im Wege einer ganz übereinstimmenden Betrachtung findet man den Durchstosspunkt d_b von $b\varphi$ im Schnitte der Geraden $b\varphi$ mit der durch d_a parallel zu **ab** gezogenen Geraden $d_a d_b$, und ebenso den Durchstosspunkt d_c im Schnitte von $c\varphi$ mit der durch d_a parallel zu **ac** geführten Geraden $d_a d_c$. Das Dreieck $d_a d_b d_c$ repräsentiert sodann die Parallelverschiebung, und mithin die wahre Grösse des centralprojektivisch gegebenen Dreieckes **abc**.

Es ist einleuchtend, dass in gleicher Weise auch die wahre Grösse jedes beliebigen anderen zur Bildebene parallelen ebenen Gebildes konstruiert werden kann.

§ 47.

Die Drehung oder Umlegung eines gegen die Bildebene geneigten ebenen Gebildes in die Bildebene.

Ein ebenes Gebilde kann stets durch eine Drehung um seine Bildflächtrace mit der Bildebene zur Incidenz (d. h. zum Zusammenfallen) gebracht werden. Selbstverständlich muss hierbei der Betrag der Drehung, d. i. der sogenannte „Drehungswinkel“, dem Neigungswinkel der zu drehenden Ebene gegen die Bildebene gleich sein.

Wird die Drehung eines ebenen Gebildes in die Bildebene zu dem Zwecke vollzogen, um die wahre Grösse desselben kennen zu lernen, so pflegt man diese Operation als die „Umlegung“ des Gebildes zu bezeichnen.

Nach erfolgter Umlegung werden sodann gewöhnlich an dem umgelegten Gebilde irgend welche durch die Bedingungen des gestellten Problems notwendigen Konstruktionen vorgenommen,

hierauf die sich dabei ergebenden Punkte, Geraden u. s. w. wieder in die ursprüngliche Lage in den Raum zurückgedreht und durch ihre Centralprojektion bestimmt. Diese der Umlegung entgegengesetzte Operation pflegt man das „Zurückführen“ zu nennen.

Um nun eine derartige Umlegung graphisch zu vollziehen, werden jene Eigenschaften zur Verwendung gelangen, welche die wesentlichen Begleiter einer jeden Drehung sind.

Vor allem ist zu berücksichtigen, dass bei einer Drehung sämtliche Teile des gedrehten Gebildes sowohl ihre gegenseitige Lage, als auch die Lage gegen jene Gerade, um welche die Drehung bewerkstelligt wird und kurz als „Drehungsaxe“ bezeichnet wird (letztere ist in unserem Falle stets die Bildflächtrace der zu drehenden Ebene) nicht ändern.

Hieraus folgen wichtige Spezialeigenschaften, welche wir sofort ableiten wollen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke an, es sei **BE** [Fig. 38, Taf. II] die Bildebene, **E** die zu drehende Ebene und E_b deren Bildflächtrace. Nachdem die Drehung um die letztere stattfindet, so ist einleuchtend, dass ihre Punkte bei der Drehung keine Lagenänderung erfahren.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass alle Geraden und krummen Linien eines Gebildes in der Ebene **E** die Bildflächtrace E_b nach vollzogener Drehung in den nämlichen Punkten, wie vor der Drehung schneiden.

Sei ferner **l** eine beliebige Gerade der Ebene **E**, welche die Bildflächtrace E_b im Punkte **d** schneiden, und mit E_b den Winkel φ einschliessen möge.

Da die Gerade **l** während und nach der Umlegung ihre Lage gegen die Bildflächtrace E_b nicht ändert und während der Drehung jeder Punkt von **l** einen dem Drehungswinkel φ entsprechenden Kreisbogen durchläuft, dessen Ebene senkrecht zur Drehaxe E_b steht, so wird dieselbe nach vollbrachter Drehung durch die Gerade l_0 der Bildebene dargestellt erscheinen.

Allerdings gibt es ausser l_0 noch eine zweite Gerade in der Bildebene, welche durch den Schnittpunkt **d** von **l** und E_b geht und mit E_b den nämlichen Winkel φ einschliesst, doch hat man hierbei zu beachten, dass auch die Ebene **E** selbst in zweierlei Sinn in die Bildebene umgelegt werden kann, wobei dem einen Drehungssinne die oberwähnte Gerade l_0, dem zweiten Drehungssinne dagegen die andere der vorangedeuteten Geraden entsprechen würde.

Wenn eine Gerade **r** in der Ebene **E** gleichzeitig auf der Bildflächtrace E_b senkrecht steht — eine derartige Gerade wird eine Linie des „grössten Falles“ oder kurz eine „Fall-linie“ genannt, da sie unter allen Geraden in der Ebene den grössten Neigungswinkel mit der Bildebene **BE**, d. i. einen dem Neigungswinkel der Ebene **E** gegen **BE** gleichen Winkel einschliesst —, so wird dieselbe auch in der Umlegung nach r_0 senkrecht zur Bildflächtrace E_b stehen. Da überdies **r** und r_0 einen Punkt α der Bildflächtrace E_b gemein haben, so kann auch durch **r** und r_0 eine Ebene gelegt werden, welche selbst wieder zur Bildflächtrace E_b normal sein wird.

Denken wir uns weiter in der Ebene **E** einen beliebigen Punkt **a** angenommen, welcher bei der Umlegung der Ebene nach a_0 gelangen möge.

Zieht man durch **a** die Gerade **r** senkrecht zu E_b und setzen wir voraus, dass **r** die E_b in α treffe, so wird einerseits die Umlegung r_0 dieser Geraden durch α senkrecht zu E_b gehen, und andererseits den umgelegten Punkt a_0 enthalten müssen.

Überdies wird, infolge der unveränderten Lage der Punkte gegen die Drehaxe E_b, die Strecke $a_0\alpha$ gleich der Strecke $a\alpha$ sein. Man kann demnach in der durch **r** und r_0 bestimmten, zu E_b senkrechten Ebene einen Kreisbogen **k** verzeichnen, welcher α zum Mittelpunkte hat und durch **a** und a_0 geht. Dieser Kreisbogen **k** ist nun in der That auch derjenige, welchen der Punkt **a** bei der Drehung um E_b beschreibt. Dasselbe gilt selbstverständlich in gleicher Weise auch von jedem anderen Punkte der Ebene **E**, so dass allgemein der Satz aufgestellt werden kann:

„Sämtliche Punkte einer in die Bildebene umzulegenden Ebene beschreiben bei der Umlegung Kreisbögen, welche in zur Bildflächtrace jener Ebene normalen Ebenen liegen. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen in der Bildflächtrace, und ihre Radien sind den Abständen der gedrehten Punkte von der Bildflächtrace gleich.“

§ 48.

Eine wichtige Eigenschaft, welche namentlich bei der centralprojektivischen Durchführung einer „Umlegung“ zur Geltung kommt, bezieht sich auf die gleichzeitige Drehung zweier paralleler Ebenen.

Denken wir uns zwei zu einander parallele Ebenen **E** und E^1 mit den Bildflächtracen E_b resp. E_b^1 gegeben und in denselben zwei

zu einander parallele Geraden l und l' angenommen. Der Winkel, welchen l' und E_b^1 bilden, ist, der gemachten Voraussetzung gemäss, gleich jenem Winkel, welchen l und E_b einschliessen. Denkt man sich nun die beiden Ebenen E und E^1 um ihre bezüglichen Bildfiächtracen E_b und E_b^1 samt den beiden Geraden l und l' in gleichem Drehungssinne in die Bildebene umgelegt, wobei l_0 und l'_0 die umgelegten Geraden repräsentieren mögen, so wird, weil $\measuredangle(l_0, E_b) = \measuredangle(l, E_b)$ und $\measuredangle(l'_0, E_b^2) = \measuredangle(l', E_b^2)$ ist, und weil nebstbei E_b parallel zu E_b^1 ist, notwendig auch l_0^1 parallel zu l_0 sein müssen.

Stellen wir uns weiter vor, dass E^1 die Fluchtebene von E, dass also E_b^1 die Fluchttrace der besagten Ebene und l' der Fluchtstrahl der Geraden l sei, so lässt sich die eben angeführte Eigenschaft in folgende Worte kleiden:

„Der um die Fluchttrace einer Ebene in die Bildebene umgelegte Fluchtstrahl einer in dieser Ebene liegenden Geraden ist stets parallel zu der um die Bildflächtrace derselben Ebene in die Bildebene umgelegten Geraden.“

§ 49.

27. Aufgabe: **Es ist die wahre Grösse des Winkels, welchen zwei sich schneidende Geraden einschliessen, zu bestimmen.**

Seien dv und d_1v_1 [Fig. 39, Taf. II] die beiden, sich in einem Punkte p schneidenden Geraden, und sei E_vE_b die durch diese beiden Geraden bestimmte Ebene. Endlich stelle A den Hauptpunkt und AC die Distanz vor.

Um die wahre Grösse des Winkels, welchen die Geraden dv und d_1v_1 bilden, zu ermitteln, haben wir diese Geraden um die Bildflächtrace E_b ihrer Ebene in die Bildebene umzulegen.

Nachdem aber der Winkel den die Geraden vd und v_1d_1 miteinander einschliessen, jenem Winkel gleich ist, welchen die den Geraden entsprechenden Fluchtstrahlen bilden, so wird es genügen diesen letzteren zu bestimmen. Dieser Umstand, welcher stets vorteilhaft verwertet werden kann, verursacht eine vorbereitende Konstruktion, nämlich die Umlegung des Projektionscentrums um die Fluchttrace E_v in die Bildebene, welche zunächst durchgeführt werden soll.

Wie bereits gelegentlich der in § 8 angestellten Betrachtungen gezeigt wurde, ist diejenige Gerade AA_1, welche durch den Hauptpunkt A senkrecht zu der Fluchttrace E_v gezogen wird, die Bild-

flächtrace derjenigen durch das Projektionscentrum gehenden Ebene, welche gleichzeitig auf E_v senkrecht steht. Besagte Ebene ist mithin (nach den Entwickelungen in § 47) die „Drehungsebene“ für das Projektionscentrum.

Die Gerade, welche das Projektionscentrum mit dem Punkte A_1 — dem sogenannten „*Nebenhauptpunkt*“ — verbindet, ist senkrecht zur Fluchttrace E_v; ihre Umlegung um E_v muss daher (nach § 47) durch A_1 gehen und ebenfalls senkrecht auf E_v stehen, also in die Gerade AA_1 fallen. In diese letztere Gerade wird auch das um E_v umgelegte Projektionscentrum zu liegen kommen, und wird dasselbe von A_1 eine Entfernung besitzen, welche mit jener des Projektionscentrums im Raume von dem Nebenhauptpunkte A_1 übereinstimmt.

Wie bereits in § 8 gezeigt wurde, ergibt sich diese Entfernung als die Hypotenuse A_1C_1 eines rechtwinkligen Dreieckes AA_1C_1, in welchem die eine Kathete der Strecke AA_1 (Abstand des Hauptpunktes vom Nebenhauptpunkte), die andere Kathete AC_1 jedoch der Distanz AC gleich ist.

Man wird hiernach das um die jeweilige Fluchttrace E_v einer Ebene E in die Bildebene umgelegte Projektionscentrum C_0 dadurch erhalten, dass man auf der zu E_v senkrechten Geraden AA_1 von A_1 aus eine der Hypotenuse A_1C_1 gleiche Strecke A_1C_0 nach C_0 aufträgt.

Den so gefundenen Punkt C_0 bezeichnet man kurz als „*umgelegtes Projektionscentrum*“, wobei selbstverständlich seine „Umlegung“ als um die jeweilige Fluchttrace E_v der betreffenden Ebene E bewerkstelligt gedacht wird. Aus diesem Grunde pflegt man den Punkt C_0 auch das „*Nebencentrum*“ der Ebene E zu heissen, und die Strecke $A_1C_0 = A_1C_1$ die „*Nebendistanz*“ zu nennen.

Die Lage des Nebencentrums in bezug auf E_v ist offenbar nicht nur von dem Projektionscentrum C und dem Hauptpunkte A, sondern auch von der Lage der Ebene E gegen die Bildebene abhängig.

Nach der hiermit getroffenen Vorbereitung ist die oben gestellte Aufgabe nunmehr leicht durchzuführen.

Die in der Fluchtebene (C, E_v) liegenden Fluchtstrahlen der beiden gegebenen Geraden dv und d_1v_1 sind kekanntlich die Verbindungsgeraden des Projektionscentrums C mit den Fluchtpunkten v und v_1 der genannten Geraden.

Diese Fluchtstrahlen Cv und Cv_1 müssen nach ihrer Umlegung um die Fluchttrace E_v einerseits durch das umgelegte Projek-

tionscentrum C_0, andererseits aber auch durch die Fluchtpunkte v und v_1 gehen, da letztere als der Fluchttrace E_v (Drehaxe) angehörend (nach § 47) ihre Lage bei der Drehung nicht ändern.

Die umgelegten Fluchtstrahlen der beiden in der Ebene $E_v E_b$ liegenden Geraden dv und $d_1 v_1$ sind mithin durch die Geraden $C_0 v$ und $C_0 v_1$ dargestellt.

Um endlich die beiden Geraden dv und $d_1 v_1$ selbst um die Bildflächtrace E_b umzulegen, hätte man nach dem in § 48 bewiesenen Satze nichts weiter zu thun, als beziehungsweise durch d und d_1 die Parallelen zu $C_0 v$ resp. $C_0 v_1$ zu ziehen.

Nachdem jedoch die umgelegten Geraden denselben Winkel wie deren umgelegte Fluchtstrahlen $C_0 v$ und $C_0 v_1$ einschliessen, so ist deren Zeichnung überflüssig, und man hat bereits in $\measuredangle \alpha = \measuredangle v C_0 v_1$ die wahre Grösse des gesuchten Neigungswinkels bestimmt.

§ 50.

28. Aufgabe: **In einer Ebene $E_v E_b$ [Fig. 39, Taf. II] ist eine Gerade dv, und in dieser ein Punkt p gegeben; man soll durch diesen Punkt in derselben Ebene eine zweite Gerade unter einem gegebenen Winkel α gegen die erstere ziehen.**

Bestimmt man, sowie in der vorhergehenden Aufgabe, vor allem das um E_v umgelegte Projektionscentrum C_0, so ist offenbar $C_0 v$ der der gegebenen Geraden dv entsprechende, um E_v in in die Bildebene umgelegte Fluchtstrahl.

Da nun jener Fluchtstrahl, welcher der zu bestimmenden Geraden entspricht, mit $C_0 v$ gleichfalls den gegebenen Winkel α bilden muss, so kann seine Umlegung $C_0 v_1$ unmittelbar gezeichnet werden, und erhält man im Schnitte v_1 der letzteren mit der Fluchttrace E_v bereits den Fluchtpunkt der verlangten Geraden und in $v_1 p$ deren Centralprojektion. Der Durchstosspunkt d_1 ergibt sich schliesslich im Schnitte von $v_1 p$ mit der Bildflächtrace E_b.

§ 51.

29. Aufgabe: **Es ist eine Ebene $E_v E_b$ und in derselben ein Punkt gegeben; die Ebene ist in die Bildebene umzulegen, und die Lage des umgelegten Punktes zu ermitteln.**

Erste Lösung. Mittels zweier durch den gegebenen Punkt gehenden beliebigen Geraden.

Ziehen wir in der Ebene $E_v E_b$ [Fig. 39, Taf. II] durch den

gegebenen Punkt **p** zwei beliebige Geraden **dv** und $\mathbf{d_1 v_1}$, und denken wir uns dieselben um $\mathbf{E_b}$ in die Bildebene umgelegt, so ist einleuchtend, dass, infolge der bei der Drehung ungeänderten gegenseitigen Lage aller Teile eines umzulegenden Gebildes, die umgelegten Geraden in ihrem Durchschnitte den umgelegten Punkt bestimmen werden.

Bestimmt man daher auf die aus den vorhergehenden beiden Aufgaben bekannte Weise das umgelegte Projektionscentrum $\mathbf{C_0}$, so wird man in $\mathbf{C_0 v}$ und $\mathbf{C_0 v_1}$ die um $\mathbf{E_v}$ umgelegten Fluchtstrahlen der beiden Hilfsgeraden **dv** und $\mathbf{d_1 v_1}$ erhalten. Mit Zugrundelegung des im § 48 abgeleiteten Satzes werden sodann die Geraden $\mathbf{l_0}$ und $\mathbf{l'_0}$, welche durch **d** resp. $\mathbf{d_1}$ beziehungsweise parallel zu $\mathbf{C_0 v}$ und $\mathbf{C_0 v_1}$ gezogen werden, bereits die Umlegungen von **dv** und $\mathbf{d_1 v_1}$, und ihr Schnittpunkt $\mathbf{p_0}$ die Lage des um $\mathbf{E_b}$ umgelegten Punktes **p** vorstellen.

§ 52.

Zweite Methode. Mittels Nebenhauptpunkt und Nebendistanzpunkt.

Diese Lösung unterscheidet sich von der eben besprochenen allgemeinen nur dadurch, dass diesfalls nicht von zwei beliebigen durch **p** gezogenen, sondern von zwei besonderen Hilfsgeraden Gebrauch gemacht wird.

Vor allem bestimmen wir wieder das umgelegte Projektionscentrum $\mathbf{C_0}$ [Fig. 40, Taf. II] und beschreiben aus dem Nebenhauptpunkte $\mathbf{A_1}$ als Mittelpunkt einen durch $\mathbf{C_0}$ gehenden Halbkreis, welcher die Fluchttrace $\mathbf{E_v}$ in **N** und **N'** treffen möge.

Da wir $\mathbf{A_1}$, als den Fluchtpunkt aller in der Ebene **E** liegenden zur Bildflächtrace $\mathbf{E_b}$ derselben senkrecht stehenden Geraden, den der Ebene **E** entsprechenden Nebenhauptpunkt nannten, so wollen wir den vorbezeichneten Kreis den „Nebendistanzkreis“ und die Punkte **N** und **N'**, der Analogie halber, die „Nebendistanzpunkte“ der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ nennen.

Aus früherem ist bereits bekannt, dass die Gerade, welche das Projektionscentrum im Raume mit dem Punkte $\mathbf{A_1}$ verbindet, auf der Fluchttrace $\mathbf{E_v}$ senkrecht steht. Hieraus folgt unmittelbar, dass, wie oben angedeutet, $\mathbf{A_1}$ der Fluchtpunkt aller „Fallgeraden“ der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$, d. h. aller jener Geraden sei, die in der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ senkrecht zur Bildflächtrace $\mathbf{E_b}$ gezogen werden können.

Die dem Punkte **p** entsprechende Fallgerade ist demnach centralprojektivisch durch die Gerade $\mathbf{A_1 p}$ dargestellt; ihr Durchstosspunkt ergibt sich unmittelbar im Schnitte von $\mathbf{A_1 p}$ mit der Trace $\mathbf{E_b}$ in **d**.

Nach der Umlegung der Ebene **E** gelangt die genannte Fallinie in die Bildebene, und wird dieselbe (nach § 47) durch die, durch **d** gehende zu $\mathbf{E_b}$ senkrechte Gerade $\mathbf{d p_0}$ dargestellt. Selbstverständlich wird der umgelegte Punkt $\mathbf{p_0}$ auf dieser Geraden liegen.

Die Centralprojektion einer zweiten besonderen Hilfsgeraden erhalten wir, wenn wir **p** mit einem der beiden Nebendistanzpunkte, beispielsweise mit **N** verbinden. Hierbei wird offenbar **N** als Fluchtpunkt dieser Geraden aufgefasst.

Denkt man sich den der centralprojektivisch bestimmten Geraden **pN** entsprechenden umgelegten Fluchtstrahl $\mathbf{C_0 N}$ aufgesucht, so findet man ohne weiteres, dass derselbe mit der Fluchttrace $\mathbf{E_v}$ den Winkel von 45° einschliesst.

Der Nebendistanzpunkt **N** (sowie selbstverständlich auch der Nebendistanzpunkt **N'**) ist daher der Fluchtpunkt solcher Geraden der Ebene **E**, welche mit der Bildflächtrace $\mathbf{E_b}$ den Winkel von 45° einschliessen.

Nun ist, wie vorher bemerkt, **Np** die Centralprojektion einer derartigen Geraden, welche gleichzeitig durch den umzulegenden Punkt **p** geht. Nach der Umlegung um $\mathbf{E_b}$ wird diese Gerade offenbar durch den Durchstosspunkt **a** (Schnitt von **Np** und $\mathbf{E_b}$) gehen, mit $\mathbf{E_b}$ den Winkel von 45° bilden und selbstverständlich die vorher gefundene Gerade $\mathbf{d p_0}$, welche gleichfalls durch **p** geführt wurde, in dem gesuchten umgelegten Punkte $\mathbf{p_0}$ treffen.

Berücksichtigt man, dass das Dreieck $\mathbf{a d p_0}$ bei **d** rechtwinklig und überdies gleichschenklig ist, so kann man die Zeichnung der umgelegten Geraden $\mathbf{a p_0}$ vermeiden und mittels eines Kreises aus **d** die Strecke **ad** nach $\mathbf{d p_0}$ sofort übertragen, um $\mathbf{p_0}$ zu erhalten.

Ebenso erscheint nun auch die Führung des Fluchtstrahles $\mathbf{C_0 N}$ ganz und gar überflüssig. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Strecke **ad** auf jene Seite der durch **d** senkrecht zu $\mathbf{E_b}$ gezogenen Geraden aufzutragen ist, für welche der erhaltene Punkt $\mathbf{p_0}$ eine solche Lage hat, dass die Geraden $\mathbf{C_0 N}$ und $\mathbf{a p_0}$, falls dieselben wirklich gezogen wurden, untereinander parallel sind.

§ 53.

Dritte Methode. Mittels besonderer Hilfsgeraden.

Sei wieder $E_v E_b$ [Fig. 41, Taf. II] die gegebene Ebene, p der umzulegende Punkt derselben und C_0 (Nebencentrum der Ebene E) das um E_v umgelegte Projektionscentrum.

Wir ziehen zunächst durch den in E gegebenen Punkt p eine beliebige Gerade $l = dv$ und legen dieselbe durch Zuhilfenahme des ihr entsprechenden Fluchtstrahles $C_0 v$ nach l_0 um. Der um E_b in die Bildebene umgelegte Punkt p_0 muss demzufolge in l_0 liegen.

An Stelle einer zweiten beliebigen durch p geführten Geraden wählen wir insbesondere jene Gerade $d_1 v_1$, deren Centralprojektion $d_1 v_1$ in die Verbindungsgerade der Punkte p und C_0 fällt.

Wird die Umlegung dieser Geraden $d_1 v_1$ dadurch bewirkt, dass man zu deren umgelegten Fluchtstrahl $C_0 v_1$ durch den Durchstosspunkt d_1 die Parallele zieht, so finden wir, dass infolge der diesfalls getroffenen besonderen Annahme der Geraden $d_1 v_1$, die besagte Parallele sowohl, als auch der Fluchtstrahl $C_0 v_1$ mit der Centralprojektion $d_1 v_1$ zusammenfällt.

Jede Gerade, deren Centralprojektion durch das umgelegte Projektionscentrum geht, fällt daher mit ihrer Umlegung zusammen.

Die letzt umgelegte Gerade l_1 trifft nunmehr die vorher umgelegte Gerade l_0 in dem umgelegten Punkte p_0. Hieraus entnehmen wir, dass, obwohl die Centralprojektion $d_1 v_1$ und deren Umlegung $C_0 v_1$ sich decken, doch nicht gleichzeitig auch die Centralprojektionen und Umlegungen aller ihrer Punkte zusammenfallen; denn p_0 ist von p verschieden.

Aus dieser einfachen Betrachtung ergibt sich nun der für die graphische Durchführung der Umlegung so wertvolle Satz:

„Die Centralprojektion eines Punktes einer Ebene, der um die Bildflächtrace dieser Ebene umgelegte Punkt und das um die Fluchttrace derselben Ebene umgelegte Projektionscentrum liegen stets in einer Geraden.“

§ 54.

Das umgelegte Projektionscentrum in der Bedeutung eines besonderen Fluchtpunktes.

Der vorstehende Satz gestattet noch eine andere Deutung resp. eine andere Beweisführung. Es lässt sich nämlich vermuten,

dass das umgelegte Projektionscentrum, als Konvergenzpunkt jener Geraden, welche die Centralprojektionen der Punkte der Ebene **E** mit den bezüglichen Umlegungen verbinden, die Bedeutung eines Fluchtpunktes habe.

Diese Vermutung wird nun auch, wie folgende einfache Betrachtung lehrt, wirklich zur Thatsache. Die Verbindungsgeraden der Centralprojektionen **p** aller Punkte der Ebene **E** mit den zugehörigen Umlegungen p_0 sind nämlich nichts anderes als die Centralprojektionen der Sehnen jener Kreisbögen, welche die Punkte der Ebene **E** bei ihrer Umlegung beschreiben.

Nachdem aber alle diese Sehnen untereinander parallel, und auch parallel zu jenem Strahle sind, welcher das Projektionscentrum im Raume mit seiner Umlegung C_0 um die Fluchttrace E_v verbindet, so muss C_0 notwendig ihr gemeinschaftlicher Fluchtpunkt sein.

§ 55.

Vierte Methode der Umlegung. Vermittels der umgelegten Spurlinie.

Sei wieder $E_v E_b$ [Fig. 42, Taf. II] die umzulegende Ebene, **p** ein beliebiger Punkt derselben, und C_0 das um E_v umgelegte Projektionscentrum.

Die Ebene $E_v E_b$ schneidet die Spurebene PE_1 (vordere Parallelebene) in einer zur Bildflächtrace E_b der Ebene **E** parallelen Geraden E_s, welche (nach § 11) von der Bildflächtrace E_b dieselbe Entfernung besitzt, wie das Projektionscentrum **C** von der Fluchttrace E_v.

Da die wahre Grösse dieser Entfernung durch die Strecke $C_0 A_1$, d. i. durch den Abstand des umgelegten Centrums C_0 von der Fluchttrace E_v dargestellt ist, so wird man die um E_b umgelegte Spurlinie E_s^0 einfach dadurch erhalten, dass man in dem genannten Abstande $A_1 C_0 = \alpha\beta$ eine Parallele zur Bildflächtrace E_b zieht. Hierbei hat man selbstverständlich darauf zu achten, dass die Spurlinie auf die Bildflächtrace E_b in demselben Sinne wie C_0 auf die Fluchttrace E_v folge.

Die Bedeutung der Spurlinie E_s ist dadurch charakterisiert, dass sie den geometrischen Ort jener Punkte der Ebene $E_v E_b$ repräsentiert, deren Centralprojektionen in unendlicher Entfernung liegen.

Denken wir uns nun durch den umzulegenden Punkt **p** eine beliebige Hilfsgerade **dv** gezogen. Der unendlich ferne Punkt **u**

von **dv** ist die Centralprojektion des der Spurgeraden angehörenden Punktes der Hilfsgeraden; seine Umlegung u_0 muss daher in E_s^0 liegen. Weiter müssen aber (nach dem in § 53 bewiesenen Satze) die drei Punkte C_0, **u** und u_0 in einer Geraden liegen, d. h. man wird u_0 im Schnitte von E_s^0 mit dem durch C_0 parallel zu **dv** gezogenen Strahle $C_0 u_0 u$ erhalten.

Nachdem die umgelegte Hilfsgerade sowohl durch u_0, als auch durch den Durchstosspunkt **d** gehen muss, erhält man dieselbe als die Verbindungsgerade l_0 der beiden genannten Punkte. Endlich ergibt sich (nach dem Satze in § 53) der umgelegte Punkt p_0 im Schnitte von l_0 mit dem Verbindungsstrahle $C_0 p$.

§ 56.

30. Aufgabe: **Auf einer centralprojektivisch dargestellten Geraden sind zwei Punkte gegeben; es soll die wahre Grösse ihrer Entfernung ermittelt werden.**

Seien **dv** [Fig. 43, Taf. II] die gegebene Gerade, **a** und **b** die Centralprojektionen der beiden Punkte auf derselben und **A** (Hauptpunkt), **AC** (Distanz) die bekannten Bestimmungsstücke für das Projektionscentrum.

Im Prinzip ist die Aufgabe leicht gelöst. Man hätte nur durch die Gerade **dv** eine beliebige Ebene zu legen und hierauf die Gerade mit den beiden in ihr liegenden Punkten um die Bildflächtrace dieser Ebene umzulegen, um die gesuchte wahre Grösse sofort zu erhalten.

Da jedoch durch die Gerade **dv** unendlich viele Ebenen gelegt werden können, so wird es sich empfehlen, unter den letzteren von vornherein eine solche zu wählen, welche die einfachste Konstruktion gestattet.

Hierzu eignet sich, wie ebenso leicht dargethan als eingesehen werden kann, am besten die durch **dv** gehende zur Bildebene senkrechte Ebene $P_v P_b$. Da die Fluchttrace P_v dieser Ebene durch den Hauptpunkt **A** geht, so ist die Entfernung des Projektionscentrums von derselben unmittelbar der Distanz gleich, und man erhält mithin das um P_v umgelegte Projektionscentrum C_0, indem man einfach auf der durch **A** senkrecht zu P_v gezogenen Geraden die Distanz **AC** von **A** aus nach C_0 aufträgt.

Die Umlegung wird nun im Weiteren ebenso wie im allgemeinen Falle bewerkstelligt. Man hat nämlich bloss den der

Geraden **vd** entsprechenden umgelegten Fluchtstrahl $C_0 v$ zu ermitteln, indem man das um E_v in die Bildebene gedrehte Centrum C_0 mit **v** geradlinig verbindet, und zu demselben durch **d** eine Parallele zu führen, um sofort die umgelegte Gerade l_0 und auf der letzteren mittels der Strahlen $C_0 a$ und $C_0 b$ die umgelegten Punkte a_0 und b_0 zu erhalten. Die Strecke $a_0 b_0$ liefert bereits die wahre Grösse der centralprojektivisch gegebenen Strecke **ab**.

§ 57.

31. Aufgabe: **Es ist der Winkel zu bestimmen, welchen eine Gerade im Raume mit ihrer Centralprojektion einschliesst.**

Die Gerade liegt durch ihre Centralprojektion **dv** [Fig. 44, Taf. II] gegeben vor. **A** sei der Hauptpunkt und **AC** die Distanz.

Um den Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Centralprojektion bildet, zu ermitteln, haben wir zunächst durch die beiden genannten Geraden eine Ebene zu legen. Dies ist offenbar die durch die Gerade **dv** gehende centralprojizierende Ebene. Die beiden Tracen P_v und P_b einer derartigen Ebene fallen bekanntlich mit der Centralprojektion **dv** zusammen.

Bestimmen wir für die besagte Ebene das umgelegte Projektionscentrum C_0, und verbinden wir dasselbe mit dem Fluchtpunkte **v** der Geraden, so ergibt sich, wie bekannt, in $C_0 v$ der um die Fluchttrace P_v in die Bildebene umgelegte Fluchtstrahl. Da die umgelegte Gerade selbst zu $C_0 v$ parallel ist, so repräsentiert bereits der von $C_0 v$ und E_v eingeschlossene Winkel $dv C_0 = \alpha$ die wahre Grösse des gesuchten Neigungswinkels.

§ 58.

32. Aufgabe: **In einer Ebene ist ein Polygon durch seine Centralprojektion gegeben; es ist dessen wahre Grösse und Form durch Umlegung zu finden.**

Die Ebene des Polygons sei $E_v E_b$ [Fig. 45, Taf. II]; die Centralprojektion des letzteren **abcde**; endlich seien **A** und **AC** die Bestimmungsstücke für die Lage des Projektionscentrums im Raume.

Obwohl nach den vorausgeschickten Darlegungen (§§ 51, 52, 53, 55) über das Umlegen von Punkten und Geraden einer Ebene die vorliegende Aufgabe durchaus keine Schwierigkeiten bieten kann, so wollen wir dieselbe dennoch namentlich aus dem Grunde durch-

führen, weil sich überall dort, wo mehrere Punkte und Geraden eines ebenen Gebildes, beispielsweise die eines Polygons, umzulegen sind, die Konstruktion verschiedenartig vereinfachen lässt.

Vor allem wird man auch hier, wie in den vorhergegangenen analogen Fällen, das um E_v umgelegte Projektionscentrum C_0 zu bestimmen haben.

Verlängern wir beispielsweise zunächst die erste Polygonseite **ab** bis zu ihrem Schnitte mit den Tracen E_v und E_b der Ebene **E** des Polygons, wodurch man deren Fluchtpunkt v_1 und Durchstosspunkt d_1 erhält, so kann dieselbe auf bekannte Weise dadurch umgelegt werden, dass man durch d_1 zu dem ihr entsprechenden Fluchtstrahle $C_0 v_1$ die Parallele zieht und auf dieser mittels der Strahlen $C_0 a$ und $C_0 b$ die umgelegten Polygoneckpunkte a_0 und b_0 bestimmt.

Hierdurch ist man nunmehr schon in die Lage versetzt, alle übrigen Punkte und Geraden des vorliegenden ebenen Gebildes durch ein abgekürztes Verfahren umzulegen und zu bestimmen. So wird etwa die zweite Polygonseite **bc** sofort umgelegt, wenn man **bc** bis zum Schnitte d_2 mit E_b verlängert und d_2 mit b_0 verbindet. Auf $d_2 b_0$ kann der umgelegte Eckpunkt c_0 entweder mittels des Strahles $C_0 c$ oder auf nachstehende Art ermittelt werden. Man zieht in der Projektion die Diagonale **ac**, welche E_b in δ trifft. Die Umlegung derselben erhält man als Verbindungsgerade der Punkte a_0 und δ. Der Schnitt von $a_0 \delta$ mit $d_2 b_0$ bestimmt auf $d_2 b_0$ ebenfalls den verlangten Punkt c_0.

Die Verlängerung von **cd** bis zur Trace E_b ergibt den Durchstosspunkt d_3; die umgelegte Seite ist sodann $d_3 c_0$, während der Eckpunkt d_0 derselben mittels des Strahles $C_0 d$ erhalten wird. Bestimmt man ferner den Schnitt v_4 von **de** mit der Fluchttrace E_v, so findet man die umgelegte Seite $d_0 e_0$ unmittelbar als die Parallele durch d_0 zu dem ihr zugehörigen Fluchtstrahle $C_0 v_4$ und in ihrem Schnitte mit $C_0 e$ den Pnnkt e_0. Die Umlegung der letzten Polygonseite **ae** ergibt sich durch blosse Verbindung der Punkte a_0 und e_0.

Aus den hier vollzogenen Konstruktionen ist ohne weiteren Kommentar zu ersehen, welcher Art die Vereinfachungen sind, die bei der Umlegung eines ebenen Gebildes auftreten. Nebenbei sei nur bemerkt, dass die Punkte d_1, δ, d_4 . . ., welche sich in der Bildflächtrace (Drehaxe) befinden und die Schnittpunkte von **ab**, **ac**, **ed** . . . mit der Bildebene repräsentieren, bei der Umlegung

um E_b selbstverständlich ihre Lage nicht ändern, also unverändert bleiben. Im Laufe der nachfolgenden Aufgaben werden wir noch Vereinfachungen anderer Art kennen lernen, welche jedoch mehr oder weniger besonderer Art sind und teilweise spezielle Lagenbeziehungen voraussetzen. Ein Beispiel hierfür möge gleich das nachstehende Problem bieten.

§ 59.

33. Aufgabe: **Die Centralprojektion eines in einer gegebenen Ebene liegenden Quadrates ist unter der Voraussetzung zu konstruieren, dass die Centralprojektion der einen Quadratseite als bekannt vorliegt.**

Die Ebene des Quadrates sei $E_v E_b$ [Fig. 46, Taf. II], die Gerade $\overline{12}$ stelle die Centralprojektion der gegebenen Quadratseite dar; ferner sei (A, C) das Projektionscentrum, dessen Umlegung C_0 auf die bereits mehrfach besprochene Art bewerkstelligt wurde.

Vorstehende Aufgabe könnte man dadurch lösen, dass man zuerst die Seite $\overline{12}$ um E_b in die Bildebene umlegt, in der Umlegung das Quadrat wirklich zeichnet, und schliesslich die Centralprojektionen der übrigen Seiten durch „Zurückführung“ bestimmt.

Die besonderen Lagenbeziehungen, welche zwischen den Seiten und den Diagonalen eines Quadrates herrschen, lassen jedoch eine einfachere und elegantere Erledigung der gestellten Aufgabe zu.

Verlängern wir nämlich die Seite $\overline{12}$ so weit, bis in E_v ihr Fluchtpunkt v erhalten wird, so wird der dieser Seite entsprechende um E_v umgelegte Fluchtstrahl durch $C_0 v$ dargestellt.

Nachdem ferner die durch 1 und 2 gehenden Quadratseiten $\overline{14}$ und $\overline{23}$ zu $\overline{12}$ senkrecht stehen, also auch untereinander parallel sind, so wird der diesen Geraden entsprechende umgelegte Fluchtstrahl $C_0 v_1$ mit dem Fluchtstrahle $C_0 v$ einen rechten Winkel bilden müssen. Demgemäss erhalten wir im Schnitte v_1 von E_v mit dem durch C_0 senkrecht zu $C_0 v$ gezogenen Strahle den Fluchtpunkt der vorgenannten Quadratseiten und in $1v_1$ und $2v_1$ deren Centralprojektionen.

Halbieren wir ferner den rechten Winkel $v C_0 v_1$ durch den Strahl $C_0 v_2$, so wird dieser, da er mit den Fluchtstrahlen $C_0 v$ und $C_0 v_1$ der Quadratseiten den Winkel von 45° einschliesst, den um-

gelegten Fluchtstrahl der einen Diagonale des Quadrates, und sein Schnittpunkt v_2 mit E_v den Fluchtpunkt der letzteren vorstellen.

Die Verbindungsgerade $1v_2$ bestimmt als Centralprojektion der Diagonale des gegebenen Gebildes auf der Geraden $2v_1$ den dritten Eckpunkt 3 des Quadrates, durch welchen Punkt schliesslich die vierte Quadratseite, als parallel mit $\overline{12}$, nach dem Fluchtpunkte v zu ziehen ist.

§ 60.

34. Aufgabe: **Eine Ebene ist durch ihre Tracen und ihre Neigung gegen die Bildebene bestimmt; ferner ist die Centralprojektion eines in dieser Ebene liegenden gleichseitigen Dreieckes gegeben; est ist die Lage des Projektionscentrums zu ermitteln.**

Seien E_v, E_b [Fig. 47, Taf. II] die Tracen der gegebenen Ebene E, und α (seitwärts gezeichnet) ihr Neigungswinkel gegen die Bildebene; abc sei die Centralprojektion des in dieser Ebene liegenden gleichseitigen Dreieckes.

Verlängern wir die gegebenen Centralprojektionen ab, bc, ac der Dreieckseiten bis zu ihren Schnittpunkten v_1, v_3 und v_2 mit E_v, so erhalten wir in den bezeichneten Punkten ihre bezüglichen Fluchtpunkte v_1, v_3, v_2.

Die um E_v in die Bildebene umgelegten Fluchtstrahlen der Dreieckseiten ab und ac müssen beziehungsweise durch die Fluchtpunkte v_1 und v_2 gehen und, da das Dreieck im Raume, also auch das um E_b umgelegte Dreieck ein gleichseitiges sein soll, den Winkel von 60° einschliessen. Nachdem aber der Scheitel dieses Winkels das umgelegte Projektionscentrum C_0 darstellt, so folgt, dass letzteres auf jenem Kreise K_1 liegen muss, welcher über v_1v_2 als Sehne den Winkel von 60° als Peripheriewinkel umfasst.

Auf gleiche Weise ergibt sich, dass auch die durch v_2 und v_3 gehenden umgelegten Fluchtstrahlen der Dreieckseiten ac und bc den Winkel von 60° einschliéssen müssen, dass also das umgelegte Projektionscentrum C_0 auch auf jenem Kreise K_2 liegen wird, welcher über der Sehne v_2v_3 den Winkel von 60° fasst, dass sich mithin C_0 im Schnitte der beiden Kreise K_1 und K_2 ergeben muss.

Verlängert man weiter die Projektionen ab, ac, bc bis zu deren Schnitten d_1, d_2 und d_3 mit der Bildflächtrace E_b, und

führt man durch die genannten Schnittpunkte die umgelegten Dreieckseiten beziehungsweise parallel zu den betreffenden Fluchtstrahlen C_0V_1, C_0V_2 und C_0V_3, so erhält man sofort das umgelegte Dreieck $a_0b_0c_0$, welches, den ausgeführten Konstruktionen zufolge, in der That gleichseitig ist.

Es erübrigt noch die Bestimmung der Lage des Projektionscentrums.

Wenn von C_0 aus die Senkrechte C_0A_1 auf E_v gefällt wird, welche E_v in dem Nebenhauptpunkte A_1 trifft, so wissen wir, dass auf dieser Senkrechten auch der Hauptpunkt A liegen muss, und dass sich die zu bestimmende „Distanz“ als Kathete AC_1 eines rechtwinkligen Dreieckes AA_1C_1 ergibt, in welchem einerseits die Hypotenuse $A_1C_1 = A_1C_0$, und andererseits der der Kathete AC_1 gegenüberliegende Winkel dem gegebenen Neigungswinkel α der Ebene E_vE_b gegen die Bildebene gleich ist. Die zweite Kathete AA_1 des besagten Dreieckes AA_1C_1 repräsentiert den Abstand des Hauptpunktes A von E_v, während A selbst den Hauptpunkt, und AC_1 die gesuchte Distanz darstellt.

§ 61.

35. Aufgabe: **Ein in der Bildebene gegebenes Viereck soll die Centralprojektion eines Quadrates von gegebener Seitenlänge vorstellen; es sind die Tracen der Ebene dieses Quadrates, das um die Fluchttrace umgelegte Projektionscentrum und das um die Bildflächtrace umgelegte Quadrat zu konstruieren.**

Das in der Bildebene gegebene Viereck sei **abcd** [Fig. 48, Taf. II], ferner sei λ die wahre Grösse der Quadratseite.

Die einander gegenüberliegenden Viereckseiten **ab** und **cd** sind der Voraussetzung nach die Centralprojektionen zweier einander gegenüberliegenden Quadratseiten, d. i. zweier parallelen Geraden von gleicher Länge; ihr gegenseitiger Schnitt V_1 muss daher gleichzeitig ihr gemeinschaftlicher Fluchtpunkt sein. Ebenso erhält man im Schnitte V_2 von **ad** und **bc** den Fluchtpunkt der beiden anderen Quadratseiten. Die Verbindungsgerade dieser beiden Fluchtpunkte V_1 und V_2 wird somit bereits die Fluchttrace E_v der Ebene des Quadrates vorstellen.

Nachdem ferner die beiden Paare gegenüberliegender Quadratseiten aufeinander senkrecht stehen, so müssen auch deren um-

gelegte Fluchtstrahlen, d. h. jene Geraden, welche v_1 und v_2 mit dem (bisher noch unbekannten) umgelegten Centrum C_0 verbinden, einen rechten Winkel bilden.

Das umgelegte Projektionscentrum C_0 wird mithin auf dem über $v_1 v_2$ als Durchmesser gezeichneten Kreise K_1 liegen.

Denken wir uns weiter die Diagonalen **ac** und **bd** gezogen, und diese bis zu ihren Fluchtpunkten v_3 und v_4 in E_v verlängert, so haben wir ein neues Paar centralprojektivisch dargestellter Geraden, welche gleichfalls einen Winkel von 90° einschliessen.

Das umgelegte Projektionscentrum C_0 wird also auch auf dem über $v_3 v_4$ als Durchmesser beschriebenen Kreise K_2, mithin im Schnitte von K_1 und K_2 liegen müssen.

Denken wir uns nun beispielsweise jene Quadratseite, welcher die gegebene Centralprojektion **bc** entspricht, nach $b_0 c_0$ umgelegt. Wir wissen, dass $b_0 c_0$ zu dem umgelegten Fluchtstrahle $C_0 v_2$ parallel sein muss und ebenso ist bekannt, dass (nach dem Satze in § 53) die Punkte b_0 und c_0 beziehungsweise auf den Verbindungsstrahlen $C_0 b$ und $C_0 c$ liegen müssen.

Nachdem überdies die umgelegte Quadratseite $b_0 c_0$ die gegebene Länge λ besitzen soll, so werden wir zwischen den beiden Strahlen $C_0 b$ und $C_0 c$ parallel zu $C_0 v_2$ eine Strecke $b_0 c_0$ von der Länge λ einzuschalten haben.

Zu diesem Zwecke tragen wir auf dem Fluchtstrahle $C_0 v_2$ von C_0 aus die gegebene Strecke $C_0 \gamma = \lambda$ auf, und durchschneiden $C_0 c$ mittels der durch γ parallel zu $C_0 b$ gezogenen Geraden in c_0. Die durch c_0 parallel zu $C_0 v_2$ geführte Gerade $c_0 b_0$ wird nunmehr die geforderten Eigenschaften besitzen, oder mit anderen Worten die den gestellten Bedingungen entsprechende, umgelegte Quadratseite vorstellen.

Der so erhaltene, der Umlegung $b_0 c_0$ der Quadratseite und ihrer Centralprojektion **bc** gemeinschaftliche Punkt δ_2 repräsentiert gleichzeitig den zugehörigen Durchstosspunkt δ_2 der genannten Geraden mit der Bildebene, und die durch ihn parallel zu E_v gezogene Gerade bestimmt die Bildflächtrace E_b der Ebene des Quadrates.

Die übrigen Seiten des Quadrates **abcd** sind nun auf bekannte Weise nach $b_0 a_0$, $c_0 d_0$ und $a_0 d_0$ umzulegen resp. ist das Quadrat $a_0 b_0 c_0 d_0$ aus der bereits ermittelten Seite $b_0 c_0$ mit Zuhilfenahme der centralen Projektion **abcd** desselben zu ergänzen.

§ 62.

Die Teilungspunkte und der Teilkreis einer centralprojektivisch dargestellten Geraden.

In § 56, Aufgabe 30 haben wir bereits eine Methode kennen gelernt, die wahre Grösse einer centralprojektivisch dargestellten geradlinigen Strecke zu ermitteln. Die nachfolgenden Betrachtungen werden eine zweite Lösungsweise der angeführten Aufgabe liefern.

Denken wir uns auf einer Geraden $\mathsf{l} = \mathsf{dv}$ [Fig. 49, Taf. III] eine Strecke ab gegeben, deren wahre Grösse zu bestimmen ist.

Wir legen zu diesem Zwecke durch dv eine beliebige Ebene $\mathsf{E_v E_b}$, bestimmen das um $\mathsf{E_v}$ umgelegte Projektionscentrum $\mathsf{C_0}$, ferner ermitteln wir mit Hilfe des Fluchtstrahles $\mathsf{C_0 v}$ die umgelegte Gerade $\mathsf{l_0}$ und auf dieser die umgelegten Punkte $\mathsf{a_0}$ und $\mathsf{b_0}$ mittels der Strahlen $\mathsf{C_0 a}$ und $\mathsf{C_0 b}$. Es repräsentiert sodann, wie bekannt, $\mathsf{a_0 b_0}$ die gesuchte wahre Grösse von ab.

Drehen wir nun die Gerade $\mathsf{l_0}$ samt den Punkten $\mathsf{a_0}$ und $\mathsf{b_0}$ um den Durchstosspunkt d so lange, bis sie mit der Bildflächtrace $\mathsf{E_b}$ der beliebigen durch $\mathsf{l}^{\mathsf{v}}_{\mathsf{d}}$ gelegten Ebene E zusammenfällt.

Wir übertragen somit die Längen $\mathsf{da_0}$ und $\mathsf{db_0}$ von d aus in die Bildebentrace $\mathsf{E_b}$ nach $\mathsf{d}\alpha$ resp. $\mathsf{d}\beta$, so, dass $\alpha\beta = \mathsf{a_0 b_0}$ ebenfalls die wahre Grösse von ab repräsentiert. Verbinden wir $\mathsf{a_0}$ mit α und $\mathsf{b_0}$ mit β, so müssen diese Verbindungsgeraden $\mathsf{a_0}\alpha$ und $\mathsf{b_0}\beta$ selbstverständlich zu einander parallel sein. Diese beiden Geraden $\mathsf{a_0}\alpha$ und $\mathsf{b_0}\beta$, welche offenbar gleiche Winkel mit der Bildflächtrace der durch dv gelegten Ebene E und der zu teilenden Geraden $\mathsf{l_0}$ einschliessen, können offenbar als die Umlegungen zweier in der Ebene $\mathsf{E_v E_b}$ liegenden parallelen Geraden betrachtet werden. Die Centralprojektionen der bezeichneten Geraden ergeben sich ohne weiteres als die Verbindungsgeraden $\mathsf{a}\alpha$ und $\mathsf{b}\beta$.

Da die umgelegten Geraden $\mathsf{a_0}\alpha$ und $\mathsf{b_0}\beta$ parallel sind, so müssen deren Centralprojektionen $\mathsf{a}\alpha$ und $\mathsf{b}\beta$ einen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt besitzen, d. h. sie müssen die Fluchttrace $\mathsf{E_v}$ in einem und demselben Punkte T schneiden.

Der diesem Fluchtpunkte T entsprechende umgelegte Fluchtstrahl $\mathsf{C_0 T}$ wird selbstverständlich parallel zu $\mathsf{a_0}\alpha$ und $\mathsf{b_0}\beta$ sein. Aus der Ähnlichkeit der sich so ergebenden Dreiecke $\mathsf{C_0 v T}$ und $\mathsf{a_0 d}\alpha$ folgt, dass

$$\mathsf{vT} = \mathsf{vC_0}$$

ist, dass also T im Schnitte der Fluchttrace E_v mit dem aus dem Fluchtpunkte v mit dem Radius vC_0, d. i. der wahren Grösse des der gegebenen Geraden l zugehörigen Fluchtstrahles, beschriebenen Kreise T_k erhalten wird.

Hieraus ist leicht erkennbar, dass die wahre Grösse einer centralprojektivisch gegebenen Strecke ab, auch durch nachstehende Konstruktion gefunden werden kann.

Man durchschneidet die Fluchttrace E_v derjenigen Ebene E, welche durch die gegebene resp. zu teilende Gerade dv gelegt wurde, mit dem aus dem Fluchtpunkte v der besagten Geraden (als Mittelpunkt) durch C_0 (d. i. dem in die Bildebene um die jeweilige Fluchttrace E_v der Ebene E umgelegten Projektionscentrum) geführten Kreise T_k in T, und projiziert von T aus mittels der Strahlen Ta und Tb die Centralprojektion ab in die Bildflächtrace E_b nach $\alpha\beta$. Die so erhaltene Strecke $\alpha\beta$ repräsentiert bereits die gesuchte wahre Länge von ab.

Der Kreis T_k schneidet selbstverständlich die Fluchttrace E_v noch in einem zweiten Punkte T'. Es dürfte überflüssig sein, besonders hervorzuheben, dass diesem Punkte T' dieselben Eigenschaften wie dem Punkte T zukommen. Wenn man also von T' aus die perspektivisch gegebene Strecke ab in die Bildebene resp. in die Bildebentrace E_b nach $\alpha'\beta'$ projiziert, wird offenbar auch $\alpha'\beta' = \alpha\beta$ die wahre Grösse von ab vorstellen. Hierbei findet man gleichzeitig, dass $\alpha'\beta'$ und $\alpha\beta$ gegen den Durchstosspunkt d symmetrisch liegen.

Die beiden soeben ermittelten Punkte T und T' pflegt man die „Teilpunkte oder Teilungspunkte der Geraden dv für die Ebene $E_v E_b$“ zu nennen.

Die besagten Punkte T und T' sind dem Wesen nach die Fluchtpunkte jener beiden Parallelscharen von Geraden in der Ebene $E_v E_b$, welche mit der Geraden dv und der Bildflächtrace E_b gleiche Winkel einschliessen.

Der Teilpunkt T ist somit nichts anderes als der Fluchtpunkt paralleler Teilstrahlen, wobei wir unter der letzteren solche Geraden verstehen, die mit der zu teilenden Geraden l und der Bildflächtrace irgend einer durch l gelegten Ebene E gleiche Winkel einschliessen.

Fassen wir auch die weiteren Ergebnisse unserer Betrachtungen kurz zusammen, so finden wir in bezug auf die Lage des Teilpunktes, dass derselbe stets in der Fluchttrace der beliebigen

durch l geführten Ebene E liegt und vom Fluchtpunkte v der zu teilenden Geraden l in einem Abstande sich vorfindet, welcher der wahren Grösse des der zu teilenden Geraden entsprechenden Fluchtstrahles gleich ist.

Jeder Geraden entsprechen, da durch dieselbe unendlich viele verschiedene Ebenen geführt werden können, auch unendlich viele Teilpunkte, und zwar je zwei in der Fluchttrace jeder der Ebenen, welche durch eine gegebene Gerade gelegt werden können.

Es lässt sich ferner leicht nachweisen, dass alle diese Teilpunkte auf dem bereits bestimmten Kreise T_k liegen.

Legen wir zu diesem Zwecke durch dv eine beliebige zweite Ebene $E'_v E'_b$, und bestimmen wir wieder das um E'_v umgelegte Projektionscentrum C^1_0. Die beiden in E'_v liegenden Teilpunkte T_1 und T'_1 erhalten wir, so wie vorher, im Schnitte von E'_v mit jenem Kreise, welcher aus dem Mittelpunkte v mit dem Radius $C^1_0 v$ beschrieben wird.

Nun repräsentiert aber $C^1_0 v$ den um E'_v umgelegten Fluchtstrahl der Geraden dv, während die Strecke $C^1_0 v$ die wahre Grösse der Entfernung des Projektionscentrums im Raume von dem Fluchtpunkte v vorstellt.

Aus dieser einfachen Bemerkung folgt aber unmittelbar, dass, da die besagte Strecke von der Lage der durch dv gelegten Ebene ganz und gar unabhängig ist, also für alle durch dv geführten Ebenen dieselbe bleibt, auch $C_0 v = C^1_0 v = \ldots$ sei, und dass folglich für die sämtlichen durch v gehenden Fluchttracen die entsprechenden umgelegten Projektionscentra C_0, C^1_0, C^2_0, . . ., und mithin auch alle dem Fluchtpunkte v zukommenden Teilpunkte auf einem und demselben Kreise T_k, welchen man den „Teilkreis“ zu nennen pflegt, liegen müssen. Es gilt sonach der Satz:

„Der geometrische Ort aller Teilpunkte, welche einer gegebenen Geraden entsprechen, ist jener Kreis, welcher den Fluchtpunkt der Geraden zum Mittelpunkt hat, und dessen Radius gleich ist der wahren Grösse des der zu teilenden Geraden entsprechenden Fluchtstrahles oder, mit anderen Worten, gleich ist dem Abstande des jeweiligen Fluchtpunktes der Geraden vom Projektionscentrum im Raume.“

Bemerkung. Die Bestimmung resp. Konstruktion der wahren Grösse von ab [Fig. 49, Taf. III] vermittels Umlegung der Geraden $l = dv$ nach l_0, kann stets auch als Teilpunktkonstruktion aufgefasst werden.

Die beiden beziehungsweise durch v und d gehenden parallelen Geraden $C_0 v$ und l_0 kann man dann gleichsam als die Tracen h_v, h_b einer durch dv gelegten Hilfsebene deuten. Es repräsentiert diesfalls C_0 einen der beiden Teilpunkte der Geraden dv in der Ebene $h_v h_b$, und $a_0 b_0$ die auf der Bildflächtrace $h_b = l_0$ abgeschnittene wahre Grösse von ab.

§ 63.

Da der Mittelpunkt für den Teilkreis einer Geraden der Fluchtpunkt der letzteren, und der Radius des Teilkreises gleich dem Abstande dieses Fluchtpunktes vom Projektionscentrum im Raume ist, so folgt unmittelbar, dass untereinander parallele Geraden einen und denselben Teilkreis besitzen.

Ebenso leicht findet man, dass der Teilkreis einer zur Bildebene senkrechten Geraden mit dem „Distanzkreise“ zusammenfällt.

Gerade Linien, welche zur Bildebene parallel sind, besitzen keine eigentlichen Teilkreise.

Da nämlich in dem Falle, als eine Gerade zur Bildebene parallel ist [so wie beispielsweise die Gerade l in Fig. 50, Taf. III], der Fluchtpunkt derselben in unendlicher Entfernung liegt, mithin auch dessen Entfernung vom Projektionscentrum unendlich gross ist, kann man im uneigentlichen Sinne jede beliebige zu l senkrechte Gerade im Endlichen als den Repräsentanten des entsprechenden Teilkreises betrachten. Es wird mithin auch gestattet sein jeden beliebigen Punkt T der Fluchttrace h_v einer durch die Gerade l gelegten Ebene $h_v h_b$ als „Teilpunkt“ für die zur Bildebene parallele Gerade l aufzufassen.

Dass ein solcher beliebig gewählter Punkt T der Fluchttrace h_v thatsächlich als Teilpunkt verwendet werden kann, d. h. dass derselbe irgend eine auf der Geraden l gegebene Strecke ab auf die Bildflächtrace h_b in wahrer Grösse $\alpha\beta$ projiziert, geht einfach auch daraus hervor, dass ab$\alpha\beta$ [Fig. 50, Taf. III] die Centralprojektion eines Parallelogrammes, und die Strecken ab und $\alpha\beta$ die Centralprojektionen zweier seiner Gegenseiten darstellt, von welchen die letztere, $\alpha\beta$, unmittelbar in der Bildebene liegt.

§ 64.

36. Aufgabe: **Auf eine gegebene Ebene ist eine senkrechte Gerade zu fällen.**

Nachdem die sämtlichen auf einer Ebene E senkrecht stehenden Geraden, als untereinander parallel, einen gemeinschaft-

lichen Fluchtpunkt V_s besitzen, so wird es sich bei der Lösung der vorliegenden Aufgabe vor allem um die Lage dieses Fluchtpunktes handeln.

Der Fluchtpunkt V_s aller zur Ebene **E** senkrechten Geraden **s** ist somit der Schnittpunkt der Bildebene **BE** mit dem Fluchtstrahle σ der zu bestimmenden Senkrechten, d. h. mit jenem Strahle CV_s [Fig. 51, Taf. III], welcher durch das Projektionscentrum **C** senkrecht zu der gegebenen Ebene **E**, also auch senkrecht zu der letzteren entsprechenden Fluchtebene **VE** geführt wird.

Denken wir uns durch diesen Fluchtstrahl CV_s und durch den Hauptstrahl **CA** eine Hilfsebene gelegt. Diese Ebene wird, da CV_s senkrecht zur Ebene **VE**, und **CA** senkrecht zur Bildebene **BE** ist, selbst senkrecht zu den beiden Ebenen **VE** und **BE**, mithin auch senkrecht zur Schnittgeraden der beiden letzteren, d. i. senkrecht zur Fluchttrace E_v sein müssen.

Hieraus folgt aber, dass die genannte Hilfsebene die Bildebene **BE** in einer Geraden σ' schneidet, die durch die beiden Punkte **A** und V_s geht, und nebstbei auf der Fluchttrace E_v senkrecht steht.

Dementsprechend wird also *der gesuchte Fluchtpunkt* V_s *in jener Geraden* σ' *der Bildebene* **BE** *liegen, welche durch den Hauptpunkt* **A** *senkrecht zur Fluchttrace* E_v *der Ebene* **E** *geführt wird.*

Die vorerwähnte, durch CV_s und **CA** gelegte Hilfsebene schneidet ferner die Fluchtebene **VE** in der durch **C** gehenden, zu E_v senkrechten Geraden CA_1. Selbstverständlich muss diese Gerade, sowie überhaupt jede in **VE** durch **C** geführte Gerade, auf dem Fluchtstrahle $\sigma = CV_s$ senkrecht stehen.

Demnach sind die in der Hilfsebene liegenden Geraden CA_1 und CV_s *die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes* A_1CV_s*; dessen Hypotenuse* A_1V_s *in die Bildflächtrace der bildflächprojizierenden Hilfsebene* ACV_s *fällt, und dessen Höhe durch die Distanz* **CA** *dargestellt wird;* oder mit anderen Worten: *Die Distanz* **CA** *ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abständen* AA_1 *und* AV_s *des Hauptpunktes* **A** *von der Fluchttrace* E_v *und dem Fluchtpunkt* V_s *der Normalen zur Ebene* E_vE_b.

Mit Hilfe dieser Beziehungen bietet die Konstruktion des Normalenfluchtpunktes V_s zu einer gegebenen Ebene E_vE_b [Fig. 52, Taf. III] keine Schwierigkeiten.

Wir haben nämlich zu diesem Zwecke auf Grund der vorstehenden Betrachtungen bloss durch den Hauptpunkt **A** die zu E_v

Senkrechte AA_1 zu ziehen und hierauf das rechtwinklige Dreieck $A_1 C_1 v_s$ so zu konstruieren, dass die zu AA_1 senkrechte Gerade AC_1 der gegebenen Distanz gleich, und der Winkel $A_1 C_1 v_s$ ein rechter Winkel wird. Der sich hierbei ergebende Dreieckpunkt v_s repräsentiert sodann den gesuchten „Normalenfluchtpunkt".

In dem Dreiecke $A_1 C_1 v_s$ [Fig. 51 und 52, Taf. III] repräsentiert Av_s die orthogonale Bildflächprojektion σ' des Fluchtstrahles σ der zur Ebene E normalen Geraden; $A_1 C_1$ den Schnitt der Fluchtebene (C, E_v) oder VE mit der durch das Centrum C, resp. durch den Hauptstrahl AC und durch den der Normalen s zur Ebene E entsprechenden Fluchtstrahl σ gelegten bildflächprojizierenden Ebene, umgelegt um AA_1 in die Bildfläche, und $C_1 v_s = \sigma_0$ den gleichfalls um die Trace Av_s der besagten bildflächprojizierenden Ebene in der Bildebene umgelegten Fluchtstrahl.

Jede beliebige durch v_s geführte Gerade $v_s d$ repräsentiert somit die Centralprojektion einer zur Ebene $E_v E_b$ senkrechten Geraden.

Soll die verlangte Senkrechte zur Ebene E überdies durch einen gegebenen Punkt p gehen, so hat man einfach (wie in Aufgabe 6) den Träger $d_1 v_1$ dieses Punktes durch einen anderen $d_2 v_s$ zu ersetzen, welcher v_s zum Fluchtpunkt hat.

Da weiter jede Ebene F, welche zu einer zweiten Ebene E senkrecht ist, eine Gerade enthalten muss, welche auf der letzteren senkrecht steht, so ist einleuchtend, dass, wenn beispielsweise durch eine Gerade $d_1 v_1$ [Fig. 52, Taf. III] eine Ebene F senkrecht auf die gegebene $E_v E_b$ geführt werden soll, die Fluchttrace F_v der Ebene F durch den Normalenfluchtpunkt v_s von E gehen und gleichzeitig den Fluchtpunkt v_1 der gegebenen Geraden $d_1 v_1$ enthalten muss.

Die verlangte durch $d_1 v_1$ geführte, zur Ebene E senkrechte Ebene F wird sonach durch $F_v F_b$ dargestellt erscheinen.

§ 65.

37. Aufgabe: **Durch einen gegebenen Punkt ist eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Geraden zu führen.**

Wie sofort einleuchtend, ist die vorliegende Aufgabe eine blosse Umkehrung der vorhergehenden.

Nachdem nämlich alle zu der gegebenen Geraden dv [Fig. 53, Taf. III] senkrechten Ebenen untereinander parallel sind, werden sie eine gemeinschaftliche Fluchttrace besitzen, und der

Normalenfluchtpunkt der letzteren wird kein anderer als der Fluchtpunkt **v** der gegebenen Geraden sein. Hiernach ergibt sich unmittelbar folgende Konstruktion für die obgenannte Fluchttrace E_v.

Man wird, (da der Normalenfluchtpunkt **v**, der Hauptpunkt **A** und der Nebenhauptpunkt A_1 der auf einer Geraden **vd** senkrecht stehenden Ebene **E**, und umgekehrt, in eine und dieselbe Gerade vAA_1 fallen, welche zu der Fluchttrace E_v der betreffenden Ebene **E** normal steht), die Gerade **vA** ziehen, senkrecht zu derselben die Strecke AC_1 gleich der Distanz auftragen, und zu $vC_1 = \sigma_0$, d. i. zu den um **vA** in die Bildebene umgelegten Fluchtstrahl der Geraden $dv = s$, die Normale C_1A_1 führen. Letztere trifft **vA** im Punkte A_1.

Die zu **vA** durch A_1 senkrecht gezogene Gerade E_v bestimmt bereits die Fluchttrace der verlangten zu **dv** senkrechten Ebenen, da in anbetracht der durchgeführten Konstruktion **v** den Normalenfluchtpunkt und A_1 den Nebenhauptpunkt der Ebene **E**, also einen Punkt der Fluchttrace E_v der gesuchten Ebene **E** repräsentiert.

Nachdem die zu **dv** senkrechte Ebene E_vE_b durch den auf den Träger d_1v_1 gegebenen Punkt **p** (§ 22, Aufgabe 8) zu legen ist, wird man den Träger d_1v_1 durch einen anderen d_2v_2, dessen Fluchtpunkt v_2 in E_v liegt, zu ersetzen haben, und hierauf durch d_2 die Bildflächtrace E_b parallel zu E_v führen, um in E_bE_v die Ebene dargestellt zu erhalten, welche durch **p** geht und zu **vd** senkrecht ist.

§ 66.

38. Aufgabe: **Es ist der Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen.**

Da man unter dem Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene jenen Winkel versteht, welchen die Gerade mit ihrer orthogonalen Projektion auf die besagte Ebene einschliesst, so wird man folgendermassen zum Ziele gelangen.

Wir werden vor allem durch die gegebene Gerade **dv** [Fig. 54, Taf. III] eine zu der gleichfalls gegebenen Ebene E_vE_b senkrechte Ebene F_bF_v legen, um im Durchschnitte v_2d_2 der beiden Ebenen E_vE_b und F_vF_b die obgenannte orthogonale Projektion von **dv** auf E_vE_b zu erhalten.

Zu besagtem Zwecke werden wir demnach den Normalen-

fluchtpunkt v_1 der Ebene $E_v E_b$ zu ermitteln, und diesen mit v zu verbinden haben, um die Fluchttrace F_v der vorbezeichneten Hilfsebene $F_v F_b$ zu erhalten. Der Schnittpunkt v_2 von E_v und F_v ist bereits der Fluchtpunkt der orthogonalen Projektion von dv auf $E_v E_b$.

Es erübrigt somit nur noch, die wahre Grösse $N_e = vC_0v_2$ des Winkels vpv_2 zu ermitteln, welchen die eben gefundene orthogonale Projektion $v_2 d_2$ mit der gegebenen Geraden dv selbst einschliesst. Die wahre Grösse $N_e = vC_0v_2$ des verlangten Neigungswinkels wird sich sofort durch Umlegung (Aufgabe 27) der der Ebene $F_v F_b$ entsprechenden Fluchtebene ergeben, indem wir diese letztere samt den den beiden in F_v liegenden Fluchtpunkten v und v_2 zukommenden Fluchtstrahlen um F_v in die Bildebene nach $C_0 v$ und $C_0 v_2$ hineindrehen.

Eine zweite Konstruktionsmethode beruht auf der folgenden Eigenschaft.

Bestimmt man die orthogonale Projektion l einer Geraden L auf eine Ebene E, und führt man gleichzeitig durch einen Punkt von L eine Senkrechte s zu der Ebene E, so bilden bekanntlich die drei Geraden L, l und s ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Winkel zwischen L und l der Neigungswinkel von L gegen E, und der Winkel zwischen L und s der Komplementwinkel des ersten ist.

Ermitteln wir daher wieder den Normalenfluchtpunkt v_1 der gegebenen Ebene $E_v E_b$ [Fig. 55, Taf. III] und bestimmen die wahre Grösse y des Winkels, welchen die beiden den Fluchtpunkten v und v_1 entsprechenden Fluchtstrahlen bilden, durch Umlegung um $vv_1 = e_v$ nach vC_0v_1, so wird der zu diesem Winkel y gehörige Komplementwinkel $N_e = SC_0v = 90° - y$ den gesuchten Neigungswinkel der Geraden dv mit der Ebene $E_v E_b$ in wahrer Grösse darstellen.

§ 67.

39. Aufgabe: **Es ist der Neigungswinkel zweier Ebenen $E_v E_b$ und $F_v F_b$ zu bestimmen.**

Der Neigungswinkel zweier Ebenen wird bekanntlich als jener Winkel definiert, welchen die Schnittgeraden der beiden Ebenen mit einer zu ihrer gemeinsamen Geraden senkrechten Ebene untereinander bilden.

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, in welcher Art und Weise

die graphische Durchführung für die Lösung der vorliegenden Aufgabe zu realisieren ist.

Da alle Geraden und Ebenen bei centralprojektivischer Darstellung zu ihren bezüglichen Fluchtelementen parallel sind, so ist einleuchtend, dass jede Winkelbestimmung unmittelbar an den letzteren selbst vorgenommen werden kann.

Sind nun E_v und F_v [Fig. 56, Taf. III] die Fluchttracen der beiden gegebenen Ebenen **E** und **F**, so wird deren Schnittpunkt **v** den Fluchtpunkt der Schnittgeraden von **E** und **F** vorstellen und da die Fluchtebenen den nämlichen Winkel wie die gegebenen Ebenen selbst einschliessen, wird es sich weiter um die Bestimmung dieses Winkels, beziehungsweise um jenen Winkel handeln, welchen die den Schnittgeraden der Ebenen **E** und **F** mit der Ebene des Neigungswinkels entsprechenden Fluchtstrahlen miteinander bilden.

Bestimmen wir demnach (wie in Aufgabe 37) die Fluchttrace S_v jener Ebene, welche durch das Projektionscentrum **C** geführt zu der in **v** verschwindenden Schnittgeraden **Cv** der Fluchtebenen senkrecht steht, so wird dieselbe die Fluchttracen E_v und F_v beziehungsweise in den Punkten v_1 und v_2 treffen, welche, den obigen Erörterungen gemäss, die Fluchtpunkte der Schenkel des gesuchten Neigungswinkels N_e vorstellen.

Der besagte Winkel wird in wahrer Grösse $N_e = v_1 C_0 v_2$ sofort erhalten, wenn man die den Punkten v_1 und v_2 entsprechenden Fluchtstrahlen Cv_1 und Cv_2 um S_v in die Bildebene nach $C_0 v_1$ und $C_0 v_2$ umlegt.

§ 68.

Zweite Lösungsmethode der vorstehenden Aufgabe.

Es kann leicht vorkommen, dass die vorher gefundenen Punkte v_1 und v_2 nicht mehr innerhalb der Grenzen der Konstruktionsebene erhalten werden.

In diesem Falle kann der Neigungswinkel der beiden Ebenen **E** und **F** auch wie folgt ermittelt werden.

Denken wir uns durch einen beliebigen Punkt **P** zu den beiden Ebenen **E** und **F** [Fig. 57, Taf. III] die Senkrechten s_1 und s_2 gezogen, so bestimmen die letzteren eine Ebene, welche auf den beiden Ebenen **E** und **F**, also auch auf der Schnittgeraden **S** beider senkrecht steht.

Besagte Ebene schneidet daher die beiden gegebenen Ebenen **E** und **F** in zwei Geraden l_1 und l_2, welche den Neigungs-

winkel N_e von **E** und **F** bilden. Nachdem aber s_1 und s_2 beziehungsweise auf l_1 und l_2 senkrecht stehen, so ist der Winkel, den diese miteinander einschliessen, ebenfalls gleich N_e oder mit anderen Worten: *Zwei sich schneidende Geraden, welche auf zwei Ebenen senkrecht stehen, schliessen denselben Winkel ein, wie diese Ebenen.*

Um daher den Neigungswinkel N_e der beiden Ebenen E_v und F_v [Fig. 58, Taf. III] in wahrer Grösse zu ermitteln, konstruieren wir die diesen Ebenen entsprechenden Normalenfluchtpunkte **v** und **v'** und bestimmen den Winkel der ihnen zugehörigen Fluchtstrahlen. Letzteres kann durch Umlegung derselben um $S_v = vv'$ in die Bildebene nach $C_0 v$ und $C_0 v'$ geschehen.

Im vorliegenden Falle jedoch wurde diese Umlegung in einer von der allgemeinen Methode abweichenden, einfacheren Art bewerkstelligt.

Gelegentlich der Konstruktion der Normalenfluchtpunkte **v** und **v'** erhalten wir nämlich gleichzeitig auch die wahren Grössen $\sigma_0 = C_1 v$ resp. $\sigma'_0 = C_1^1 v'$ ihrer Entfernungen vom Projektionscentrum oder mit anderen Worten die wahren Grössen der den betreffenden Punkten entsprechenden Fluchtstrahlen.

Selbstverständlich muss das um $S_v = vv'$ in die Bildebene umgelegte Projektionscentrum C_0 die nämlichen Entfernungen $C_1 v$ resp. $C_1^1 v'$ von **v** und **v'** besitzen. Man erhält daher C_0 im Schnitte der beiden aus **v** und **v'** durch C_1 beziehungsweise C_1^1 beschriebenen Kreisbögen, so dass C_0 den Scheitel und $N_e = v C_0 v'$ die gesuchte wahre Grösse des Neigungswinkels der beiden Ebenen **E** und **F** darstellt.

§ 69.

40. Aufgabe: **Es ist der Abstand eines Punktes von einer Ebene zu ermitteln.**

Um die wahre Grösse der Entfernung, eines (auf dem Träger $\delta\varphi$) gegebenen Punktes **p** von einer gleichfalls gegebenen Ebene $E_v E_b$ [Fig. 59, Taf. III] zu finden, stellen wir diesen Abstand, auf Grund der vorliegenden Bestimmungstücke, zunächst centralprojektivisch dadurch dar, dass wir (wie in Aufgabe 36) vermittels des der Ebene $E_v E_b$ entsprechenden Normalenfluchtpunktes v_s durch **p** die Senkrechte $v_s p$ zu der besagten Ebene führen, und den Schnittpunkt σ von **E** mit $v_s pd$ mittels der be-

reits vorhandenen durch pv_s und $\delta\varphi$ gehenden Hilfsebene $h_v h_b$ feststellen.

Offenbar repräsentiert die Strecke $p\sigma$ bereits die Centralprojektion des gesuchten Abstandes. Die wahre Grösse derselben kann nun einfach mittels eines Teilpunktes der Geraden $v_s p$ konstruiert werden. Nachdem aber diesfalls schon gelegentlich der Bestimmung des Normalenfluchtpunktes v_s der Abstand des Teilpunktes vom Projektionscentrum durch die Strecke $v_s C_1$ angegeben wurde, so wird (nach den Erörterungen des § 62) der eine Teilpunkt T der Geraden $v_s p$ für die Hilfsebene $h_v h_b$ direkt dadurch erhalten, dass man auf der Fluchttrace h_v vom Fluchtpunkte v_s die wahre Länge $v_s C_1$ des der Geraden $v_s d$ zugehörigen Fluchtstrahls nach T aufträgt.

Projiziert man endlich von T aus den gegebenen Punkt p und den Fusspunkt σ der Senkrechten $v_s d$ auf die Bildflächtrace h_b nach p' und σ', so wird durch $p'\sigma'$ bereits die wahre Grösse von $p\sigma$, d. i. die wahre Grösse des Abstandes des Punktes p von der Ebene $E_v E_b$ angegeben.

Eine zweite einfache Lösung der vorstehenden Aufgabe wäre auch die, dass man durch den gegebenen Punkt p eine Ebene $e_v e_b$ parallel zu $E_v E_b$ legt und den Abstand dieser beiden Ebenen voneinander bestimmt.

§ 70.

41. Aufgabe: **Es ist die wahre Grösse des Abstandes zweier parallelen Ebenen zu ermitteln.**

Da der Abstand zweier parallelen Ebenen durch den Abstand der Punkte, in welchen dieselben von einer zu ihnen senkrechten Geraden getroffen werden, gemessen wird, oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch den Abstand zweier parallelen Geraden bestimmt wird, in welchen diese Ebenen von einer beliebigen dritten zu ihnen senkrechten Ebene geschnitten werden, so wird man am einfachsten folgendermassen zum Ziele gelangen.

Seien $E_v E_b$ und $E_v E_b'$ [Fig. 60, Taf. III] die beiden gegebenen zu einander parallelen Ebenen.

Denken wir uns durch das Projektionscentrum C jene zur Bildebene senkrechte Ebene P gelegt, deren Bildflächtrace P_b die durch den Hauptpunkt A senkrecht zu E_v gezogene Gerade ist, so wird diese Ebene P, nachdem sie zu den Tracen E_b und E_b' der

gegebenen Ebenen normal ist, auch auf den beiden Ebenen **E** und **E'**, sowie auf der ihnen entsprechenden Fluchtebene senkrecht stehen.

Hieraus folgt auf Grund der eingangs gegebenen Erklärung, dass der Abstand der beiden parallelen Schnittgeraden der Ebene **P** mit den Ebenen **E** und **E'**, den Abstand der letzteren darstellen werde.

Denken wir uns die Ebene **P** um ihre Trace P_b in die Bildebene umgelegt, so gelangt das Projektionscentrum **C** nach C_0. Die Gerade $C_0 A_1$ stellt mithin den umgelegten Schnitt der Ebene **P** mit der Fluchtebene (C, E_v) vor.

Die Schnittgeraden der Ebene **P** mit den Ebenen **E** und **E'** erscheinen in der Umlegung als jene zu $C_0 A_1$ parallelen Geraden l_0 und l'_0, welche durch die bezüglichen Tracenschnittpunkte **b** und **a** gehen.

Selbstverständlich wird es genügen bloss die eine dieser Geraden, etwa l'_0 zu ziehen. Den gesuchten Abstand erhält man sodann als die Länge des von **b** auf l'_0 gefällten Perpendikels **bf**.

Berücksichtigt man, dass der $\sphericalangle$ **fab** $=\sphericalangle C_0 A_1 A = \sphericalangle n_b$ den Neigungswinkel der Ebene **E** gegen die Bildebene vorstellt, so ist nach der durchgeführten Konstruktion

$$bf = ab \sin n_b.$$

Uberträgt man die Tracenentfernung **ab** von **a** aus auf l'_0 nach **ac** und fällt von **c** eine Senkrechte **cd** auf P_b, so ist offenbar deren Länge gleich

$$cd = ae \,.\, \sin n_b = ab \,.\, \sin n_b = bf,$$

woraus folgt, dass auch durch die Konstruktion dieses rechtwinkligen Dreieckes **afb** in **cd** der gesuchte Abstand der beiden parallelen Ebenen $E_v E_b$ und $E_v E'_b$ erhalten wird.

Ist zu einer gegebenen Ebene **E** in einem gegebenen Abstande ε eine zweite Ebene **E'** parallel zu führen, so werden die Schlussfolgerungen, als die entgegengesetzte Aufgabe von der eben besprochenen betreffend, in umgekehrter Ordnung zum Ausdrucke gelangen. Dass diesfalls zwei symmetrisch gegen **E** liegende Ebenen der gestellten Bedingung entsprechen werden, ist selbstverständlich.

§ 71.

42. Aufgabe: **Est ist der kürzeste Abstand zweier sich nicht schneidender Geraden, sowohl seiner Lage als auch seiner wahren Grösse nach zu konstruieren.**

Stellen wir uns im Raume zwei sich nicht schneidende also nicht in einer Ebene liegende gerade Linien l_1 und l_2 vor, so wird, wenn eine dritte Gerade existiert, welche die beiden Geraden l_1 und l_2 beziehungsweise in a_1 und a_2 schneidet, nebstbei aber auf beiden zu gleicher Zeit senkrecht steht, leicht nachweisbar sein, dass in diesem Falle die Strecke $a_1 a_2$ den kürzesten Abstand der beiden Geraden l_1 und l_2 vorstellt, da die Entfernung irgend zweier Punkte von l_1 und l_2 stets als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes dargestellt werden kann, in welchem die eine Kathete parallel und gleich lang mit $a_1 a_2$ ist.

Wie die nachstehende Konstruktion zeigen wird, lässt sich immer eine solche kürzeste Strecke, wie $a_1 a_2$, zwischen zwei sich nicht schneidenden Geraden einschalten.

Die beiden gegebenen sich nicht schneidenden (kreuzenden) Geraden seien $d_1 v_1 = l_1$ [Fig. 61, Taf. III] und $d_2 v_2 = l_2$.

Denken wir uns nämlich durch die eine der Geraden, etwa durch l_2, eine Ebene E_2 parallel zur zweiten Geraden l_1 geführt, so hat jeder Punkt der letzteren von E_2 die nämliche Entfernung k d. i. den gleichen senkrechten Abstand, und es wird sich daher, wenn es bloss darauf ankommt diesen Abstand k an und für sich zu bestimmen, nur darum handeln die Entfernung eines Punktes der Geraden l_1 von E_2 festzustellen oder auch, wenn man durch l_1 eine Ebene E_1 parallel zu E_2 führt, den Abstand der beiden parallelen Ebenen E_1 und E_2 zu ermitteln.

Handelt es sich aber auch um den Ort dieses kürzesten Abstandes, also um jene Stelle wo die besagte Strecke k zwischen l_1 und l_2 eingeschaltet auf beiden Geraden senkrecht steht und l_1 sowohl, als auch l_2 schneidet, so wird bloss zu erwägen sein, dass k, als senkrecht zu E_2, offenbar in einer Ebene $h_v h_b$ liegen müsse, welche durch l_1 geführt senkrecht zu E_2 steht. Denkt man sich demnach $h_v h_b$ gelegt und mit E_2 zum Schnitte $\Delta = d' v_1$ gebracht, so wird Δ die Gerade l_2 in a_2 treffen. Im letzteren Schnittpunkte eine Gerade k in der Ebene h senkrecht zu E_2 gezogen, wird die

Gerade l_1 in a_1 schneiden und, da l_1 parallel zu E_2 ist, auch auf dieser senkrecht stehen. Es wird sonach $k = a_1 a_2$ den kürzesten Abstand von l_1 und l_2 repräsentieren.

Die centralprojektivische Durchführung des gestellten Problems kann demnach mit Zugrundelegung des Gesagten, wie folgt, geschehen.

Verbinden wir die beiden Fluchtpunkte v_1 und v_2 der Geraden l_1 und l_2 durch eine Gerade E_v, so stellt diese, wie bekannt, bereits die gemeinschaftliche Fluchttrace zweier zu einander parallelen Ebenen vor, wovon die eine, $E_v E_b^1$, durch $d_1 v_1$, die andere, $E_v E_b^2$, durch $d_2 v_2$ geht.

Konstruieren wir ferner den den genannten Ebenen $E_v E_b^1$ und $E_v E_b^2$ entsprechenden Normalenfluchtpunkt v_s, und legen wir durch $d_1 v_1$ eine Ebene $h_v h_b$, deren Fluchttrace h_v die Verbindungsgerade von v_1 und v_s ist, so wird (nach § 64) die letztbezeichnete Ebene zu den beiden Ebenen E^1 und E^2 senkrecht stehen.

Bestimmen wir weiter den Schnitt $d' v_1$ der Ebenen $h_v h_b$ und $E_v E_b^2$, so wird dieser die in $E_v E_b^2$ liegende Gerade $d_2 v_2$ in einem Punkte a_2 treffen, welcher mit v_s verbunden die Gerade $s = v_s D$ liefert. Da diese Gerade $v_s D$ in der zu E^1 und E^2 senkrechten Ebene $h_v h_b$ liegt, so befindet sich ihr Duchstosspunkt D in h_b und wird dieselbe offenbar mit der ebenfalls in der Ebene $h_v h_b$ liegenden Geraden $d_1 v_1$ einen Punkt a_1 gemein haben müssen. Wir finden somit, dass die Gerade $s = v_s D$ einerseits die beiden gegebenen Geraden l_1 und l_2 in je einem Punkte a_1 resp. a_2 trifft, und dass dieselbe andererseits auf den beiden Ebenen E^1 und E^2, also auch auf den in diesen Ebenen liegenden Geraden l_1 und l_2 senkrecht steht.

Den anfänglich gepflogenen Erörterungen entsprechend, wird daher die Strecke $a_1 a_2$ der Geraden $v_s D$ in der That den kürzesten Abstand k der beiden sich kreuzenden Geraden l_1 und l_2 seiner Lage nach darstellen.

Um die wahre Grösse desselben zu ermitteln, benützen wir jenen Teilpunkt T der Geraden $v_s d_s$, welcher in h_v liegt. Derselbe ergibt sich (wie in Aufgabe 40) durch Übertragung der Strecke $v_s C_1$ nach $v_s T$.

Die Projektion $\alpha_1 \alpha_2$ der Strecke $a_1 a_2$ von T aus in die Trace h_b repräsentiert die wahre Grösse des gesuchten kürzesten Abstandes.

§ 72.

Die graphische Bestimmung der Neigungswinkel von Geraden und Ebenen gegen Ebenen wurde im vorhergegangenen bereits durchgeführt.

Sehr häufig kommt es jedoch vor, dass Geraden oder Ebenen gegen andere Geraden oder Ebenen unter bestimmten Winkeln zu führen sind.

Bei der Lösung derartiger Aufgaben werden gewöhnlich die folgenden Sätze angewendet, welche sich direkt aus den in den §§ 6 und 8 angestellten Betrachtungen ergeben, sobald die dort mit **BE**, **C**, **CA** bezeichneten Elemente nicht speziell die Bildebene, das Projektionscentrum und den Hauptstrahl, sondern allgemeiner beziehungsweise eine beliebige Ebene, einen beliebigen Punkt, und die von letzterem auf die erstere senkrecht geführte Gerade vorstellen. Es ergeben sich, dieses vorausgesetzt, sodann aus § 6 sofort folgende Sätze:

„*Der geometrische Ort der Schnittpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Geraden mit einer Ebene, gegen welche sie sämtlich unter einem und demselben Winkel* α *geneigt sind, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des von dem festen Punkte aus auf jene Ebene gefüllten Perpendikels ist und dessen Radius sich als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ergibt, in welchem die zweite Kathete der Länge des genannten Perpendikels, und der derselben gegenüberliegende Winkel gleich dem Neigungswinkel* α *ist.*“

„*Sämtliche gerade Linien, welche durch einen festen Punkt gehen, und mit einer durch diesen Punkt gehenden festen Geraden einen und denselben Winkel* α *einschliessen, bilden mit jeder zu der festen Geraden senkrechten Ebene ebenfalls einen und denselben Winkel* ω*, und zwar jenen, welcher* α *zu einem Rechten ergänzt.*“

Ebenso erhält man durch die Betrachtungen des § 8 die Sätze:

„*Die Schnittgeraden aller durch einen festen Punkt gehenden Ebenen mit einer festen Ebene, gegen welche sie unter einem und demselben Winkel* α *geneigt sind, berühren sämtlich einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des vom festen Punkte auf die feste Ebene gefällten Perpendikels ist, und dessen Radius sich als die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ergibt, in welchem die zweite Kathete der Länge des genannten Perpendikels, und der derselben gegenüberliegende Winkel dem Neigungswinkel* α *gleich ist.*“

„*Sämtliche durch einen festen Punkt gehenden und gegen eine*

feste Gerade unter einem und demselben Winkel α geneigten Ebenen sind auch gegen jede zu der festen Geraden senkrechte Ebene gleich geneigt, und zwar ist der betreffende Neigungswinkel ω derjenige, welcher den Winkel α zu 90° ergänzt.“

Ohne jedwelche Schwierigkeit ist auch die Richtigkeit des nachstehenden, zuweilen zur Verwendung gelangenden Satzes, nachzuweisen:

„Alle geraden Linien, welche durch einen festen Punkt gehen, und zwischen diesem Punkte und einer festen Ebene eine unveränderliche Länge l besitzen, sind gegen die feste Ebene gleich geneigt. Der betreffende Neigungswinkel ω ergibt sich aus einem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete gleich dem Abstande des festen Punktes von der festen Ebene, und die Hypotenuse gleich der obgenannten Länge l ist.“

§ 73.

43. Aufgabe: **Durch einen gegebenen Punkt ist eine Gerade parallel zur Bildebene zu ziehen, welche mit einer gegebenen Ebene einen bestimmten Winkel einschliesst.**

Sei **p** [Fig. 62, Taf. III] der mittels des Trägers $\delta\varphi$ gegebene Punkt, $\mathbf{E_v E_b}$ die gegebene Ebene, und α (seitwärts gezeichnet) der gegebene Winkel. Die konstruktive Lösung des vorliegenden Problems gründet sich auf die im ersten Satze des § 72 ausgesprochene Eigenschaft.

Bestimmen wir dem dort Gesagten entsprechend den der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ zukommenden Normalenfluchtpunkt $\mathbf{v_s}$ und führen, mit Hilfe der durch den Träger $\delta\varphi$ senkrecht zu $\mathbf{E_v E_b}$ gelegten Hilfsebene $\mathbf{h_v h_b}$ ($\mathbf{h_v} = \varphi\mathbf{v_s}$), durch **p** die zu $\mathbf{E_v E_b}$ senkrechte Gerade $\mathbf{v_s p d}$; ermitteln wir ferner mit Zuhilfenahme des Schnittes $\mathbf{d' v'}$ der Ebenen $\mathbf{E_v E_b}$ und $\mathbf{h_v h_b}$ den Schnittpunkt **o** der Senkrechten $\mathbf{v_s p}$ mit $\mathbf{E_v E_b}$, so wird dieser Punkt **o** der Mittelpunkt jenes Kreises **K** in der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ sein, welcher den Ort der Schnittpunkte aller durch **p** gehenden gegen $\mathbf{E_v E_b}$ unter dem Winkel α geneigten Geraden repräsentiert.

Bestimmen wir weiter (wie in Aufgabe 40) mittels des Teilpunktes **T** die wahre Grösse $\pi\omega$ der Strecke **po** auf der Bildflächtrace $\mathbf{h_b}$, und konstruieren mit $\pi\omega$ als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck $\pi\omega\rho$, in welchem der Winkel $\omega\rho\pi = \measuredangle\alpha$ ist, so wird, dem angeführten Satze gemäss, die zweite Kathete $\omega\rho$ des

obbezeichneten Dreieckes $\pi\omega\rho$ den Radius des Kreises **K** in seiner wahren Grösse vorstellen.

Da ferner die Aufgabe verlangt, dass die durch **p** zu führenden Geraden parallel zur Bildebene seien, so werden dieselben in der durch **p** gehenden zur Bildebene parallelen Ebene **P** liegen müssen; die Schnittpunkte der besagten Geraden mit der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ werden mithin in der Schnittgeraden **s** von **P** und $\mathbf{E_v E_b}$ zu suchen sein. Diese Schnittgerade **s** wurde mit Hilfe der durch $\delta\varphi$ gelegten Hilfsebene (wie in Aufgabe 19) konstruiert.

Die Schnittpunkte der zu bestimmenden Geraden mit der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ können auf Grund dieser Erörterungen nur die gemeinschaftlichen Punkte der Geraden **s** und des Kreises **K** sein. Um dieselben zu finden, legen wir **s** und **K** um $\mathbf{E_b}$ in die Bildebene um. Hierbei gelangt **s** nach $\mathbf{s_0}$, während der umgelegte Kreis $\mathbf{K_0}$ jener ist, welcher aus dem umgelegten Punkte $\mathbf{o_0}$ mit dem vorher bestimmten Radius $\rho\omega$ beschrieben wird.

Die Schnittpunkte $\mathbf{a_0}$ und $\mathbf{b_0}$ von $\mathbf{s_0}$ und $\mathbf{K_0}$ mittels der Strahlen $\mathbf{C_0 a_0}$ und $\mathbf{C_0 b_0}$ nach **a** und **b** in **s** zurückgeführt, ergeben mit **p** verbunden, die Centralprojektionen $\mathbf{l_1}$ und $\mathbf{l_2}$ der beiden der Aufgabe entsprechenden Geraden.

§ 74.

44. Aufgabe: **Durch eine Gerade dv** [Fig. 63, Taf. III] **ist eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ den Winkel α einschliesst.**

Das zur Lösung dieser Aufgabe nötige Hilfsmittel liegt in dem dritten Satze des § 72. Da die zu bestimmende Ebene durch die Gerade **dv** gehen soll, so wird sie auch einen beliebigen auf **dv** gewählten Punkt **p** enthalten. Auf diesen letzteren wollen wir die weitere Konstruktion stützen.

Da nämlich die verlangte Ebene durch **p** gehen und mit der Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ den Winkel α einschliessen soll, so wird, dem vorangeführten Satze entsprechend, ihre Schnittgerade mit der Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ jenen Kreis **K**, welcher den Ort der Schnittpunkte aller durch den gewählten Punkt **p** geführten gegen $\mathbf{e_v e_b}$ unter dem Winkel α geneigten Geraden darstellt, in der letzteren berühren. Derselbe kann genau auf dieselbe Weise, wie der Kreis **K** in der vorhergehenden Aufgabe bestimmt werden.

Wir werden somit wieder den der Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ entsprechenden

Normalenfluchtpunkt v_s konstruieren, durch dv die zur Ebene $e_v e_b$ senkrechte Hilfsebene $h_v h_b$ ($h_v = vv_s$) legen, und mittels derselben den Fusspunkt o des von p aus auf $e_v e_b$ gefüllten Perpendikels pv_s, d. i. den Mittelpunkt o des Kreises K ermitteln.

Wird ferner auf der Bildflächtrace h_b die wahre Grösse $\pi\omega$ von po mit Hilfe des Teilpunktes T (in h_v) bestimmt, und ein rechtwinkliges Dreieck $\pi\omega\rho$, in welchem $\sphericalangle \omega\rho\pi = \sphericalangle \alpha$ ist, konstruiert, so erhält man in der Kathete $\omega\rho$ die wahre Grösse des Radius des Kreises K.

Die Schnittgerade der zu suchenden Ebene mit der Ebene $e_v e_b$ muss einerseits eine Tangente des Kreises K sein und andererseits durch den Schnittpunkt s der Geraden dv mit der Ebene $e_v e_b$ gehen.

Behufs weiterer Konstruktion legen wir s und K um e_b in die Bildebene um, wobei s nach s_0 gelangt, während K_0 der aus o_0 mit dem Radius $\omega\rho$ beschriebene Kreis ist.

Führen wir durch s_0 an K_0 die beiden möglichen Tangenten l_0^1 und l_0^2, welche die Bildflächtrace e_b beziehungsweise in d_1 und d_2 treffen, und leiten wir aus der Umlegung deren Centralprojektionen, die sich in $l_1 = sd_1$ und $l_2 = sd_2$ ergeben, direkt ab, so wird sowohl die Ebene $E_v^1 E_b^1$, welche durch dv und sd_1, als auch die Ebene $E_v^2 E_b^2$, welche durch dv und sd_2 gelegt wird, den Bedingungen der gestellten Aufgabe entsprechen.

§ 75.

Zweite Lösung: Sei wieder dv [Fig. 64, Taf. IV] die gegebene Gerade, $e_v e_b$ die Ebene und α der Neigungswinkel der letzteren mit der zu suchenden Ebene $E_v E_b$.

Die Fluchtebene (C, E_v) wird einerseits, da sie mit der zu konstruierenden Ebene parallel ist, mit der gegebenen Ebene $e_v e_b$ ebenfalls den Winkel α einschliessen, und anderseits den zu dv parallelen Fluchtstrahl Cv enthalten müssen.

Wir werden daher diese Fluchtebene als jene Ebene konstruieren, welche durch den Strahl Cv geht, und mit $e_v e_b$ den gegebenen Winkel α einschliesst. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst wieder den der Ebene $e_v e_b$ entsprechenden Normalenfluchtpunkt v_s. Der vom Projektionscentrum nach dem Punkte v_s gehende Strahl ist sodann senkrecht zur Ebene $e_v e_b$ und schneidet dieselbe in einem Punkte, dessen Centralprojektion o offenbar mit v_s zusammenfällt.

Alle durch das Projektionscentrum geführten und gegen die Ebene $e_v e_b$ unter dem Winkel α geneigten Ebenen, mithin auch die zu bestimmende Fluchtebene (C, E_v) schneiden die Ebene $e_v e_b$ (Satz 3 in § 72) in Geraden, welche jenen Kreis K in der Ebene $e_v e_b$ berühren, dessen Mittelpunkt o ist und dessen Radius sich als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ergibt, in welchem die zweite Kathete gleich dem Abstand des Projektionscentrums von der Ebene $e_v e_b$, also gleich der Strecke Co, und der ihr gegenüberliegende Winkel gleich α ist.

Zieht man durch den Schnittpunkt δ von Av_s und e_b eine Parallele zu $A_1 C_1$, welche die Gerade $C_1 v_s$ in dem Punkte ω trifft, so ist leicht einzusehen, dass $C_1 \omega$ bereits die wahre Grösse des Abstandes des Projektionscentrums von der Ebene $e_v e_b$ repräsentiert. Konstruiert man nun das rechtwinklige Dreieck $C_1 \omega \varrho$, in welchem der Winkel $C_1 \varrho \omega$ dem gegebenen Neigungswinkel α gleich ist, so wird die Kathete $\omega \varrho$ dieses Dreieckes den Radius des vorgenannten Kreises K in wahrer Grösse darstellen.

Die zu zeichnende Fluchtebene (C, E_v) soll aber auch den Fluchtstrahl des Punktes v enthalten; es wird mithin ihre Schnittgerade mit der Ebene $e_v e_b$ durch jenen Punkt gehen, in welchem der genannte Fluchtstrahl die Ebene $e_v e_b$ schneidet, d. i. durch jenen Punkt von $e_v e_b$ gehen müssen, dessen Centralprojektion s mit v zusammenfällt.

Denken wir uns nun s und o um e_b nach s_0 und o_0 umgelegt (o_0 erhält man einfah durch Ubertragung von $\delta\omega$ nach δo_0 in Av_s), ferner aus o_0 mit $\omega\varrho$ als Radius den umgelegten Kreis K_0 beschrieben, und von s_0 aus an K_0 die Tangenten l_0^1 und l_0^2 gezogen, so werden dieselben die um e_b in die Bildebene umgelegten Schnittgeraden der Ebene $e_v e_b$ mit den beiden der Aufgabe entsprechenden Fluchtebenen, (C, E_v^1) und (C, E_v^2) darstellen. Die Centralprojektionen l_1 und l_2 dieser Geraden ergeben sich durch die Verbindung von s mit jenen Punkten d_1 und d_2, in welchen e_b von l_0^1 und l_0^2 getroffen wird.

Wenn wir endlich berücksichtigen, dass die Centralprojektion einer in einer Fluchtebene (centralprojizierenden Ebene) liegenden Geraden in die Trace dieser Ebene fällt, so ist klar, dass die gefundenen Geraden l_1 und l_2 gleichzeitig die Tracen der gesuchten Fluchtebenen, oder was dasselbe ist, die Fluchttracen E_v^1 und E_v^2 der der Aufgabe entsprechenden Ebenen sind. Die zugehörigen Bildflächtracen E_b^1 und E_b^2 erhält man als die zu

E_v^1 und E_v^2 durch den Durchstosspunkt **d** der gegebenen Geraden geführten Parallelen.

§ 76.

45. Aufgabe: **Es ist die Fluchttrace einer zur Bildebene senkrechten Ebene zu bestimmen, welche mit einer gegebenen Ebene einen bekannten (gegebenen) Winkel einschliesst.**

Erste Methode. Die Lösung resp. Durchführung der gestellten Aufgabe führt unmittelbar auf die Konstruktion jener durch das Projektionscentrum gehenden Ebene, welche gegen die gegebene Ebene $e_v e_b$ unter dem Winkel α geneigt ist, und den zur Bildebene senkrechten Fluchtstrahl, d. h. den Hauptstrahl enthält.

Die konstruktive Durchführung wird folglich mit jener in der vorhergehenden Aufgabe insofern übereinstimmen, als man bloss statt des allgemein liegenden Fluchtpunktes **v**, speziell den Hauptpunkt **A** zu benützen hat. Der weitere Vorgang kann sonach dem § 75 entnommen werden.

§ 77.

Zweite Methode für die Lösung desselben Problems. Diese Methode beruht auf der Anwendung eines einfachen Kunstgriffes, mittels dessen sich die Lösung der Aufgabe ungleich eleganter gestaltet, als die vorher angeführte.

Sei e_v [Fig. 65, Taf. IV] wieder die Fluchttrace der gegebenen Ebene (die Bildflächtrace e_b ist diesfalls vollkommen entbehrlich), ferner sei **A** der Hauptpunkt und **AC** die Distanz.

Die Fluchttrace E_v der zu bestimmenden, gegen die Ebene e_v unter dem Winkel α geneigten und zur Bildebene senkrecht stehenden Ebene, geht selbstverständlich durch den Hauptpunkt **A**.

Denken wir uns zu dieser Trace E_v eine senkrechte Gerade **l** in der Bildebene gezogen, so wird (§ 72, Satz 4) dieselbe offenbar auch auf der Fluchtebene (**C**, E_v) selbst senkrecht stehen, und folglich mit der Fluchtebene (**C**, e_v) den Winkel $(90° - \alpha)$ bilden.

Hiermit erscheint die vorliegende Aufgabe auf das Problem zurückgeführt: „Es ist in der Bildebene eine Gerade so zu bestimmen, dass sie mit der Fluchtebene (**C**, e_v) den gegebenen Winkel $(90° - \alpha)$ einschliesst.“

Bestimmen wir den der Fluchttrace e_v entsprechenden Nor-

malenfluchtpunkt v_s, so repräsentiert dieser einen Punkt in der Bildebene, welcher von der Fluchtebene (C, e_v) den Abstand $C_1 v_s$ besitzt, und konstruieren wir weiter ein rechtwinkliges Dreieck $C_1 v_s \rho$, in welchem $C_1 v_s$ die eine Kathete, und der Winkel $C_1 v_s \rho = \measuredangle \alpha$ der anliegende, mithin der Winkel $C_1 \rho v_s = 90° - \alpha$ der gegenüberliegende Winkel ist, so wird (nach § 72 Satz 5) jede Gerade, deren Länge zwischen dem Punkte v_s und der Ebene (C, e_v) der Hypotenuse $v_s \rho$ des gefundenen Dreieckes $C_1 v_1 \rho$ gleich ist, mit dieser Ebene notwendig den Winkel $(90° - \alpha)$ einschliessen müssen.

Beschreiben wir nun aus dem Mittelpunkte v_s einen durch ρ gehenden Kreisbogen K, welcher die Fluchttrace e_v der gegebenen Ebene in a_1 resp. a_2 trifft, so erhalten wir in $l_1 = a_1 v_s$ und $l_2 = a_2 v_s$ zwei in der Bildebene liegende Geraden, auf welchen der Punkt v_s und die Trace e_v [folglich auch die Ebene (C, e_v)] ein der Hypotenuse $v_s \rho$ des Dreieckes $C_1 v_s \rho$ gleiches Stück begrenzen, also zwei gerade Linien, welche mit der Ebene (C, e_v) den Winkel $(90° - \alpha)$ einschliessen.

Den vorausgeschickten Betrachtungen gemäss sind nunmehr bloss durch den Hauptpunkt A auf die beiden Geraden l_1 und l_2 die bezüglichen Senkrechten E_v^1 und E_v^2 zu führen, um sofort die gesuchten Fluchttracen zu erhalten.

§ 78.

46. Aufgabe: **Durch einen Punkt ist eine Gerade zu legen, welche mit zwei gegebenen Ebenen gegebene Winkel einschliesst.**

Die Lösung der vorliegenden Aufgabe wird im Prinzipe durch nachstehende Betrachtung vermittelt.

Stellen wir uns vor, p [Fig. 66, Taf. IV] sei der gegebene Punkt; e_1 und e_2 seien die beiden gegebenen Ebenen; ferner mögen x_1 und x_2 die von p aus zu diesen Ebenen senkrecht gezogenen Geraden repräsentieren. Weiter wollen wir annehmen, dass die durch p gehende Gerade l die gesuchte, d. h. jene Gerade darstelle, welche mit den beiden Ebenen e_1 und e_2 die gegebenen Winkel α_1 resp. α_2 einschliesst.

Schneiden wir auf dieser Geraden l von p aus ein beliebiges Stück $pn = \lambda$ ab, und legen durch den Endpunkt n von λ eine Ebene e'_1 parallel zur Ebene e_1 und eine Ebene e'_2 parallel zur Ebene e_2, so ist einleuchtend, dass die Gerade l auch mit diesen

beiden Ebenen $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ die Winkel α_1 und α_2 einschliesse. Die beiden Hilfsebenen $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ treffen die zu ihnen senkrechten Geraden $\mathbf{px}_1$ und $\mathbf{px}_2$ in den Punkten $\mathbf{o}_1$ resp. $\mathbf{o}_2$, welche letztere wir mit dem vorher genannten Endpunkte $\mathbf{n}$ verbinden können. Ferner sei erwähnt, dass der Schnitt der beiden Ebenen $\mathbf{e}^1_1$ und $\mathbf{e}^1_2$ die durch $\mathbf{n}$ gehende Gerade $\mathbf{s}$ vorstelle.

Das Dreieck $\mathbf{pno}_1$ ist bei $\mathbf{o}_1$ rechtwinklig; es repräsentiert daher $\mathbf{no}_1$ die orthogonale Projektion von λ resp. von $\mathbf{l}$ auf $\mathbf{e}'_1$. Der Winkel $\mathbf{pno}$ stellt mithin den Neigungswinkel α_1 von $\mathbf{l}$ resp. von λ gegen die Ebene $\mathbf{e}^1_1$ dar. In gleicher Weise ergibt sich der Neigungswinkel α_2 von $\mathbf{l}$ resp. λ gegen die Ebene $\mathbf{e}^1_2$ als der Winkel $\mathbf{pno}_2$ in dem gleichnamigen rechtwinkligen Dreiecke. Aus diesen Beziehungen ist leicht die Konstruktion der Geraden $\mathbf{l}$ zu folgern.

Man hat nämlich zunächst von dem gegebenen Punkte $\mathbf{p}$ auf die beiden gegebenen Ebenen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ die Perpendikel $\mathbf{px}_1$ und $\mathbf{px}_2$ zu führen und auf diesen von $\mathbf{p}$ aus zwei Strecken $\mathbf{po}_1$ resp. $\mathbf{po}_2$ aufzutragen, welche sich als Katheten zweier rechtwinkliger Dreiecke mit gleicher Hypotenuse von beliebiger Länge λ und den gegebenen Neigungswinkeln α_1 und α_2, als die den betreffenden Katheten $\mathbf{po}_1$, $\mathbf{po}_2$ gegenüberliegenden oder die der Hypotenuse $\mathbf{pn}$ anliegenden Winkel, ergeben.

Durch die Endpunkte $\mathbf{o}_1$ und $\mathbf{o}_2$ dieser Strecken hat man senkrecht auf die beiden Geraden $\mathbf{po}_1$ und $\mathbf{po}_2$, also beziehungsweise parallel zu $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ die Ebenen $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ zu legen, und weiter deren Schnittgerade $\mathbf{s}$ zu bestimmen. In dieser Geraden $\mathbf{s}$ sind ferner jene Punkte $\mathbf{n}$ . . . zu konstruieren, welche von $\mathbf{p}$ den Abstand λ, oder, was dasselbe bedeutet, von $\mathbf{o}_1$ den Abstand $\lambda \cos \alpha_1$ oder von $\mathbf{o}_2$ den Abstand $\lambda \cos \alpha_2$ besitzen. Die beiden letztgenannten Abstände $\lambda \cos \alpha_1$ und $\lambda \cos \alpha_2$ sind selbstverständlich die zweiten Katheten in den vorbezeichneten Dreiecken $\mathbf{po}_1\mathbf{n}$ und $\mathbf{po}_2\mathbf{n}$. Die Punkte $\mathbf{n}$ . . . mit $\mathbf{p}$ verbunden, geben bereits die gesuchten Geraden.

Die hier allgemein angedeuteten Konstruktionen wollen wir nun centralprojektivisch durchführen.

Es ist an und für sich klar, dass die beiden Ebenen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ nicht notwendig durch ihre beiden Tracenpaare gegeben sein müssen, und dass die blosse Angabe ihrer Fluchttracen $\mathbf{e}^1_v$ und $\mathbf{e}^2_v$ [Fig. 67, Taf. IV] vollständig genügt.

Der gegebene Punkt $\mathbf{p}$ liege auf dem Träger $\delta\varphi$; α_1 und α_2

seien die Winkel, welche die zu suchende Gerade mit den Ebenen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ einschliessen soll.

Es steht uns nun frei bei der durchzuführenden Konstruktion dem gegebenen Punkte p thatsächlich jene Rolle zu erteilen, welche in der eben vorausgeschickten allgemeinen Betrachtung der gleichbezeichnete Punkt p [Fig. 66, Taf. IV] spielte, oder aber, statt von dem beliebigen Punkte p, vom Projektionscentrum selbst in diesem Sinne Gebrauch zu machen.

Obwohl wir im ersten Falle die gesuchten Geraden direkt erhalten, im zweiten jedoch nur deren Fluchtstrahlen finden, so wird es doch, infolge der Vereinfachung der Konstruktion, zweckdienlicher erscheinen den letzteren Weg einzuschlagen.

Zunächst zeichnen wir an beliebiger Stelle der Zeichnungsfläche zwei rechtwinklige Dreiecke $\gamma\nu\omega_1$ und $\gamma\nu\omega_2$ derart, dass sie eine gemeinschaftliche Hypotenuse $\gamma\nu$ (von beliebiger Länge λ) besitzen, und die ihr anliegenden Winkel $\gamma\nu\omega_1$ resp. $\gamma\nu\omega_2$ beziehungsweise den gegebenen Neigungswinkeln α_1 und α_2 gleich sind.

Die aus diesen Dreiecken sich ergebenden Katheten $\gamma\omega_1$ und $\gamma\omega_2$ sind nun, mit Zugrundelegung des Vorausgeschickten, vom Projektionscentrum aus auf den durch das letztere senkrecht zu den Fluchtebenen $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^1)$ und $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^2)$ geführten Strahlen aufzutragen, und durch die Endpunkte derselben Ebenen zu führen, welche zu den bezüglichen Fluchtebenen $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^1)$ und $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^2)$ parallel sind.

Dies kann einfach in nachstehender Weise geschehen. Wir legen durch das Projektionscentrum eine Ebene $\mathbf{P}^1$ welche gleichzeitig auf der Bildebene und der Ebene $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^1)$ senkrecht steht, d. i. jene Ebene, deren Trace durch die durch den Hauptpunkt A zu $\mathbf{e}_v^1$ senkrecht geführte Gerade $\mathbf{P}_b^1$ dargestellt erscheint. Besagte Ebene enthält offenbar die durch das Projektionscentrum gehende Falllinie der Fluchtebene $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^1)$ sowohl, als auch die durch das Projektionscentrum führende Gerade, welche zur letztgenannten Ebene senkrecht steht.

Denkt man sich nun die Hilfsebene $\mathbf{P}^1$ um $\mathbf{P}_b^1$ in die Bildebene umgelegt, so gelangt das Projektionscentrum C nach $\mathbf{C}_1^1$, die genannte Falllinie nach $\mathbf{C}_1^1\mathbf{A}_1^1$ und die obbezeichnete Senkrechte nach $\mathbf{C}_1^1\mathbf{o}_1$, welch letztere selbstverständlich normal zu $\mathbf{C}_1^1\mathbf{A}_1^1$ ist.

Tragen wir weiter auf der letztgenannten Senkrechten von $\mathbf{C}_1^1$ die vorher gefundene Kathete $\gamma\omega_1 = \mathbf{C}_1^1\mathbf{o}_1$ auf, und führen wir durch $\mathbf{o}_1$ eine zur Falllinie $\mathbf{C}_1^1\mathbf{A}_1^1$ Parallele $\mathbf{o}_1\delta_1$, so wird dieselbe

offenbar die um $\mathbf{P}_b^1$ umgelegte Schnittgerade der Ebene $\mathbf{P}_b^1$ mit jener zur Fluchtebene $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^1)$ parallelen Ebene $\mathbf{e}_v^1 \mathbf{e}_b^1$ repräsentieren, welche vom Projektionscentrum den Abstand $\gamma\omega_1$ besitzt. Die Bildflächtrace $\mathbf{e}_b^1$ dieser Ebene ist die durch δ_1 parallel zu $\mathbf{e}_v^1$ gezogene Gerade.

Durch eine gleichartige Konstruktion vermittels der Hilfsebene $\mathbf{P}^2$, erhalten wir die zur Fluchtebene $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^2)$ parallele Ebene $\mathbf{e}_v^2 \mathbf{e}_b^2$, welcher vom Projektionscentrum der Abstand $\mathbf{C}_1^2\mathbf{o}_2 = \gamma\omega_2$ entspricht.

Diese beiden Ebenen $\mathbf{e}_v^1 \mathbf{e}_b^1$ und $\mathbf{e}_v^2 \mathbf{e}_b^2$ schneiden sich in einer Geraden $\mathbf{s} = \mathbf{dv}$, in welcher, den vorhergehenden Betrachtungen entsprechend, jene Punkte zu bestimmen sind, deren Entfernungen von dem der Ebene $\mathbf{e}_v^1 \mathbf{e}_b^1$ angehörenden Punkte $\mathbf{o}_1$ durch die Strecke $\nu\omega_1 = \lambda \cos \alpha_1$ gegeben erscheint.

Zu diesem Zwecke legen wir $\mathbf{s}$ und $\mathbf{o}_1$ um $\mathbf{e}_b^1$ in die Bildebene nach $\mathbf{s}_0$ resp. $\mathbf{o}_0^1$ um, ($\mathbf{o}_0^1$ erhält man einfach durch Ubertragung der Strecke $\mathbf{o}_1\delta_1$ nach $\delta_1\mathbf{o}_0^1$ in $\mathbf{P}_b^1$) und durchschneiden $\mathbf{s}_0$ mit dem aus $\mathbf{o}_0^1$ mit dem Radius $\nu\omega_1$ beschriebenen Kreise $\mathbf{K}_0$ in den Punkten $\mathbf{v}_1^0$ und $\mathbf{v}_0^2$. Diese Punkte $\mathbf{v}_1^0$ und $\mathbf{v}_0^2$ auf bekannte Weise mittels den Strahlen $\mathbf{C}_0\mathbf{v}_1^0$ und $\mathbf{C}_0\mathbf{v}_0^2$ in die Gerade $\mathbf{s}$ zurückführt, geben daselbst die Centralprojektionen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ jener Punkte, welche mit dem Projektionscentrum verbunden, die Fluchtstrahlen der gesuchten Geraden darstellen.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass, da die Centralprojektionen aller Punkte eines Fluchtstrahles in dem zugehörigen Fluchtpunkte vereinigt sind, die Fluchtpunkte der letztgenannten Geraden mit den Centralprojektionen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ selbst zusammenfallen müssen.

Schliesslich wird bloss der Träger $\delta\varphi$ des gegebenen Punktes $\mathbf{p}$ durch jene Geraden $\mathbf{v}_1\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{v}_2\mathbf{d}_2$ zu ersetzen sein, welchen die Fluchtpunkte $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ zukommen.

Die durchgeführte Konstruktion liefert zwei dem gestellten Probleme entsprechende Geraden. Es existieren übrigens noch weitere zwei Geraden, welche gleichfalls der Aufgabe genügen, und sofort erhalten werden, wenn man für eine der beiden Hilfsebenen $\mathbf{e}_v^1\mathbf{e}_b^1$ und $\mathbf{e}_v^2\mathbf{e}_b^2$, beispielsweise für $\mathbf{e}_v^2\mathbf{e}_b^2$, die andere zur Fluchtebene $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v^2)$ parallele Ebene substituiert, welche so wie die erstere vom Centrum die Entfernung $\gamma\omega_2$ besitzt, wenn man also die Strecke $\gamma\omega_2$ von $\mathbf{C}_1^2$ aus auf der umgelegten Senkrechten nach der der Strecke $\mathbf{C}_1^2\mathbf{o}_2$ entgegengesetzten Seite d. i. nach $\mathbf{C}_1^2\mathbf{o}_2^1$ aufträgt, und sodann dieselben Konstruktionen wie vorher vollführt.

§ 79.

47. Aufgabe: **Es sind die Fluchtpunkte jener Geraden zu bestimmen, welche mit der Bildebene und mit einer zur Bildebene senkrechten Ebene, gegebene Winkel einschliessen.**

Obwohl diese Aufgabe sich von der vorhergehenden bloss durch die spezielle Lage der beiden gegebenen Ebenen unterscheidet, so verdient dieselbe dennoch insofern einige Beachtung, als dieselbe gegenüber dem bereits besprochenen allgemeinen Falle bedeutende konstruktive Vereinfachungen zulässt.

Sei $\mathsf{n}_b = \alpha$ [Fig. 68, Taf. IV] der Bildflächneigungswinkel der zu suchenden Geraden, und $\mathsf{n}_v = \beta$ der Winkel, welchen diese Gerade mit der durch die Fluchttrace e_v (dieselbe geht als bildflächprojizierend durch **A**) gegebenen zur Bildebene senkrechten (allenfalls horizontalen oder vertikalen) Ebene bilden soll.

Der Fluchtpunkt der zu bestimmenden Geraden liegt einerseits in dem dem Winkel $\mathsf{n}_b = \alpha$ entsprechenden Fluchtkreise F_α, d. i. auf jenem aus dem Mittelpunkte **A** beschriebenen Kreise, dessen Radius **Ar** die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist, in welchem die Distanz **AC** die zweite Kathete, und α der der letzteren gegenüberliegende Winkel ist. Zu beachten ist hierbei, dass, wie selbstverständlich, alle Punkte des Fluchtkreises F_α vom Projektionscentrum **C** dieselbe Entfernung **Cr** besitzen, der Fluchtstrahl also, welcher der unter den bestimmten Winkeln α und β (deren Summe diesfalls im Maximum offenbar nicht grösser als 90° sein kann) gegen **BE** und $\mathsf{e}_v\mathsf{e}_b$ zu führenden Geraden entspricht, stets dieselbe wahre Grösse **Cr** haben werde.

Konstruieren wir nun mit Zugrundelegung der angestellten allgemeinen Betrachtungen ein zweites rechtwinkliges Dreieck **Crn**, in welchem **Cr** die früher erwähnte gemeinschaftliche Hypotenuse, und der gegebene Winkel $\mathsf{n}_v = \beta = \mathbf{Crn}$ der eine der beiden anliegenden spitzen Winkel ist; ziehen wir ferner parallel zu der gegebenen Fluchttrace e_v in den der ermittelten Kathete **Cn** gleichen Entfernungen $\mathbf{An}_1 = \mathbf{An}_2 = \mathbf{Cn}$ die beiden Geraden e_b^1 und e_b^2, so ist einleuchtend, dass e_b^1 und e_b^2 die Bildflächtracen jener zwei zur Fluchtebene (**C**, e_v) parallelen Ebenen repräsentieren, welche vom Projektionscentrum die Entfernung **Cn** besitzen.

Mit Berücksichtigung des § 72 (Satz 5) gelangen wir zu dem Schlusse, dass jede durch das Projektionscentrum gehende Gerade

von der Länge **Cr**, welche einerseits durch das Projektionscentrum **C** und andererseits durch eine der Ebenen $\mathbf{e}_b^1\,\mathbf{e}_v$ oder $\mathbf{e}_b^2\,\mathbf{e}_v$ begrenzt wird, mit den betreffenden Ebenen $\mathbf{e}_b^1\,\mathbf{e}_v$ oder $\mathbf{e}_b^2\,\mathbf{e}_v$, also auch mit der Fluchtebene $(\mathbf{C}, \mathbf{e}_v)$ den Winkel β einschliesse.

Solcher Geraden ergeben sich diesfalls vier, d. s. jene, welche das Projektionscentrum mit den vier Schnittpunkten $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$ des Fluchtkreises $\mathbf{F}_\alpha$ und den Geraden $\mathbf{e}_b^1$ und $\mathbf{e}_b^2$ verbinden.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$ auch die Fluchtpunkte der vier Parallelscharen der den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Geraden sind.

§ 80.

48. Aufgabe: **Durch einen gegebenen Punkt ist eine Ebene zu führen, welche mit zwei gegebenen Ebenen bestimmte Winkel einschliesst.**

Wenn eine Ebene **E** mit einer zweiten Ebene **F** einen Winkel $\mathbf{N}_e = \alpha$ einschliesst, und man fällt auf die Ebene **E** eine senkrechte Gerade, so schliesst diese bekanntlich mit der Ebene **F** jenen Winkel $90 - \mathbf{N}_e = \beta$ ein, welcher den Winkel α zu einem Rechten ergänzt.

Mit Zugrundelegung dieser Eigenschaft wollen wir die Lösung der gestellten Aufgabe vollziehen.

Bezeichnen wir nämlich die gegebenen Ebenen mit $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$, und seien beziehungsweise α_1 und α_2 die Winkel, welche die zu suchende Ebene **E** mit $\mathbf{F}_1$ resp. mit $\mathbf{F}_2$ bilden soll, so werden wir (nach der in Aufgabe 46 auseinandergesetzten Methode) zunächst eine Gerade bestimmen, welche mit den betreffenden Ebenen $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ die bezüglichen Winkel $\beta_1 = 90° - \alpha_1$ und $\beta_2 = 90° - \alpha_2$ einschliesst.

Führt man sodann durch den gegebenen Punkt eine zu der gefundenen Geraden senkrechte Ebene, so wird dieselbe mit $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ bereits die geforderten Winkel α_1 und α_2 einschliessen, also den gestellten Bedingungen genügen.

§ 81.

49. Aufgabe: **Eine Gerade ist zu konstruieren, welche zwei gegebene sich nicht schneidende Geraden unter gegebenen Winkeln trifft.**

Diese Aufgabe ist ebenfalls (sowie überhaupt jede Aufgabe, welche die Bestimmung einer Geraden oder Ebene bei zwei ge-

gebenen Winkelbedingungen fordert) nach jenem Prinzipe zu lösen, welches am Eingange des § 78 allgemein entwickelt wurde.

Wenn nämlich die zu bestimmende Gerade **L** mit zwei gegebenen Geraden l_1 und l_2 die Winkel β_1 und β_2 bilden soll, so wird dieselbe notwendig mit zwei Ebenen, die beziehungsweise auf l_1 und l_2 senkrecht stehen, die Winkel $\alpha_1 = 90 - \beta_1$ und $\alpha_2 = 90° - \beta_2$ einschliessen. Besagte Gerade kann daher auf Grund des in Aufgabe 46 näher Erörterten leicht konstruiert werden.

Hierbei lassen sich jedoch einige Abkürzungen erzielen, auf welche wir hinweisen wollen.

Es wird nämlich auch in diesem, sowie in dem vorhergehenden Falle, vorteilhaft sein, vorerst den Fluchtstrahl der zu suchenden Geraden zu bestimmen. Dieser Fluchtstrahl ist an die Bedingung gebunden, dass er mit den Fluchtstrahlen der beiden gegebenen Geraden beziehungsweise die Winkel β_1 und β_2 einzuschliessen habe.

Nehmen wir nun an, der Punkt **p** [Fig. 66, Taf. IV] stelle das Projektionscentrum vor, während $\mathbf{px}_1$ und $\mathbf{px}_2$ die Fluchtstrahlen der beiden gegebenen Geraden repräsentieren mögen. Tragen wir von **p** aus auf den Fluchtstrahlen $\mathbf{px}_1$ und $\mathbf{px}_2$ zwei Strecken $\mathbf{po}_1$ und $\mathbf{po}_2$ auf, so können wir diese als die Katheten zweier rechtwinkligen Dreiecke betrachten, welche eine beliebige Strecke λ als gemeinschaftliche Hypotenuse besitzen und in welchen die den genannten Katheten $\mathbf{po}_1$ und $\mathbf{po}_2$ anliegenden Winkel beziehungsweise gleich β_1 und β_2 sind.

Führen wir weiter durch die Endpunkte $\mathbf{o}_1$ und $\mathbf{o}_2$ die bezüglichen zu $\mathbf{px}_1$ und $\mathbf{px}_2$ senkrechten Ebenen $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$, so wird mit Berufung auf § 72 (Satz 5) jede durch **p** gehende Gerade, welche zwischen **p** und der Ebene $\mathbf{e}'_1$ die Länge λ besitzt, mit dieser Ebene den Winkel $\alpha_1 = 90 - \beta_1$ und folglich mit der Geraden $\mathbf{px}_1$ den Winkel β_1 bilden.

Aus gleichem Grunde wird jede durch **p** gehende Gerade, welche zwischen **p** und der Ebene $\mathbf{e}'_2$ die Länge λ besitzt, mit der Ebene $\mathbf{e}'_2$ den Winkel $\alpha_2 = 90° - \beta_2$, und mithin mit der Geraden $\mathbf{px}_2$ den Winkel β_2 einschliessen.

Bestimmt man daher in der Schnittgeraden **s** der beiden Ebenen $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}^1_2$ jene Punkte **n** . . . . ., welchen vom Punkte **p** die Entfernung λ entspricht, (oder mit anderen Worten: ist von $\mathbf{o}_1$ die Entfernung gleich $\lambda \sin \beta_1$), so werden die Verbindungsgeraden derselben mit dem Punkte **p** die beiden eben genannten

Eigenschaften in sich vereinigen, d. h. sie werden die gesuchten Fluchtstrahlen repräsentieren.

Behufs der konstruktiven Durchführung des gestellten Problems wollen wir annehmen, es seien V_1D_1 und V_2D_2 [Fig. 67, Taf. IV] die beiden gegebenen sich kreuzenden, also nicht in einer Ebene liegenden Geraden, und β_1, β_2 die gegebenen Neigungswinkel.

Wir bestimmen vor allem die Fluchttracen e_v^1 und e_v^2 der zu den Geraden D_1V_1 und D_2V_2 senkrechten Ebenen; ferner verzeichnen wir zwei rechtwinklige Dreiecke $\gamma\nu\omega_1$ und $\gamma\nu\omega_2$, welche eine gemeinschaftliche Hypotenuse $\gamma\nu$ von beliebiger Länge λ besitzen, und in welchen die Winkel $\gamma\nu\omega_1$ resp. $\gamma\nu\omega_2$ den gegebenen Winkeln β_1 resp. β_2 gleich sind.

Den vorhergehenden Betrachtungen entsprechend hat man nun jene Ebenen $e_v^1e_b^1$ und $e_v^2e_b^2$ zu konstruieren, welche auf den Geraden D_1V_1 und D_2V_2 senkrecht stehen, und vom Projektionscentrum die bezüglichen Entfernungen $\gamma\omega_1$ und $\gamma\omega_2$ besitzen.

Zu diesem Zwecke werden wir diese Entfernungen (wie in Aufgabe 46) auf den um $P_b^1 = AV_1$ und $P_b^2 = AV_2$ umgelegten Fluchtstrahlen $C_1^1V_1$ und $C_1^2V_2$ von C_1^1 resp. C_1^2 beziehungsweise nach $C_1^1o_1$ und $C_1^2o_2$ auftragen, ferner die zu $C_1^1A_1^1$ und $C_1^2A_1^2$ parallelen umgelegten Falllinien $o_1\delta_1$ und $o_2\delta_2$ bestimmen, und endlich durch δ_1 resp. δ_2 die beziehungsweise zu e_v^1 und e_v^2 parallelen Bildflächtracen e_b^1 und e_b^2 ziehen.

Auf der Schnittgeraden $s = dv$ dieser beiden Ebenen $e_v^1e_b^1$ und $e_v^2e_b^2$ sind nun jene Punkte zu bestimmen, deren Abstand von o_1 gleich $\nu\omega_1$ ist.

Zu diesem Behufe legen wir s und o_1 um e_b^1 nach s_0 und o_1^0 um, beschreiben den Kreis K_0 aus dem Mittelpunkte o_1^0 mit dem Radius $\nu\omega_1$ und führen dessen Schnittpunkte v_1^0 und v_2^0 nach v_1 resp. v_2 zurück. Hierdurch wurden somit die Fluchtpunkte v_1 und v_2 von solchen Geraden gefunden, welche beziehungsweise mit den Geraden D_1V_1 und D_2V_2 zu gleicher Zeit die gegebenen Winkel β_1 und β_2 bilden.

Die gesuchten resp. gefundenen Geraden selbst, sollen aber die beiden gegebenen Geraden D_1V_1 und D_2V_2 schneiden.

Diejenigen Gerade, welche dem Fluchtpunkte v_1 entspricht, wird sich als Schnitt jener beiden durch D_1V_1 resp. D_2V_2 gelegten Hilfsebenen ergeben, deren Fluchttracen nebstbei den Fluchtpunkt

v_1 enthalten. Die dem Fluchtpunkte v_2 entsprechende Gerade kann in ganz übereinstimmender Weise ermittelt werden.

§ 82.

Wir wollen nun noch eine Reihe von Problemen in centralprojektivischer Darstellung durchführen, welche entweder an und für sich von Interesse sind, oder aber die Grundlage für später vorkommende Konstruktionen bilden. Diese Aufgaben sollen ausserdem eine Wiederholung des bisher Gebotenen insofern sein, als sie die Anwendung bald dieser und bald jener der früher entwickelten Konstruktionen fordern werden. Teilweise werden sich die Aufgaben jedoch gerade dadurch von früheren, verwandten Problemen unterscheiden, dass sie von diesen abweichende Konstruktionen zeigen.

50. Aufgabe: **Es ist der Halbierungspunkt einer centralprojektivisch dargestellten Strecke ohne Hilfe des Projektionscentrums zu bestimmen.**

Die gegebene Strecke **ab** [Fig. 69, Taf. IV] können wir als die Centralprojektion einer Seite irgend eines Parallelogrammes **abcd** betrachten.

Die Gegenseite **cd** kann auf einer beliebigen durch den Fluchtpunkt **v** von **ab** geführten Geraden liegen, während als die übrigen zwei Seiten **ac** und **bd** zwei willkürlich durch **a** und **b** gezogene Geraden gewählt werden mögen, deren Schnittpunkt v_1 gleichzeitig als ihr gemeinschaftlicher Fluchtpunkt zu gelten hat.

Zieht man die Diagonalen **ad** und **bc**, welche sich in **e** schneiden, so wird die Verbindungsgerade ev_1 die Centralprojektion jener Geraden repräsentieren, welche durch den Mittelpunkt des Parallelogrammes parallel zu dem Seitenpaare **ac** und **bd** geht. Der Schnittpunkt **m** von ev_1 und **ab** wird infolge dessen bereits die Centralprojektion des gesuchten Halbierpunktes vorstellen.

§ 83.

51. Aufgabe: **In einer Geraden vd ist jener Punkt zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten eine gleiche Entfernung hat.**

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den beiden [in der Geraden d_1v_1 Fig. 70, Taf. IV] gegebenen Punkten **a** und

b gleich weit abstehen, ist bekanntlich diejenige Ebene, welche durch den Halbierungspunkt der Strecke **ab** geht und zu der letzteren senkrecht steht.

Wir werden daher entweder mittels des Teilpunktes **T**, welcher sich bei Konstruktion der der Geraden $\mathbf{d_1 v_1}$ entsprechenden Normalenfluchttrace $\mathbf{E_v}$ in der Fluchttrace $\mathbf{h_v}$ der hierbei zur Verwendung gelangenden Hilfsebene $\mathbf{h_v h_b}$ unmittelbar ergibt, oder auch mit Zugrundelegung der vorhergehenden Aufgabe den Halbierungspunkt **m** der Strecke **ab** feststellen, und durch denselben die zu $\mathbf{d_1 v_1}$ senkrechte Ebene $\mathbf{E_v E_b}$, d. i. jene Ebene führen, deren Fluchttrace $\mathbf{E_v}$ dem Punkte $\mathbf{v_1}$ als Normalenfluchtpunkt entspricht.

Im Schnitte dieser Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ mit der gegebenen Geraden **dv** erhält man selbstverständlich sofort den der Aufgabe entsprechenden Punkt **s**.

§ 84.

52. Aufgabe: **Ein Punkt ist zu bestimmen, welcher von der Bildebene und von zwei gegebenen Ebenen gegebene Abstände besitzt.**

Seien $\mathbf{e_v^1 e_b^1}$ und $\mathbf{e_v^2 e_b^2}$ [Fig. 71, Taf. IV] die gegebenen Ebenen, l_1 und l_2 die Abstände des zu bestimmenden Punktes von denselben, und endlich sei l dessen Abstand von der Bildebene.

Der zu suchende Punkt wird offenbar als der Schnittpunkt dreier Ebenen erhalten werden, welche ihrerseits von den gegebenen Ebenen $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ und der Bildebene **BE** beziehungsweise die bestimmten Abstände l_1, l_2 und l besitzen.

Behufs Auffindung der besagten drei Ebenen haben wir offenbar bloss die in Aufgabe 41 näher auseinander gesetzte Konstruktionsmethode umzukehren.

Um also beispielsweise jene Ebene $\mathbf{e_v^1 E_b^1}$ zu finden, welcher von der Ebene $\mathbf{e_v^1 e_b^1}$ ein Abstand l_1 entspricht, legen wir durch das Projektionscentrum die zur Trace $\mathbf{e_v^1}$ senkrechte Ebene $\mathbf{P_b^1}$. Diese letztere schneidet die gegebene Ebene $\mathbf{e_v^1 e_b^1}$, deren Fluchtebene $(\mathbf{C}, \mathbf{e_v^1})$ und die zu bestimmende Ebene $\mathbf{e_v^1 E_b^1}$ in drei zu einander parallelen Geraden, von welchen die erste und dritte Gerade den Abstand l_1 besitzen müssen.

Nach der Umlegung um $\mathbf{P_b^1}$, wobei das Projektionscentrum nach $\mathbf{C_1^1}$ gelangt, ist die Schnittgerade von $\mathbf{P^1}$ und $(\mathbf{C}, \mathbf{e_v^1})$ durch $\mathbf{C_1^1 A_1^1}$ dargestellt; die Schnittgerade von $\mathbf{P^1}$ und $\mathbf{e_v^1 e_b^1}$ dagegen ist

durch die zu $C_1^1 A_1^1$ durch den Tracenschnittpunkt δ_1 parallel gezogene Gerade σ_1 bestimmt, während der Schnitt von P^1 mit der zu bestimmenden Ebene $e_v^1 E_b^1$ eine von jenen Geraden s_1 sein muss, denen von σ_1 der Abstand l_1 entspricht. Die Bildflächtrace E_b^1 ergibt sich sodann als die durch den Schnittpunkt Δ_1 von P_b^1 und und s_1 zu e_v^1 parallele Gerade. Durch Wiederholung der gleichartigen Konstruktion bezüglich der Ebene $e_v^2 e_b^2$ und des gegebenen Abstandes l_2, erhält man die Bildflächtrace E_b^2 jener Ebene $e_v^2 E_b^2$, welche von $e_v^2 e_b^2$ den Abstand l_2 besitzt.

Die Schnittgerade dv der beiden Ebenen $e_v^1 E_b^1$ und $e_v^2 E_b^2$ repräsentiert offenbar den geometrischen Ort jener Punkte, welchen von den Ebenen $e_v^1 e_b^1$ und $e_v^2 e_b^2$ gleichzeitig die bezüglichen Abstände l_1 und l_2 zukommen.

Um endlich in dieser Geraden dv jenen Punkt zu finden, welcher von der Bildebene den Abstand l besitzt, legen wir durch dv die zur Bildebene senkrechte Ebene $F_v F_b$, und drehen die Gerade dv um die Trace F_b in die Bildebene nach g_0.

Der Schnitt der Ebene $F_v F_b$ mit der von der Bildebene um die Strecke l abstehenden Ebene wird bei dieser Umlegung durch die zur Trace F_b in dem Abstande l parallel gezogene Gerade z_0 dargestellt. Der Schnittpunkt p_0 von z_0 und g_0 mittels des Strahles $C_0 p_0$ nach p in dv zurückgeführt, ergibt daselbst die Centralprojektion p des gesuchten Punktes.

§ 85.

53. Aufgabe: **Ein Punkt ist um eine Gerade so lange zu drehen, bis er in eine gegebene Ebene gelangt; die Centralprojektion des gedrehten Punktes sowie die wahre Grösse des Drehungswinkels sind zu ermitteln.**

Aus § 47 wissen wir bereits, dass ein Punkt bei seiner Drehung um eine Gerade einen Kreis in jener Ebene beschreibt, welche durch den besagten Punkt senkrecht zu der Geraden (Drehungsaxe) geführt wird, und dass der Mittelpunkt dieses Drehungskreises der Schnitt der Drehungsaxe mit der genannten Ebene ist.

Soll der zu drehende Punkt bei der Drehung in der ihm entsprechenden zur Drehaxe senkrechten Ebene verbleiben, gleichzeitig aber in eine gegebene Ebene gelangen, so muss sich derselbe nach der Drehung offenbar in der Schnittgeraden

beider Ebenen befinden. Selbstverständlich wird der bezeichnete Punkt ein gemeinschaftlicher Punkt dieser Geraden und des Drehungskreises sein.

Um dies konstruktiv durchzuführen, nehmen wir an, **dv** [Fig. 72, Taf. IV] sei die Drehungsaxe, **p** der zu drehende mittels des Trägers $\delta\varphi$ bestimmte Punkt, und $E_v E_b$ stelle die Ebene vor, in welche der Punkt **p** bei der Drehung gelangen soll.

Vor allem bestimmen wir die Drehebene des Punktes **p**, d. h. wir legen durch **p** die zu **dv** senkrechte Ebene $S_v S_b$ (Aufgabe 37). Der Schnittpunkt **o** dieser Ebene mit der Drehungsaxe **dv** repräsentiert, wie vorhin bemerkt wurde, den Drehungsmittelpunkt für den Punkt **p**. Bestimmen wir ferner die Schnittgerade $l = d' v'$ der Ebenen $S_v S_b$ und $E_v E_b$, und legen dieselbe, sowie auch die Punkte **o** und **p** um S_b in die Bildebene beziehungsweise nach l_0, o_0 und p_0 um, so wird der aus o_0 als Mittelpunkt durch p_0 (Drehungsradius $= o_0 p_0$) beschriebene Kreis K_0 den umgelegten Drehungskreis vorstellen. Derselbe schneidet l_0 in zwei Punkten, von welchen jeder eine Lösung der Aufgabe liefert.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wählen wir den Schnittpunkt P_0. Die Centralprojektion **P** desselben ergibt sich, durch Zurückführung, in der Geraden $l = d' v'$. Ausserdem stellt der Winkel $p_0 o_0 P_0$ die wahre Grösse des entsprechenden Drehungswinkels vor.

§ 86.

54. Aufgabe: **Eine Ebene ist um eine Gerade so lange zu drehen, bis sie centralprojizierend wird.**

Sei **dv** die gegebene Drehungsaxe und $E_v E_b$ [Fig. 73, Taf. IV] die zu drehende Ebene.

Da bei der Drehung jeder Punkt von $E_v E_b$ einen Kreis beschreibt, dessen Radius dem Abstande dieses Punktes von der Drehungsaxe **dv** gleich ist, so folgt, dass der Schnittpunkt **s** von $E_v E_b$ und **dv** einen Kreis vom Radius „Null“ beschreiben, d. h. während der Drehung unverändert bleiben wird.

Denken wir uns zunächst eine beliebige zur Drehungsaxe **dv** senkrechte Ebene konstruiert. Der einfacheren Konstruktion wegen wählen wir die centralprojizierende Ebene $S_v S_b$, d. i. jene, deren Tracen in der dem Fluchtpunkte **v** entsprechenden Normalenfluchttrace S_v zusammenfallen. Diese Ebene schneidet

die Drehungsaxe dv in einem Punkte o, die Ebene $E_v E_b$ dagegen in einer Geraden $v' d' = \sigma$.

Bei der Drehung werden offenbar die sämtlichen Punkte der Geraden $\sigma = v' d'$ Kreise in der Ebene $S_v S_b$ beschreiben, die den Punkt o zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte haben, während gleichzeitig die Gerade $\sigma = v' d'$ bei der stattfindenden Drehung beständig Tangente an einen dieser Kreise K . . . bleiben wird.

Da weiter die Ebene E so weit gedreht werden soll, bis sie centralprojizierend wird, d. h. bis sie das Projektionscentrum C enthält, dieses aber in der Ebene $S_v S_b$ liegt, so ist einleuchtend, dass die gedrehte Ebene eine durch das Projektionscentrum gehende Tangente des vorgenannten Kreises K enthalten müsse.

Bestimmen wir nun mittels der durch dv gehenden Hilfsebene $h_v h_b$ den zur Bildflächtrace S_b resp. zur Fluchttrace S_v senkrechten Träger $A_1 \Delta$ von o, und legen wir o sowohl als auch $\sigma = v' d'$ um $S_v = S_b$ in die Bildebene beziehungsweise nach o_0 (im Schnitte von $C_0 o$ mit der durch Δ parallel zum umgelegten Fluchtstrahle $A_1 C_0$ geführten Geraden Δo_0) und σ_0 (durch d' parallel zu $C_0 v'$) um, so wird der aus o_0 als Mittelpunkt beschriebene, die Gerade σ_0 berührende Kreis K_0 den vorgenannten Kreis K nach seiner Umlegung um S_b vorstellen.

Führt man von C_0 aus an K_0 die Tangenten t_0^1 und t_0^2, so wird, wie vorher erörtert, jede derselben eine Lage der der Aufgabe entsprechenden gedrehten Geraden $d' v' = \sigma$ repräsentieren.

Die Schnittpunkte v_1 und v_2 der genannten Tangenten t_0^1 und t_0^2 mit $S_v = S_b$ sind selbstverständlich die Bildflächdurchstosspunkte derselben, und da durch die besagten Punkte v_1 und v_2 die Tracenpaare der beiden der Aufgabe entsprechenden centralprojizierenden Ebenen gehen müssen, wird die Verbindungsgerade sv_1 die Tracen E_v^1, E_b^1 der einen Lage der gedrehten Ebene $E_v E_b$, und die Verbindungsgerade sv_2 die Tracen $E_v^2 E_b^2$ der zweiten Lage in sich vereinigen.

§ 87.

55. Aufgabe: **In einer Ebene ist ein Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten bestimmte Abstände besitzt.**

Der in der Ebene $E_v E_b$ [Fig. 74, Taf. IV] zu bestimmende Punkt p wird sich daselbst als Schnittpunkt zweier Kreise

ergeben. Soll nämlich der besagte Punkt **p** von dem gegebenen Punkte **a** den Abstand λ_1 besitzen, so muss derselbe (nach § 72, Satz 5) auf jenem Kreise $\mathbf{K_1}$ in der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ liegen, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt $\mathbf{o_1}$ des von **a** auf $\mathbf{E_v E_b}$ gefällten Perpendikels ist, und dessen Radius die zweite Kathete jenes rechtwinkligen Dreieckes repräsentiert, in welchem die erste Kathete der Länge des genannten Perpendikels, und die Hypotenuse der Strecke λ_1 gleich ist.

Ebenso muss der zu suchende Punkt **p** gleichzeitig auch auf einem zweiten Kreise $\mathbf{K_2}$ liegen, welcher dem gegebenen Punkte **b** und der Strecke λ_2 entspricht.

Diese einfache Betrachtung führt zu der folgenden Konstruktion.

Wir setzen voraus, dass **a** und **b** entweder unmittelbar auf einem und demselben Träger gegeben seien oder dass der den Punkten **a** und **b** gemeinschaftliche Träger $\delta\,\varphi$ gefunden wurde.

Legen wir vermittels des Normalenfluchtpunktes $\mathbf{v_s}$ der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ durch $\delta\varphi$ die zu $\mathbf{E_v E_b}$ senkrechte Hilfsebene $\mathbf{h_v h_b}$, und bestimmen den Schnitt $\delta'\,\varphi'$ derselben mit der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$, so erhalten wir in den Schnittpunkten von $\delta'\,\varphi'$ mit den Perpendikeln $\mathbf{v_s a}$ und $\mathbf{v_s b}$ die Fusspunkte $\mathbf{o_1}$ und $\mathbf{o_2}$ der letzteren, d. i. die Mittelpunkte der vorgenannten Kreise $\mathbf{K_1}$ und $\mathbf{K_2}$. Die wahren Längen der Perpendikel $\mathbf{a o_1}$ und $\mathbf{b o_2}$ erhält man mittels des in $\mathbf{h_v}$ liegenden, dem Fluchtpunkte $\mathbf{v_s}$ entsprechenden Teilpunktes **T** auf der Bildflächtrace $\mathbf{h_b}$ in $\alpha\omega_1$ und $\beta\omega_2$.

Mit diesen so gefundenen Längen als Katheten konstruieren wir zwei rechtwinklige Dreiecke $\alpha\omega_1\rho_1$ und $\beta\omega_2\rho_2$, deren Hypotenusen $\rho_1\alpha$ und $\rho_2\beta$ beziehungsweise den gegebenen Längen λ_1 und λ_2 gleich sind. Die sich hierdurch, ergebenden zweiten Katheten $\omega_1\rho_1$ und $\omega_2\rho_2$ sind bereits die Radien der vorerwähnten Kreise $\mathbf{K_1}$ und $\mathbf{K_2}$.

Legt man nunmehr die Punkte $\mathbf{o_1}$ und $\mathbf{o_2}$ um $\mathbf{E_b}$ in die Bildebene nach $\mathbf{o_0^1}$ und $\mathbf{o_0^2}$ um, beschreibt man ferner aus den genannten Punkten $\mathbf{o_0^1}$ und $\mathbf{o_0^2}$ die Kreise $\mathbf{K_0^1}$ und $\mathbf{K_0^2}$ mit den bezüglichen Radien $\rho_1\,\omega_1$ und $\rho_2\,\omega_2$, und führt deren Schnittpunkte $\mathbf{p_0^1}$ und $\mathbf{p_0^2}$ nach $\mathbf{p_1}$ und $\mathbf{p_2}$ zurück, so bestimmen die letzteren die Centralprojektionen der beiden dem gestellten Probleme entsprechenden Punkte.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

§ 88.

56. Aufgabe: **Es ist ein Dreieck darzustellen, dessen eine Seite durch ihre Centralprojektion a b [Fig. 75, Taf. V] gegeben ist, dessen dritter Eckpunkt p in einer Ebene $E_v E_b$ liegen soll, und dessen beide anderen Seiten der wahren Länge λ_1 resp. λ_2 nach bekannt sind.**

Wie unschwer einzusehen steht dieses Problem mit der vorhergehenden Aufgabe insofern im Zusammenhang, als es sich auch diesfalls darum handelt in der Ebene $E_v E_b$ [Fig. 75, Taf. V] einen Punkt **p** zu bestimmen, welcher von **a** und **b** die gegebenen Abstände λ_1 und λ_2 besitzt. Im vorliegenden Falle jedoch wollen wir eine andere Konstruktionsmethode als dort in Anwendung bringen.

Vor allem bestimmen wir mittels des Teilpunktes **T** des Trägers $\delta\varphi$ der Punkte **a** und **b** d. i. der Trägergeraden von **ab**, die wahre Grösse $\alpha\beta$ der genannten Dreieckseite, konstruieren sodann ein Dreieck $\alpha\beta\pi$, in welchem die Seiten $\alpha\pi$ und $\beta\pi$ Längen besitzen, die beziehungsweise den gegebenen Strecken λ_1 und λ_2 gleich sind, fällen weiter von π auf $\alpha\beta$ das Perpendikel $\pi\omega$, und ermitteln (wieder mit Hilfe des Teilpunktes **T**) auf **ab** die Centralprojektion **o** desjenigen Punktes, welcher dem Fusspunkte ω der Senkrechten $\pi\omega$ auf h_b, d. i. auf der Bildflächtrace der durch $\delta\varphi$ gelegten Hilfsebene $h_b h_v$ entspricht.

Es ist einleuchtend, dass, wenn man im Raume durch **o** eine beliebige Senkrechte zu **ab** zieht, und auf derselben die Strecke **op** gleich $\omega\pi$ aufträgt, **ap** und **bp** stets gleich λ_1 resp. λ_2 sein werden.

Der geometrische Ort aller dieser Punkte **p** ist offenbar jener Kreis **K** in der durch **o** senkrecht zu **ab** oder $\delta\varphi$ geführten Ebene $S_v S_b$, welcher **o** zum Mittelpunkt hat, und dessen Radius gleich $\omega\pi$ ist.

Der Aufgabe entsprechend hat man bloss die gemeinschaftlichen Punkte dieses Kreises **K** und der Ebene $E_v E_b$ aufzusuchen. Zu diesem Zwecke legen wir sowohl **o** als auch die Schnittgerade $s = vd$ der beiden Ebenen **E** und **S** um S_b nach o_0 resp. s_0 um, beschreiben aus o_0 mit dem Radius $\omega\pi = r$ den Kreis K_0, und führen dessen Schnittpunkte p_0^1 und p_0^2 gleichzeitig mit s_0 beziehungsweise nach p_1 und p_2 zurück.

§ 89.

57. Aufgabe: **In einer Ebene $E_v E_b$ ist jener Punkt zu bestimmen, welcher von drei gegebenen Punkten M_1, M_2, M_3 gleich weit absteht.**

Die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 [Fig. 76, Taf. V] seien in der Ebene $E^v E_b'$ gegeben.

Wir legen die genannten Punkte um E_b' nach M_1^0, M_2^0, M_3^0 um, ermitteln den Mittelpunkt o_0 des durch die letzteren gehenden Kreises K_0 und bestimmen die Centralprojektion o von o_0 durch Zurückführung.

Zieht man sodann durch o mit Hilfe des Normalenfluchtpunktes v_s die Senkrechte $v_s o$ zu der Ebene $E_v' E_b'$, so wird offenbar jeder Punkt p der Geraden $v_s o$ von M_1, M_2, M_3 gleich weit abstehen, da im Raume die Dreiecke $M_1 op$, $M_2 op$ und $M_3 op$ stets kongruent sein werden.

Um daher den der gestellten Aufgabe entsprechenden Punkt zu finden, hat man nichts anderes zu thun, als den Schnittpunkt p der Geraden $v_s o$ mit der Ebene $E_v E_b$ zu konstruieren.

II. Abschnitt.

Die Elemente der projektivischen Geometrie.

IV. Kapitel.

§ 90.

Einleitende Bemerkungen und Definitionen.

Bisher haben wir uns darauf beschränkt Punkte, Geraden, Ebenen und aus diesen Elementen zusammengesetzte Gebilde centralprojektivisch darzustellen, ohne den gegenseitigen Zusammenhang zwischen den darzustellenden Gebilden und ihren bezüglichen Centralprojektionen eingehender zu beachten, als es gerade für irgend einen vorliegenden Zweck unumgänglich notwendig erschien.

Ein solcher Zusammenhang existiert aber nicht nur in der That, sondern es bietet derselbe vielmehr gleichzeitig den Schlüssel für das Studium von Eigenschaften räumlicher Gebilde, aus deren Kenntnis nicht nur der darstellenden Geometrie konstruktive Vorteile erwachsen, sondern welche auch an und für sich den Gegenstand eines äusserst wichtigen, lohnenden und interessanten geometrischen Wissenszweiges bilden, der als *„projektivische Geometrie“*, als *„Geometrie der Lage“* oder als *„Neuere Geometrie“* bezeichnet wird.

Da, wie vorher bemerkt wurde, die projektivische Geometrie einerseits ein wertvolles konstruktives Hilfsmittel für den darstellenden Geometer bildet, andererseits aber auch eine centralprojektivische Behandlung der Kurven und Flächen, namentlich jener vom zweiten Grade, ohne Kenntnis der projektivischen Geometrie kaum erfolgreich sein würde, so sollen im folgenden die wichtigsten Lehren dieser Disziplin entwickelt und deren Anwendung durch passende Beispiele klargelegt werden.

Vor allem wollen wir mit Hilfe der centralprojektivischen Darstellung zwei geometrische Sätze beweisen, welche die Grundlage aller Eigenschaften projektiver Natur bilden.

§ 91.

I. Fundamentalsatz: „Liegen die Ecken zweier Dreiecke (gleichgültig ob in einer Ebene oder in zwei verschiedenen Ebenen) paarweise auf drei durch einen und denselben Punkt gehenden Strahlen, so schneiden sich jene Seitenpaare, welche von denselben Strahlenpaaren begrenzt werden, in drei Punkten einer und derselben Geraden.“

Wir wollen den Beweis dieses Satzes für zwei in einer und derselben Ebene liegende Dreiecke liefern, da in demselben gleichzeitig auch der Beweis für zwei in verschiedenen Ebenen sich befindlichen Dreiecken enthalten ist.

Seien also in einer Ebene (der Zeichnungsebene) drei durch einen und denselben Punkt **S** [Fig. 77, Taf. V] gehende Strahlen **A**, **B**, **C**, und auf diesen beziehungsweise die Ecken $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$; $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$; zweier Dreiecke $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2$ gegeben.

Die drei Strahlen **A**, **B** und **C** denken wir uns als die Centralprojektionen dreier durch einen und denselben Punkt **S** im Raume gehenden, jedoch nicht in einer und derselben Ebene liegenden Strahlen, und folglich die Dreiecke $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2$ als die Centralprojektionen zweier Dreiecke, deren Ecken auf jenen Strahlen liegen. Die Ebenen dieser Dreiecke im Raume mögen $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ heissen, während deren Schnittgerade durch **s** repräsentiert werde.

Die beiden Strahlen **A** und **B** bestimmen im Raume eine Ebene, welche die Dreieckseiten $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2$ enthält. Die letztgenannten Geraden schneiden sich mithin in einem Punkte α, welcher als Punkt der beiden Ebenen $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ notwendig der Schnittgeraden **s** angehören muss. Die gleiche Uberlegung zeigt, dass auch der Schnittpunkt β der Dreieckseiten $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{a}_2\mathbf{c}_2$, sowie endlich auch der Schnittpunkt γ der Dreieckseiten $\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2$ in der den Ebenen $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ gemeinschaftlichen Geraden **s** liege.

Hiermit ist offenbar auch bereits der Beweis des vorausgeschickten Satzes für zwei in verschiedenen Ebenen $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ liegende Dreiecke erbracht.

Nachdem aber die Centralprojektion der Geraden **s** selbst

wieder notwendig eine Gerade ist, so gilt der Beweis auch für die Projektionen der genannten Dreiecke, d. i. für zwei in einer und derselben Ebene liegende Dreiecke, wie es eben die in Fig. 77, Taf. V gezeichneten Dreiecke $\mathbf{a_1 b_1 c_1}$ und $\mathbf{a_2 b_2 c_2}$ sind.

§ 92.

II. Fundamentalsatz: „Gehen die drei Seitenpaare zweier Dreiecke (in einer Ebene oder in zwei verschiedenen Ebenen) durch drei Punkte einer und derselben Geraden, so schneiden sich die drei Verbindungsgeraden entsprechender Ecken der beiden Dreiecke in einem und demselben Punkt.“

Der eben angeführte Satz ist zwar, wie ohne weiteres erkennbar, eine blosse Umkehrung des vorhergehenden; nichtsdestoweniger erfordert er aber doch einen selbständigen Beweis. Letzterer kann übrigens, als auf ähnlichen Betrachtungen wie der frühere beruhend, leicht geliefert werden.

Seien $\mathbf{a_1 b_1 c_1}$ und $\mathbf{a_2 b_2 c_2}$ [Fig. 77, Taf. V] die beiden Dreiecke, von welchen vorausgesetzt wird, dass die Schnittpunkte α, β und γ der Seitenpaare $\mathbf{a_1 b_1}$ und $\mathbf{a_2 b_2}$; $\mathbf{a_1 c_1}$ und $\mathbf{a_2 c_2}$; $\mathbf{b_1 c_1}$ und $\mathbf{b_2 c_2}$ in einer und derselben Geraden $\mathbf{s}$ liegen.

Die besagte Gerade $\mathbf{s}$ kann als die Centralprojektion der Schnittgeraden zweier Ebenen $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$; die Dreiecke $\mathbf{a_1 b_1 c_1}$ und $\mathbf{a_2 b_2 c_2}$ dagegen können als die Centralprojektionen zweier in diesen Ebenen liegenden Dreiecke aufgefasst werden.

Die in α, β, γ sich schneidenden Seitenpaare $\mathbf{a_1 b_1}$ und $\mathbf{a_2 b_2}$; $\mathbf{a_1 c_1}$ und $\mathbf{a_2 c_2}$; $\mathbf{b_1 c_1}$ und $\mathbf{b_2 c_2}$ bestimmen sodann drei Ebenen $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ und $\mathbf{e_3}$, welche sich in irgend einem Punkte $\mathbf{S}$ schneiden werden. Selbstverständlich gehen durch den letztgenannten Punkt $\mathbf{S}$ auch die drei Schnittgeraden, welche die drei Ebenen $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ und $\mathbf{e_3}$ paarweise ergeben. Die Schnittgerade der Ebenen $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ kann aber nur die Gerade $\mathbf{a_1 a_2}$ sein, da die Punkte $\mathbf{a_1}$ und $\mathbf{a_2}$ den genannten Ebenen gemeinschaftlich sind. Ebenso findet man, dass $\mathbf{b_1 b_2}$ die Schnittgerade von $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_3}$ und $\mathbf{c_1 c_2}$ die Schnittgerade von $\mathbf{e_2}$ und $\mathbf{e_3}$ darstellt. Die drei Geraden $\mathbf{a_1 a_2}$, $\mathbf{b_1 b_2}$ und $\mathbf{c_1 c_2}$ gehen somit durch den Punkt $\mathbf{S}$.

Das Gesagte gilt sowohl für die beiden im Raume in den Ebenen $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$ gedachten Dreiecke, als auch für deren [in Fig. 77, Taf. V dargestellte] Centralprojektion, so zwar, dass wir hiermit den oben aufgestellten Satz sowohl für zwei Dreiecke

in verschiedenen Ebenen, als auch für zwei in einer und derselben Ebene liegende Dreiecke als bewiesen betrachten können.

§ 93.

Die Aufeinanderfolge von Punkten auf einer Geraden und deren gegenseitige Lage im allgemeinen.

Ein auf einer geraden Linie **L** fortschreitender Punkt **A** [Fig. 78, Taf. V] kann auf zweierlei Wegen ins Unendliche gelangen, so dass es den Anschein hat, als ob die Gerade **L** zwei unendlich ferne Punkte besässe. Da man jedoch, wenn diese Voraussetzung gemacht würde, mit gewissen feststehenden Thatsachen in einen unlöslichen Widerspruch geraten würde, so dürfte die Annahme, dass eine Gerade bloss einen einzigen unendlich fernen Punkt besitze oder dass, mit anderen Worten, die beiden von **A** ausgehenden Teile der Geraden **L** (in einer sich allerdings der sinnlichen Anschauung entziehenden Weise) im Unendlichen kontinuierlich zusammen hängen, gerechtfertigt erscheinen.

Ohne uns hier auf eine eingehende theoretische Rechtfertigung dieses Gegenstandes einzulassen, wollen wir doch die Richtigkeit des Gesagten auf eine für unsere dermaligen Zwecke genügende indirekte Weise darlegen.

Ist eine Gerade centralprojektivisch dargestellt, und wir lassen irgend eine Strecke der gegebenen Geraden stetig von einem Punkte durchlaufen, so wird auch die Centralprojektion des Punktes die Centralprojektion des besagten Stückes der Geraden stetig zurücklegen, und umgekehrt.

Nun treffen aber die Centralprojektionen der beiden ins Unendliche verlaufenden Teile der Geraden stetig im Fluchtpunkte der Geraden, d. i. in der Centralprojektion des unendlich fernen Punktes zusammen; wir sind sonach berechtigt anzunehmen, dass auch die Originale, d. h. die beiden sich ins Unendliche erstreckenden Teile der Geraden, nur einen (dem genannten Fluchtpunkte entsprechenden) unendlich fernen Punkt besitzen, und dass sie in demselben stetig zusammentreffen.

Folgende Betrachtung liefert dasselbe Resultat. Sei **L** [Fig. 78, Taf. V] eine beliebige Gerade, **A** ein Punkt derselben, und **C** irgend ein der Geraden **L** nicht angehörender Punkt.

Durch den Punkt **A**, sowie durch jeden anderen Punkt von **L** geht stets nur ein Strahl, welcher gleichzeitig den Punkt **C** enthält, und wenn **A** sich stetig auf **L** fortbewegt, wird sich auch der ihn begleitende Strahl **CA** stetig um **C** drehen.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir für den Punkt **A** die mit dem Pfeile bezeichnete Fortschreitungsrichtung an. Derselben entspricht die im Sinne eines Uhrzeigers verlaufende Drehung des begleitenden Strahles **CA**. Je weiter der Punkt **A** über A_1 hinaus sich entfernt, desto mehr nähert sich der ihn begleitende Strahl **CA** . . . CA_1 . . . der Parallellage CU_∞ von **L**, und wird die letztere endlich und zwar dann einnehmen, wenn **A** thatsächlich im Unendlichen verschwindet.

Sobald aber der besagte Strahl die Parallellage auch nur um das Geringste überschreitet, taucht der Punkt **A** sofort auf der entgegengesetzten Seite der Geraden bei A_2 auf, und nähert sich endlich, bei fortgesetzter Drehung (im Sinne des Pfeiles) des ihn begleitenden Strahles CA_2, wieder der ursprünglichen Lage **A**. Da aber die Drehung des Strahles durch die Parallellage CU_∞ stetig erfolgt, so sind wir berechtigt anzunehmen, dass auch der Punkt **A**, während er die ganze Gerade **L** durchläuft, durch den unendlich fernen Punkt stetig hindurchgeht.

Der Punkt **A** kann auf diese Weise auf zweierlei Art die ganze Gerade **L** durchlaufen, — einmal entsprechend der Fortschreitungsrichtung des Pfeiles, das andere Mal in dem entgegengesetzten Sinne. In beiden Fällen muss notwendigerweise sein Durchgang durch den unendlich fernen Punkt der Geraden erfolgen.

Wenden wir uns nun, auf Grund der bezüglich des unendlich fernen Punktes gemachten Annahme, zu weiteren Betrachtungen.

Auf einer Geraden **l** [Fig. 79, Taf. V] seien zwei Punkte **a** und **b** gegeben. Wenn ein beweglicher Punkt auf der Geraden **l** die Lage **a** einnimmt, so kann derselbe auf zweierlei Weise nach **b** gelangen, und zwar das eine Mal durch die Bewegung von links nach rechts im Wege der endlichen Strecke **ab**, und das andere Mal durch die Bewewegung von rechts nach links im Wege der unendlich grossen Strecke **ab**, d. h. durch den unendlich fernen Punkt hindurch, oder wie man zu sagen pflegt, im Wege der *„supplementären“* Strecke **ab**.

Ebenso kann man von **b** nach **a** im Wege dieser beiden Richtungen gelangen.

Sind auf einer Geraden l [Fig. 80, Taf. V] drei Punkte **a**, **b**, **c** gegeben, so kann man von jedem einzelnen dieser Punkte zu jedem zweiten gelangen, ohne den dritten zu treffen, jedoch stets nur auf eine einzige mögliche Art.

Und zwar: von **a** nach **b** von links nach rechts im endlichen Wege ab;

von **a** nach **c** von rechts nach links im Wege der supplementären (unendlichen) Strecke **ac**;

von **b** nach **a** von rechts nach links längs der endlichen Strecke **ba**;

von **b** nach **c** von links nach rechts längs der endlichen Strecke **bc**;

von **c** nach **a** von links nach rechts im Wege der unendlichen Strecke **ca** und ferner

von **c** nach **b** von rechts nach links längs der endlichen Strecke **cb**.

Hingegen kann man beispielsweise von **b** nicht nach **a** gelangen, ohne **c** zu treffen, wenn die Richtung von links nach rechts eingeschlagen wird u. s. w.

Nehmen wir schliesslich an, dass auf einer Geraden l vier Punkte **a**, **b**, **c** und **d** [Fig. 81, Taf. V] gegeben seien.

Diese vier Punkte können auf dreierlei Weise in je zwei Paare **ab**, **cd**; **ad**, **bc**; und **ac**, **bd** gruppiert werden. Ausser diesen sechs Paaren lassen sich keine weiteren Paare auffinden.

Stellen wir nun ähnliche Betrachtungen wie vorher an, so finden wir folgendes.

Von **a** kann man nach **b** und umgekehrt von **b** nach **a**, und zwar im Wege der endlichen Strecke **ab** oder **ba** gelangen, ohne den Punkt **c** oder **d** zu treffen, während dies unmöglich wird, sobald die Fortschreitung auf dem unendlichen (supplementären) Wege von **ab** stattfindet. Ebenso kann man längs der endlichen Strecke **cd** oder **dc** von **c** nach **d** oder von **d** nach **c** gelangen, ohne die Punkte **a** und **b** zu treffen.

Dieses Ergebnis resp. dieses gegenseitige Verhalten pflegen wir dadurch auszudrücken, dass wir sagen, die beiden Punktepaare **ab** und **cd** sind *„gegenseitig nicht getrennt“*. Hierbei bemerken wir gleichzeitig, dass die durch dieselben bestimmten endlichen Strecken **ab** und **cd** keinen einzigen Punkt gemein haben.

Betrachten wir ferner die beiden Punktepaare **ad** und **bc**, so finden wir, dass man von **a** nach **d** oder von **d** nach **a** längs des

unendlichen Weges gelangen kann, ohne auf **b** und **c** zu treffen, dass dieses jedoch längs des endlichen Weges **ad** nicht möglich sei. Ebenso wird man von **b** nach **c** oder von **c** nach **b** längs des endlichen Weges **bc** gelangen können, ohne **a** und **d** zu treffen, nicht aber auf dem unendlichen Wege **bc**.

Es gibt also auch in diesem Falle stets einen bestimmten Weg, welcher von einem Punkte eines Paares zum zweiten Punkte desselben Paares führt, ohne einen Punkt des anderen Paares zu treffen, woraus hervorgeht, dass auch die Punktepaare **a, d** und **b, c** sich gegenseitig nicht trennen. Gleichzeitig sei hier hervorgehoben, dass alle Punkte der einen endlichen Strecke, — **bc** — zugleich auch Punkte der anderen endlichen Strecke — **ad** — sind.

Die beiden vorher angeführten Punktepaare **a, c** und **b, d** dagegen zeigen ein wesentlich verschiedenes Verhalten.

Von **a** kann man im endlichen Wege, d. i. von links nach rechts, nicht zu **c** gelangen ohne **b** zu treffen, und ebenso wenig ist dies im unendlichen Wege d. i. von rechts nach links möglich, ohne **d** zu begegnen. In gleicher Weise muss man von **c** nach **a** im endlichen Wege (von rechts nach links) den Punkt **b**, und im unendlichen Wege (von links nach rechts) den Punkt **d** überschreiten.

Übereinstimmend hiermit findet man schliesslich auch, dass es keinen Weg von **b** nach **d** oder von **d** nach **b** gibt, auf welchem nicht einer der beiden Punkte **a** oder **c** zu überschreiten wäre. Man drückt dieses Verhalten kurz dadurch aus, dass man sagt: die beiden Paare **a, c** und **b, d** „trennen sich gegenseitig."

Hierbei finden wir ausserdem, dass gewisse Punkte der beiden endlichen Strecken **ac** und **bd** sich decken, oder mit anderen Worten, dass diese Strecken einander übergreifen. Wir erhalten sonach den Satz:

„Vier Punkte einer Geraden können auf drei Arten in zwei Paare gruppiert werden, und zwar so, dass:

a) die von den beiden Punktepaaren gebildeten endlichen Stücke der Geraden keinen Punkt gemein haben;

b) dass die von dem einen Paare gebildete endliche Strecke gänzlich in der von dem zweiten Paare gebildeten Strecke enthalten ist, und

c) dass sich die von den Punktepaaren bestimmten endlichen Strecken teilweise decken (übergreifen).

Im letzten Falle trennen sich die beiden Punktepaare gegenseitig, in den beiden ersten Fällen trennen sich dieselben nicht.“

Andere Lagen von vier Punkten auf einer Geraden, als die eben betrachteten, gibt es nicht.

§ 94.

Die allgemeine Lage von Strahlen durch einen festen Punkt.

Analoge Betrachtungen wie die soeben „über Punkte einer Geraden“, vorausgeschickten, können auch bezüglich der „durch einen festen Punkt gehenden Strahlen“ angestellt werden.

Denken wir uns zwei unbegrenzte, durch einen Punkt **S** [Fig. 82, Taf. V] gehende Strahlen α und β. Der Strahl α kann durch Drehung um **S** mit dem Strahle β zur Deckung gebracht werden, und kann dies, wie an und für sich klar, auf zweifache Art geschehen. Das eine Mal nämlich dadurch, dass man den Strahl α bei der Drehung um **S** in einem der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Sinne den (in Figur 82) spitzen Winkel (α, β) durchlaufen lässt, und das andere Mal durch eine Drehung im Sinne eines Uhrzeigers, wobei der Strahl α den Supplementwinkel des vorgenannten Winkels (α, β) [in Fig. 82 den stumpfen Winkel (α, β)] beschreibt.

Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass es, um einen Strahl durch Drehung mit einem anderen zur Deckung zu bringen, (infolge der zu beiden Seiten von **S** unendlich ausgedehnten Strahlen) niemals notwendig ist, einen grösseren Winkel als zwei Rechte zu beschreiben. So wird beispielsweise der Strahl α durch die Uhrzeigerdrehung bereits nach Beschreibung des stumpfen Winkels (α, β) mit dem Strahle β zusammentreffen; es wird mithin überflüssig erscheinen, die Drehung durch den überstumpfen (durch einen Pfeil bezeichneten) Winkel fortzusetzen, wobei der Strahl α, nach Vollendung einer halben Umdrehung, seine eigene ursprüngliche Lage überschreiten würde. Auch in der Folge werden wir daran festhalten, dass bei einem vorgeschriebenen Drehungssinne ein Strahl immer nur den möglichst kleinsten Winkel beschreibe, um mit einem zweiten Strahle zur Deckung zu gelangen.

Gehen drei Strahlen α, β, γ [Fig. 83, Taf. V] durch einen Punkt **S**, so kann bei unbestimmt gelassenen Drehungssinne jeder Strahl mit jedem zweiten zusammentreffen, ohne den dritten zu überschreiten.

Man gelangt nämlich von α nach β links abwärts oder rechts nach aufwärts drehend (d. h. entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung) und von β nach α rechts abwärts oder links nach aufwärts drehend (im Sinne der Uhrzeigerbewegung), ohne γ zu treffen.

Ferner gelangen wir von β nach γ links abwärts drehend, oder von γ nach β rechts abwärts drehend, ohne α zu überschreiten, und endlich von α nach γ rechts nach abwärts drehend oder von γ nach α links abwärts drehend, ohne β zu treffen.

Nehmen wir schliesslich vier durch einen Punkt **S** [Fig. 84, Taf. V] gehende Strahlen α, β γ und δ an, so können dieselben auf dreierlei Weise in die Paare α, β und γ, δ; α, δ und β, γ; α, γ und β, δ zusammengefasst werden.

Von α gelangt man links nach abwärts und rechts aufwärts drehend nach β, oder von β rechts nach abwärts und links aufwärts drehend (d. i. entgegen der Uhrzeigerbewegung) nach α, ohne γ oder δ zu überschreiten. Ebenso kann man γ links nach abwärts und rechts nach aufwärts drehend mit δ, oder δ rechts nach abwärts und links nach aufwärts drehend (d. i. im Sinne des Uhrzeigers) mit γ zur Deckung bringen, ohne dass die Strahlen α und β getroffen werden. Man sagt in diesem Falle wieder, die Strahlenpaare α, β und γ, δ trennen sich gegenseitig nicht.

Nimmt man hierbei eine von den beiden Winkelflächen (die spitze oder die stumpfe), welche von dem erstgenannten Strahlenpaare begrenzt sind, und eine von den zwei Winkelflächen, welche das andere Strahlenpaar bildet, so wird man, die beiden stumpfen Winkelflächen ausgenommen, finden, dass entweder die eine dieser Flächen ganz in der anderen enthalten ist, oder aber, dass sie gar keinen Teil gemein haben, sich jedoch auf keinen Fall teilweise decken werden.

Zu einem gleichen Resultate führen die beiden Strahlenpaare α, δ und β, γ.

Man kann α rechts abwärts, links aufwärts drehend nach δ oder δ links abwärts, rechts aufwärts drehend nach α überführen, ohne β oder γ zu treffen, und ebenso kann β links abwärts, rechts aufwärts drehend nach γ; oder γ rechts abwärts, links aufwärts drehend nach β gelangen, ohne α oder δ zu überschreiten.

Die Paare α, δ und β, γ erscheinen mithin ebenfalls nicht getrennt, und man wird wieder finden, dass eine Winkelfläche des einen Paares ganz in einer Winkelfläche des anderen Paares enthalten ist, oder dass die beiden Paare keinen Teil gemein

haben (die beiden stumpfen Winkelflächen [α, δ] und [β, γ] ausgenommen), dass sich jedoch in keinem Falle die beiden Winkelflächen (mit Ausnahme der stumpfen) teilweise decken.

Ganz andere Verhältnisse treten bezüglich der beiden Strahlenpaare α, γ und β, δ auf.

Von α kann man nach γ linksdrehend oder von γ nach α rechtsdrehend nur durch Überschreitung des Strahles β, und von α nach γ rechtsdrehend oder von γ nach α linksdrehend nur durch Uberschreitung des Strahles δ gelangen.

Ebenso trifft man bei der linksdrehenden Bewegung von β nach δ, oder rechtsdrehend von δ nach β den Strahl γ, und endlich von β rechtsdrehend nach δ oder von δ linksdrehend nach β den Strahl α. Die Strahlenpaare α, γ und β, δ trennen sich mithin gegenseitig.

In diesem Falle ist auch die Beziehung der Winkelflächen beider Paare gerade entgegengesetzt der früheren.

Während nämlich früher zwei von den betreffenden Strahlenpaaren begrenzte Winkelflächen sich teilweise nicht decken (mit Ausnahme der beiden stumpfen Winkelflächen, welche thatsächlich teilweise zur Deckung kommen) tritt hier im letztbetrachteten Falle umgekehrt eine teilweise Deckung der beiden spitzen Flächen (α, γ) und (β, δ) ein. Es gilt sonach der Satz:

„Vier durch einen festen Punkt gehende Strahlen können auf dreierlei verschiedene Weise in je zwei Strahlenpaare zusammengefasst werden.

In einer dieser Kombinationen decken sich die spitzen (kleineren) Winkelflächen der betreffenden Strahlenpaare teilweise, und sind die letzteren gegenseitig getrennt.

Bei zwei der möglichen Kombinationen dagegen haben die beiden spitzen Winkelflächen entweder keinen Teil gemein, oder die eine ist ganz in der anderen enthalten. Diesfalls trennen sich die betreffenden Strahlenpaare gegenseitig nicht.“

§ 95.

Es lässt sich nunmehr leicht zeigen, dass, wenn zwei sich trennende Punktepaare einer Geraden von einem festen Punkte durch zwei Strahlenpaare projiziert werden, diese letzteren sich ebenfalls trennen müssen.

Der Beweis hierfür lässt sich durch nachstehende Betrachtung sofort liefern.

Denken wir uns zwei sich trennende Punktepaare **a, c** und **b, d** auf einer Geraden **r** (Fig. 90, Taf. V], so müssen sich (nach Satz in § 93) die endlichen Strecken **ac** und **bd** teilweise decken; es wird mithin einer der Punkte **b** und **d** innerhalb der Strecke **ac**, der andere dagegen notwendig ausserhalb dieser Strecke liegen. Projizieren wir weiter von einem festen Punkte **S** aus die vier Punkte **a, b, c, d** durch die vier Strahlen α, β, γ, δ und bilden wir die den Paaren **a, c** und **b, d** entsprechenden Strahlenpaare α, γ und β, δ, so können zwei Fälle eintreten.

Die dem Paare α, γ entsprechende spitze Winkelfläche enthält entweder alle Punkte der Strecke **ac** oder (die Endpunkte **a** und **c** selbstverständlich ausgenommen) keinen derselben.

Im ersten Falle wird die genannte spitze Winkelfläche notwendig den auf der Strecke **ac** liegenden Punkt des Paares **b, d**; im zweiten Falle hingegen den ausserhalb **ac** liegenden Punkt des Paares **b, d** enthalten. Stets aber wird die spitze Winkelfläche entweder den Punkt **b** oder den Punkt **d**, also auch entweder den Strahl β oder den Strahl δ enthalten müssen.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die spitze Winkelfläche (α, γ) einen Teil der spitzen Winkelfläche (β, δ) enthalten muss, dass sich also (Satz in § 94) die Strahlenpaare α, γ und β, δ trennen müssen.

Da nun nachgewiesen ist, dass die sich trennenden zwei Paare von vier Punkten einer Geraden durch zwei sich trennende Strahlenpaare projiziert werden, und (nach den Sätzen in § 93 und 94) vier Punkte oder vier Strahlen nur auf eine einzige Weise in sich gegenseitig trennende Paare zusammengefasst werden können, so folgt der Satz:

„Die beiden Strahlenpaare, welche von einem beliebigen Punkte nach zwei sich trennenden oder zwei sich nicht trennenden Punktepaaren einer beliebigen Geraden gehen, sind ebenfalls gegenseitig getrennt oder nicht getrennt, und umgekehrt.“

§ 96.

Das vollständige Viereck und die Definition harmonischer Gebilde.

Nehmen wir in einer Ebene vier beliebige Punkte **a, b, c, d** [Fig. 85, Taf. V] an. Werden diese vier Punkte durch vier Strecken in solcher Weise verbunden, dass durch jeden derselben nur zwei

Strecken gehen, so erhält man ein Gebilde, welches in der Elementargeometrie ein Viereck genannt wird.

Aus den vier Punkten **a**, **b**, **c**, **d** kann aber auch noch ein anderes ebenes Gebilde abgeleitet werden, welches in der projektivischen Geometrie als ein *„vollständiges Viereck“* bezeichnet wird.

Die vier Punkte **a**, **b**, **c** und **d** pflegt man diesfalls die *„Eckpunkte“* oder kurz die *„Ecken“* des vollständigen Vierecks, und die sechs unbegrenzten Geraden **A** = **ab**, **B** = **cd**, **C** = **ac**, **D** = **bd**, **E** = **ad** und **F** = **bc**, welche sich durch paarweise Verbindung dieser Ecken ergeben, die *„Seiten“* des vollständigen Vierecks zu nennen.

Diese Seiten kann man einerseits zu Dreien gruppieren, welche einen Eckpunkt gemein haben, aber auch andererseits (was von grösserer Bedeutung ist), zu Paaren gruppieren, welche keinen Eckpunkt gemeinschaftlich besitzen.

Das Gesagte kann dadurch bewirkt werden, dass man einer Seite, welche zwei Eckpunkte verbindet, stets jene Seite zugesellt, welche die beiden noch übrigen Eckpunkte verbindet. Zwei derartige Seiten bezeichnet man als *„Gegenseiten“* des vollständigen Viereckes. Das letztere hat mithin drei Paare von Gegenseiten, nämlich **A**=**ab** und **B**=**cd**; **C**=**ac** und **D**=**bd**; **E**=**ad** und **F** = **bc**.

Da je zwei Gegenseiten keinen Eckpunkt gemein haben, so folgt, dass deren Schnitt je einen neuen Punkt ergeben müsse. Wir erhalten auf diese Weise die drei Punkte **x**, **y** und **z** als Schnitte der Gegenseitenpaare **A** und **B**; **C** und **D**; **E** und **F**.

Das von diesen drei Punkten gebildete Dreieck **xyz** heisst das dem vollständigen Viereck entsprechende „Diagonaldreieck“, und die unbegrenzt gedachten Seiten **X**=**yz**, **Y**=**zx** und **Z**=**xy** dieses Dreieckes werden als die Diagonalen des vollständigen Viereckes bezeichnet.

Da weiter jede Diagonale die Verbindungsgerade der Schnittpunkte zweier Paare von Gegenseiten ist, so wird sie das jeweilige dritte Paar von Gegenseiten in zwei neuen Punkten treffen. Hiernach ergeben sich schliesslich noch die sechs Punkte **m**, **n**, **o**, **p**, **q**, **r**, womit das vollständige Viereck als geschlossen anzunehmen ist.

Was die in einem derartigen vollständigen Viereck vorkommenden Punkte und Geraden betrifft, so finden wir folgende Eigentümlichkeiten.

Auf jeder der sechs Seiten und auf jeder der drei

Diagonalen liegen vier Punkte des besagten Gebildes, und es ist sofort ersichtlich, dass, sobald man vier derartige Punkte in die sich gegenseitig trennenden Paare zusammenfasst, das eine Paar stets zwei Gegenseiten, das andere Paar dagegen stets zwei Diagonalen angehört.

Ferner findet man, dass durch jeden Eckpunkt des Diagonaldreiecks vier gerade Linien des bezeichneten ebenen Gebildes gehen. Fasst man auch diese in die sich gegenseitig trennenden Paare zusammen, so ergibt sich, dass das eine Paar stets zwei Gegenseiten, das andere Paar aber zwei Diagonalen des Viereckes repräsentiert.

Endlich überzeugt man sich auch leicht, dass die vier obbezeichneten Punkte auf einer beliebigen Geraden des Gebildes, die Centralprojektionen von vier auf einer beliebigen zweiten Geraden des Gebildes liegenden Punkte sind, und dass das betreffende Projektionscentrum stets auch ein dem Gebilde selbst angehörender Punkt sein muss.

Vier Punkte einer Geraden, welche in demselben geometrischen Zusammenhange stehen, wie die vier Punkte auf einer Seite oder auf einer Diagonale eines vollständigen Viereckes, und welche sich thatsächlich als das Resultat der besprochenen Viereckskonstruktion ergeben, bezeichnet man als *„vier harmonische Punkte“* oder als eine *„harmonische Punktgruppe“*. Zwei dieser Punkte, welche durch die beiden anderen getrennt sind, heissen *„einander harmonisch konjugierte“* oder *„einander harmonisch zugeordnete Punkte“*.

In gleichem Sinne wird man vier durch einen und denselben Punkt gehende Strahlen, welche denselben geometrischen Zusammenhang besitzen, wie die durch einen Diagonaleckpunkt eines vollständigen Viereckes gehenden vier Strahlen, oder sich in der That als solche ergeben, *„vier harmonische Strahlen“* oder einen *„harmonischen Vierstrahl“* nennen. Unter den vier Strahlen bezeichnet man immer jene als *„harmonisch konjugiert“* oder *„harmonisch zugeordnet“*, welche durch die beiden übrigen getrennt sind.

§ 97.

Das vollständige Vierseit und die an demselben auftretenden harmonischen Gebilde.

Ein zweites ebenes Gebilde von nicht minderer Wichtigkeit, welches überdies nahezu dieselben Linien und Punkte wie ein voll-

ständiges Viereck besitzt, sich aber von dem letzteren durch seinen Ursprung oder seine Entwickelung unterscheidet, ist das *„vollständige Vierseit“*.

Während bei dem vollständigen Viereck vier Punkte, die Eckpunkte desselben, die Grundlage für die Konstruktion des Viereckes bilden, sind es bei dem vollständigen Vierseit vier beliebige Geraden **a**, **b**, **c**, **d** [Fig. 86, Taf. V] einer Ebene, von welchen ausgegangen wird. Besagte Geraden nennen wir die *„Seiten“* des Vierseites.

Diese Seiten schneiden sich paarweise in sechs Punkten, d. i. in $\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$; $\mathbf{B} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$; $\mathbf{C} = (\mathbf{a}, \mathbf{c})$; $\mathbf{D} = (\mathbf{b}, \mathbf{d})$; $\mathbf{E} = (\mathbf{a}, \mathbf{d})$ und $\mathbf{F} = (\mathbf{b}, \mathbf{c})$, welche die *„Ecken“* oder *„Eckpunkte“* des Vierseites heissen.

Je zwei Eckpunkte, welche nicht einer und derselben Seite angehören, pflegt man *„Gegeneckpunkte“* zu nennen. Man hat demnach die drei Paare Gegenecken **A** und **B**; **C** und **D**; **E** und **F**.

Nachdem zwei Gegenecken, der gegebenen Definition entsprechend, nicht auf einer und derselben Seite des Vierseites liegen, so werden die drei Geraden **x**, **y** und **z**, welche sich als Verbindungslinien der drei Paare von Gegenecken **A**, **B**; **C**, **D** und **E**, **F** ergeben, drei neue Geraden des Vierseits vorstellen. Man nennt diese Geraden die „Diagonalen“ des vollständigen Vierseits, während man das von ihnen gebildete Dreieck, als das dem Vierseit entsprechende *„Diagonaldreiseit“* und die Eckpunkte **X**, **Y**, **Z** des letzteren, als die *„Diagonalecken“* des vollständigen Vierseites bezeichnet.

Hiermit ist zwar, streng genommen, das genannte Gebilde abgeschlossen, doch kann man noch sechs Verbindungsgeraden d. i. jene hinzufügen, welche die Diagonalecken mit den auf den ihnen gegenüberliegenden Diagonalen sich befindlichen Gegeneckenpaaren verbinden. Demnach erhält man noch die Geraden **m**, **n**, **o**, **p**, **q** und **r**.

Betrachtet man nunmehr das Gebilde, so findet man, dass auf jeder Diagonale vier Punkte liegen, von welchen zwei „Gegenecken“, und die übrigen zwei „Diagonalecken“ sind.

Die besagten beiden Punktepaare trennen sich. Weiter konvergieren in jedem Eckpunkte zwei sich trennende Strahlenpaare, das sind zwei Seiten des Vierseites (welche das eine Paar bilden), sowie eine Diagonale und jene Gerade, welche nach der jeweilig

gegenüberliegenden Diagonalecke führt. Die beiden leztgenannten Geraden bilden das zweite Strahlenpaar.

Endlich gehen auch durch jeden Diagonaleckpunkt zwei sich trennende Paare, und zwar zwei Diagonalen sowie zwei Geraden nach „Gegeneckpunkten“ des Vierseites.

Es ist leicht einzusehen, dass je vier solcher Punkte, welche auf einer Geraden des vollständigen Vierseites durch dessen andere Geraden bestimmt werden, sowie auch je vier durch einen Punkt des Gebildes gehenden Geraden beziehungsweise harmonische Punkte oder harmonische Geraden vorstellen, und zwar einfach aus dem Grunde, weil jedes vollständige Vierseit, sobald man seinen Bestandteilen eine andere Bedeutung beilegt, unmittelbar als vollständiges Viereck aufgefasst werden kann.

Betrachtet man beispielsweise die Punkte **D**, **C**, **E**, **F** [Fig. 86, Taf. V] als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes, so erhält man als die sechs Seiten desselben die Geraden **a**, **b**, **c**, **d**, **y** und **z**; als Diagonaleckpunkte die Punkte **X**, **A**, **B** und als Diagonalen die Geraden **x**, **m**, **n**, — durchwegs also Punkte und Geraden, welche im vollständigen Vierseit bereits enthalten sind.

§ 98.

Konstruktion von harmonischen Elementen mittels des vollständigen Viereckes, und die Eindeutigkeit derselben.

Auf einer Geraden **l** [Fig. 87, Taf. V] seien drei beliebige Punkte **a**, **b**, **c** gegeben. Zu diesen drei Punkten soll ein vierter Punkt **d** so konstruiert werden, dass **a**, **b**, **c** und **d** vier harmonische Punkte sind.

Besagter Punkt **d** kann entweder zwischen **b** und **c**; ausserhalb der Strecke **ac**, oder auch zwischen **a** und **b** liegen, je nachdem wir voraussetzen wollen, dass er mit **a**, **b** oder **c** konjugiert sei.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, setzen wir fest, dass der zu suchende Punkt **d** mit dem Punkte **b** ein konjugiertes Paar bilden solle.

Es ist demnach ein vollständiges Viereck so zu konstruieren, dass die Gerade **l** eine Seite oder Diagonale desselben werde, dass durch **a** und **c** zwei Gegenseiten und durch **b** und **d** zwei Diagonalen gehen, oder umgekehrt.

Dies kann folgendermassen geschehen. Wir nehmen ausser-

halb **l** einen beliebigen Punkt A_1 an, und ziehen die Geraden A_1a, A_1b, A_1c. Auf A_1b, d. i. auf demjenigen Strahle, welcher durch den, dem zu suchenden Punkte **d** konjugierten Punkt **b** geht, wählen wir einen zweiten beliebigen Punkt B_1. Die Verbindungsgeraden aB_1 und cB_1 schneiden beziehungsweise die Geraden A_1c und A_1a in C_1 resp. D_1, während die Verbindungsgerade C_1D_1 die Gerade A_1B_1 in X_1 und die Gerade **l** in dem gesuchten Punkte **d** trifft.

Betrachtet man nämlich A_1, B_1, C_1 und D_1 als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes, so ist **l** eine Diagonale desselben, ferner gehen durch **a** und **c** zwei Diagonalen, nämlich aX_1 und cX_1, und durch **b** und **d** zwei Gegenseiten A_1B_1 und C_1D_1.

Oder, fasst man **a**, **c**, C_1, D_1 als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes auf, so ist **l** eine Seite desselben; durch **a** und **c** gehen zwei Gegenseiten aD_1 und cC_1 und durch **b** und **d** zwei Diagonalen A_1B_1 und B_1d.

Nach beiden Auffassungsarten sind **a** und **c** durch **b** und **d** (gemäss der in § 96 aufgestellten Definition) harmonisch getrennt. Auch wird es keinerlei Schwierigkeit unterliegen, zu zeigen, dass die Lage des Punktes **d** mit der Wahl des Hilfsvierecke in keiner Beziehung steht, sondern bloss von der gegenseitigen Lage der drei Punkte **a**, **b**, **c** abhängig ist, oder mit anderen Worten, dass auch ein anderweitig gewähltes, nach derselben Methode konstruiertes Hilfsviereck $A_2B_2C_2D_2$ [Fig. 87, Taf. V] immer wieder den nämlichen, d. i. den bereits durch $A_1B_1C_1D_1$ gelieferten Punkt **d** ergeben wird.

Der Beweis hierfür ist leicht zu erbringen.

Die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ liegen so, dass ihre Seiten durch die nämlichen Punkte **a**, **b**, **c** der Geraden **l** gehen. Entsprechend dem vorangeführten zweiten Fundamentalsatz (§ 92), müssen sodann die Verbindungsgeraden A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 durch einen und denselben Punkt **S** gehen. Desgleichen gehen die Seiten der beiden Dreiecke $A_1B_1D_1$ und $A_2B_2D_2$ durch die Punkte **a**, **b**, **c**; es müssen daher die Verbindungsgeraden A_1A_2, B_1B_2 und D_1D_2 durch einen und denselben Punkt **S** gehen. Dieser Punkt **S** ist offenbar der nämliche, wie der im vorhergehenden Falle gefundene, da er dort ebenfalls als Schnitt der gleichnamigen Strahlen A_1A_2 und B_1B_2 erhalten wurde. Es führen mithin alle vier Verbindungsstrahlen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 und D_1D_2 durch den nämlichen Punkt **S**.

Dieses Ergebnis festhaltend werden wir (unter gleichzeitiger

Anwendung des vorangeschickten ersten Fundamentalsatzes (§ 91) auf die Dreiecke $A_1C_1D_1$ und $A_2C_2D_2$) finden, dass die Schnittpunkte der Seitenpaare A_1D_1 und A_2D_2; A_1C_1 und A_2C_2; C_1D_1 und C_2D_2 in einer und derselben Geraden liegen.

Die beiden erstgenannten Paare schneiden sich beziehungsweise in **a** und **c**, es wird folglich deren Verbindungslinie **l** bereits die vorbezeichnete Gerade sein; auf der nämlichen Geraden muss nun auch der Schnitt **d** von C_1D_1 und C_2D_2 liegen, oder mit anderen Worten: das vollständige Viereck $A_2B_2C_2D_2$ liefert auf **l** denselben Punkt **d**, wie das vollständige Viereck $A_1B_1C_1D_1$. Das Gleiche wird von jedem anderen über **a**, **b**, **c** in der besprochenen Weise konstruierten Viereck gelten, so, dass man den Satz erhält:

„Sind auf einer Geraden drei Punkte gegeben, so ist jener vierte Punkt, welcher mit einem der drei gegebenen die beiden noch übrigen Punkte harmonisch trennt, bloss von der gegenseitigen Lage der drei Punkte abhängig, und kann eindeutig konstruiert werden.“

§ 99.

Zu dem gleichen Resultate gelangt man auch, wenn zu drei gegebenen durch einen Punkt **S** [Fig. 88, Taf. V] gehenden Strahlen α, β, γ ein vierter harmonischer Strahl gefunden werden soll.

Wenn wir festsetzen, dass der zu suchende Strahl δ etwa mit dem Strahle β ein konjugiertes Paar bilden soll, so kann derselbe auf nachstehende Weise konstruiert werden.

Man schneidet die Strahlen α und γ durch eine beliebige Gerade g_1 in a_1 resp. b_1, verbindet diese Schnittpunkte mit einem beliebig auf β gewählten Punkte e_1 durch die Geraden a_1e_1 und b_1e_1 welche beziehungsweise die Strahlen γ und α in c_1 und d_1 treffen, und bringt hierauf c_1d_1 mit g_1 in f_1 zum Schnitte. Der Strahl $Sf_1 = \delta$ ist sodann der gesuchte Strahl.

Betrachtet man nämlich a_1, b_1, c_1 und d_1 als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes, so sind **S**, e_1 und f_1 die drei Diagonaleckpunkte. Die Strahlen α und γ als Gegenseiten, sind sodann (nach der Definition in § 96) durch die Strahlen β und δ als Diagonalen harmonisch getrennt.

Auch diesfalls lässt sich anstandslos der Nachweis erbringen, dass der Strahl δ bloss von der gegenseitigen Lage der drei gegebenen Strahlen abhängig sei, dass also jede andere in ähnlicher Weise ausgeführte Konstruktion (wie beispielsweise jene

mit Zuhilfenahme von $\mathbf{a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2}$) stets denselben Strahl δ liefern muss.

Die Ecken der beiden Dreiecke $\mathbf{a_1 b_1 e_1}$ und $\mathbf{a_2 b_2 e_2}$ befinden sich auf den drei durch **S** gehenden Strahlen α, γ, β; es liegen daher [nach dem ersten Fundamentalsatze (§ 91)] die Schnittpunkte μ, ν und π der Seitenpaare $\mathbf{a_1 b_1}$, $\mathbf{a_2 b_2}$; $\mathbf{a_1 e_1}$, $\mathbf{a_2, e_2}$; und $\mathbf{b_1 e_1}$, $\mathbf{b_2 e_2}$ auf einer und derselben Geraden **p**. Auf dieser Geraden **p** muss sich aber auch der Schnittpunkt ρ der beiden Geraden $\mathbf{c_1 d_1}$ und $\mathbf{c_2 d_2}$ vorfinden, da der besagte Fundamentalsatz (§ 91) in gleicher Weise auf die beiden Dreiecke $\mathbf{c_1 d_1 e_1}$ und $\mathbf{c_2 d_2 e_2}$ angewendet werden kann.

Wenden wir weiter auf die beiden Dreiecke $\mathbf{a_1 c_1 f_1}$ und $\mathbf{a_2 c_2 f_2}$, da deren Seiten sich in den Punkten μ, ν, ρ einer und derselben Geraden **p** schneiden, den zweiten Fundamentalsatz (§ 92) an, so finden wir, dass die Verbindungsgerade $\delta = \mathbf{f_1 f_2}$ durch den Schnitt von $\mathbf{a_1 a_2}$ und $\mathbf{c_1 c_2}$, d. h. durch **S** gehen muss. Hieraus folgt, dass die beiden Viereckskonstruktionen einen und denselben Strahl δ liefern. Nachdem das Gleiche von jeder anderweitigen Viereckskonstruktion gilt, so folgt der Satz:

„Sind durch einen Punkt drei Strahlen gezogen, so ist jener vierte Strahl, welcher mit einem der drei Strahlen die beiden anderen harmonisch trennt, bloss von der gegenseitigen Lage der drei Strahlen abhängig, und kann eindeutig konstruiert werden.“

§ 100.

Denken wir uns die vier harmonischen Punkte **a**, **b**, **c** und **d** [Fig. 87, Taf. V] auf irgend eine Weise, beispielsweise vermittels des vollständigen Viereckes $\mathbf{A_2 B_2 C_2 D_2}$ konstruiert, und nehmen wir ausser der Geraden **l** einen beliebigen Punkt $\mathbf{A_1}$ an, so kann derselbe (wie in § 98 nachgewiesen wurde) stets als ein Eckpunkt eines vollständigen Viereckes angesehen werden, welches gleichfalls die Konstruktion der vier harmonischen Punkte **a**, **b**, **c**, **d** gestattet. Es müssen mithin die vier Strahlen, welche $\mathbf{A_1}$ mit **a**, **b**, **c**, **d** verbinden, selbst harmonische Strahlen sein.

Sind andererseits vier harmonische Strahlen α, β, γ, δ [Fig. 88, Taf. V] auf irgend eine Art, beispielsweise mittels der Viereckkonstruktion $\mathbf{a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2}$ ermittelt worden, und schneidet man diese vier Strahlen durch eine beliebige Gerade $\mathbf{g_1}$ in den Punkten $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{f_1}$, so sind diese selbst auch harmonisch, da (nach § 99) die genannte Gerade als Bestandteil eines vollständigen Viereckes betrachtet werden kann, auf welches sich die Konstruktion

der vier Strahlen α, β, γ, δ ebenfalls gründen lässt. Es gilt demnach der Satz:

„Vier harmonische Punkte werden von einem Punkte aus stets durch vier harmonische Strahlen projiziert, und vier harmonische Strahlen durch eine Gerade stets in vier harmonischen Punkten geschnitten.“

Als unmittelbare Folge des vorstehenden Satzes ergibt sich auch der folgende:

„Die Centralprojektionen von vier harmonischen Punkten sind stets wieder harmonische Punkte.“

§ 101.

Seien auf einer Geraden wieder drei Punkte **a**, **b**, **c** [Fig. 89, Taf. V] gegeben. Zu diesen Punkten können drei neue, harmonische Punkte konstruiert werden und zwar der Punkt **d**, welcher mit **b** das Paar **a**, **c** harmonisch trennt, der Punkt **e** (nicht eingezeichnet), welcher mit **a** das Paar **b**, **c** harmonisch trennt, und der Punkt **f** (in Fig. 89 nicht eingetragen), welcher mit **c** das Paar **a**, **b** harmonisch trennt.

Von den nun auf der Geraden **l** befindlichen sechs Punkten **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, kann man neuerdings je drei als die Grundlage für eine gleiche Konstruktion annehmen, und die betreffenden drei harmonischen Punkte hierzu aufsuchen. So beispielsweise den Punkt **g** konstruieren, welcher mit **a** das Paar **c**, **d** harmonisch trennt u. s. w. Werden diesbezüglich alle möglichen Kombinationen in Betracht gezogen, so ergeben sich achtundvierzig neue Punkte.

Wenn man in der angedeuteten Weise zu konstruieren fortfährt, so ist einleuchtend, dass man nach und nach die Gerade nach Belieben dicht mit Punkten bedecken kann, welche sämtlich mit den drei ursprünglich gegebenen Punkten **a**, **b**, **c** lediglich durch harmonische Konstruktionen zusammenhängen. Die so erhaltenen Punkte pflegt man die mit **a**, **b**, **c** *„rational verbundenen Punkte“* der Geraden zu nennen.

Nehmen wir ausser den drei Punkten **a**, **b**, **c** noch einen vierten Punkt **x** [Fig. 89, Taf. V] auf der Geraden **l** beliebig an, und sehen wir nach, ob wir denselben durch harmonische Konstruktionen zu erreichen vermögen.

Bestimmen wir zunächst den Punkt **d**, welcher mit **b** das Paar **a**, **c** harmonisch trennt, so finden wir dass **x** zwischen **c** und **d** liegt. Sucht man weiter einen Punkt, welcher mit einem

ausserhalb **cd** liegenden Punkte das Paar **c**, **d** harmonisch scheidet, so wird derselbe notwendig innerhalb der Strecke **cd**, also näher an **x** liegen, als **c** oder **d**. So befindet sich beispielsweise der Punkt **g**, welcher mit **a** die Strecke **cd** harmonisch trennt, näher an **x** als **d**; es erscheint demnach **x** wieder zwischen zwei Punkten **c** und **g**, die bereits näher aneinander liegen als die Punkte **c** und **d**, eingeschlossen. Nun kann wieder ein Punkt bestimmt werden, welcher näher als **c** oder **g** an **x** liegt, und zwar dadurch, dass man einen von den Punkten konstruiert, welche mit einem ausserhalb **cg** liegenden Punkte das Paar **c**, **g** harmonisch trennen.

Setzt man die Konstruktionen auf die angedeutete Weise fort, so sind zwei Fälle möglich. Entweder, man erreicht nach einer endlichen Anzahl harmonischer Konstruktionen den Punkt **x** wirklich, und dann ist derselbe eben ein mit **a**, **b**, **c** rational zusammenhängender Punkt, oder, man kann sich demselben mit rationalen Punkten von beiden Seiten unbegrenzt nähern, ihn selbst jedoch erst nach unendlich vielen harmonischen Konstruktioneu erreichen. Im letzteren Falle bezeichnen wir ihn als *„irrational“* zu **a**, **b**, **c**.

Soviel ist indessen gewiss, dass wir **x** zwischen zwei rationale Punkte, so nahe als nur immer wünschenswert, einschliessen können.

Zu gleichem Resultate gelangt man auch bezüglich dreier durch einen Punkt gehenden Strahlen.

Zu den gegebenen Strahlen kann man durch fortgesetzte harmonische Konstruktionen beliebig viele (mit ihnen rational zusammenhängende) Strahlen ermitteln, und sich so einem beliebigen vierten Strahle mit rationalen Strahlen (zu beiden Seiten desselben) nach Belieben nähern.

§ 102.

Das Dualitätsprinzip.

Die Thatsache, dass durch zwei Punkte nur eine einzige Gerade geführt werden kann, und zwei Geraden sich nur in einem einzigen Punkte schneiden können, gestattet bei allen Fragen, die sich auf die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden beziehen, eine eigentümliche Gegenüberstellung von „Punkt“ und „Gerade“, welche in dem sogenannten *„Dualitätsprinzip“* ihren Ausdruck findet.

Dieses Dualitätsprinzip sagt nämlich aus, dass man jedem aus

Punkten und Geraden bestehenden geometrischen Gebilde ein zweites gegenüberstellen kann, in welchem an Stelle aller Punkte des ersten Gebildes, Geraden; und an Stelle aller Geraden des ersten Gebildes, Punkte treten. Ist in dem ersten Gebilde die „Verbindungsgerade zweier Punkte“ Konstruktionsresultat, so ist in dem zweiten Gebilde der „Schnittpunkt zweier Geraden“ Konstruktionsresultat.

Tritt im ersten Gebilde die besondere Eigenschaft auf, dass drei Punkte in derselben Geraden liegen, so wird man im zweiten Gebilde drei durch den nämlichen Punkt gehende Geraden finden, und umgekehrt.

Einem Dreieck, d. i. dem Gebilde, welches aus drei Punkten **a**, **b**, **c** besteht, steht dual ein Dreiseit gegenüber, d. i. ein Gebilde, welches aus drei Geraden **a**, **b**, **c** zusammengesetzt ist. Den Dreieckseiten im ersten Falle, als den Verbindungsgeraden der drei Punkte **a**, **b** und **c**, entsprechen dual die Eckpunkte des Dreiseites als Schnittpunkte der drei Geraden **a**, **b** und **c**.

Vier harmonischen Punkten auf einer Geraden entsprechen dual vier harmonische Strahlen durch einen Punkt, und zwar steht hierbei der Punkt, durch welchen die vier Strahlen gehen, dual der Geraden, auf welcher die vier Punkte liegen, gegenüber.

Schon aus diesen wenigen Erörterungen ist zu entnehmen, von welch hohem Werthe dieses Dualitätsprinzip ist, da sich mittels desselben jedem Satze, welcher sich auf die Lage von Punkten und Geraden bezieht, durch die entsprechende duale Umkehrung sofort ein zweiter Satz gegenüberstellen lässt.

Hat man demnach den ersten Satz bewiesen, so ist auch schon für den zweiten dualen Satz der Beweis erbracht. Derselbe kann aber selbstverständlich auch direkt dadurch bewiesen werden, dass man alle zum Beweise des ersten Satzes führenden Konstruktionen und Betrachtungen in richtiger Weise dual umgestaltet.

Man wird diesbezüglich leicht die Dualität der beiden Fundamentalsätze (§ 91 und 92) und der ihnen beigefügten Beweise; die Dualität von vollständigem Viereck und vollständigem Vierseit; die Dualität in den Betrachtungen und Sätzen der §§ 98 und 99 u. s. w. erkennen. In gleicher Weise wird sich das Dualitätsprinzip in den folgenden Betrachtungen mit Vorteil verwenden lassen.

Zu bemerken ist hierbei, dass das eben aufgestellte Prinzip

bloss für die Ebene gilt, und dass im Raume, infolge des Hinzutretens der Ebene, ein anderes Dualitätsprinzip auftritt, welches an späterer Stelle erörtert werden wird.

§ 103.

Die Grundgebilde der Geometrie der Lage.

In der Geometrie im allgemeinen unterscheidet man drei *„Raumelemente“*, und zwar den Punkt, die Gerade und die Ebene.

Mit der Bezeichnung Elemente will man hierbei ausdrücken, dass Punkt, Gerade und Ebene als etwas Ursprüngliches, Nichtentstandenes und auch Nichtteilbares aufzufassen sind, dass also beispielsweise die Gerade, als Element betrachtet, nicht etwa erst das Resultat eines sie beschreibenden Punktes vorstellen soll. In dieser Beziehung kann man zuweilen auch den *„Raum“* selbst als geometrisches Element auffassen.

Zwei Elemente haben eine allgemeine gegenseitige Lage, wenn das eine Element nicht in dem anderen liegt, oder das eine nicht durch das andere geht (hierbei ist der Raum als Element auszuschliessen); dagegen haben zwei Elemente eine besondere gegenseitige Lage, wenn ersteres der Fall ist. Diese besondere gegenseitige Lage zweier Elemente bezeichnet man als *„Incidenz“* derselben.

Es bestehen demnach folgende Incidenzen. Punkt und Gerade sind incident, wenn der Punkt in der Geraden liegt, oder die Gerade durch den Punkt geht.

Gerade und Ebene sind incident, wenn die Gerade in der Ebene liegt, oder die Ebene durch die Gerade geht.

Ebene und Punkt sind incident, wenn die Ebene durch den Punkt geht, oder der Punkt in der Ebene liegt.

Die Gesamtheit aller Elemente gleicher Art, welche mit einem zweiten Elemente incident sind, nennt man in der „Geometrie der Lage“ ein *„Grundgebilde“* und das feste Element den *„Träger“* des Grundgebildes. Man wird demnach folgende Grundgebilde zu unterscheiden haben.

A) In der Ebene.

a) *„Die Punktreihe“*, d. i. der Inbegriff aller Punkte auf einer Geraden; die letztere ist der „Träger“ der Reihe.

b) *„Das Strahlenbüschel“*, d. i. die Gesamtheit aller durch

einen Punkt gehenden Strahlen; der Punkt ist hierbei der „Träger“. Häufig wird auch der besagte Punkt als „*Scheitel*“ oder „*Mittelpunkt*“ des Strahlenbüschels, und die Ebene des Büschels als Träger bezeichnet.

c) „*Das Punktfeld*“, d. h. der Inbegriff aller in einer Ebene liegenden Punkte; die Ebene ist der Träger.

d) „*Das Strahlenfeld*“ oder die Gesamtheit aller Strahlen einer Ebene; die letztere ist wieder der Träger.

B) Im Raume.

a) „*Das Ebenenbüschel*“ oder die Gesamtheit aller Ebenen durch eine Gerade; die letztere ist der zugehörige Träger und wird gewöhnlich die „*Axe*“ des Ebenenbüschels genannt.

b) „*Das Strahlenbündel*“ welches aus allen durch einen festen Punkt im Raume gehenden Strahlen besteht. Der genannte Punkt ist der Träger des Bündels. Derselbe wird als „*Scheitel*“ oder „*Mittelpunkt*“ des Strahlenbündels bezeichnet.

c) „*Das Ebenenbündel*“ d. i. die Gesamtheit aller durch einen Punkt gehenden Ebenen; der Punkt ist wieder Träger desselben und wird der „*Scheitel*“ oder „*Mittelpunkt*“ des Ebenenbündels genannt.

In neuerer Zeit wird auch die Incidenz zweier Geraden berücksichtigt. Dieselbe ist an die Bedingung geknüpft, dass die besagten Geraden einen Punkt gemein haben. Hiernach zählt man zu den Grundgebilden auch noch:

d) „*Den linearen Komplex*“, welcher aus allen Geraden des Raumes, die eine feste Gerade schneiden, besteht. Die feste Gerade ist der Träger und heisst die „*Axe*“ des Komplexes.

Endlich kann man auch noch den Raum in dreifacher Weise als Grundgebilde auffassen, und zwar als „*Punktraum*“, „*Strahlenraum*“ oder „*Ebenenraum*“ d. i. als Inbegriff aller in ihm liegenden Punkte, Strahlen oder Ebenen.

Wie selbst schon aus einer bloss oberflächlichen Betrachtung erkenntlich, sind die eben aufgezählten Grundgebilde bezüglich der Anzahl ihrer Elemente wesentlich von einander verschieden.

So ist die Anzahl der Punkte einer Punktreihe und die eines Punktfeldes, obwohl beide Anzahlen unendlich gross sind, doch voneinander verschieden. Diese Verschiedenheit gibt Veranlassung zur Einteilung der Grundgebilde nach Stufen.

Bezeichnen wir, als Grundlage der folgenden Betrachtungen, die unendliche Anzahl der Punkte einer Punktreihe mit **u**.

Es ist einleuchtend, dass ein Strahlenbüschel ebenfalls **u** Elemente, d. h. einfach unendlich viele Strahlen besitzen muss, da sämtliche Strahlen dieses Büschels dadurch erhalten werden können, dass man von dem Scheitel des Büschels die Strahlen nach allen **u** Punkten einer Punktreihe gezogen denkt.

Ebenso leicht ist einzusehen, dass ein Ebenenbüschel gleichfalls **u** Elemente, d. i. Ebenen besitzt; denn nimmt man auf einer die Axe des Ebenenbüschels nicht schneidenden Geraden eine Punktreihe an, so können die Ebenen des Büschels nur jene sein, welche einerseits durch die Axe des Büschels und andererseits durch die **u** Punkte der Reihe bestimmt sind.

Was hingegen die Punkte eines Punktfeldes betrifft, so ist einleuchtend, dass man sie in **u** Punktreihen zerlegen kann, deren Träger die **u** Strahlen irgend eines in der Trägerebene des Punktfeldes liegenden Strahlenbüschels sind. Hieraus folgt, dass die Anzahl der Elemente eines Punktfeldes gleich $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{u}^2$ ist.

Die Strahlen eines Strahlenfeldes lassen sich zu **u** Strahlenbüscheln gruppieren, deren Scheitel die **u** Punkte einer beliebigen in der Trägerebene des Strahlenfeldes liegenden Punktreihe sind. Die Anzahl der Strahlen eines Strahlenfeldes ist also ebenfalls $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{u}^2$.

Denkt man sich ferner alle Punkte eines Punktfeldes mit einem festen Punkte, welcher ausserhalb der Trägerebene des letzteren liegt, durch Strahlen verbunden, so werden diese ein Strahlenbündel bilden; es ist daher leicht einzusehen dass die Anzahl der Elemente in dem letzteren übereinstimmend mit jenen im Punktfelde, d. i. gleich $\mathbf{u}^2$ sein muss.

Da die sämtlichen Ebenen eines Ebenenbündels auch als jene erhalten werden können, welche den Scheitel des Bündels mit den sämtlichen Strahlen eines Strahlenfeldes verbinden, so ist offenbar auch deren Anzahl gleich $\mathbf{u}^2$.

Die Strahlen eines linearen Komplexes können in **u** Strahlenbündel gruppiert werden, deren Scheitel die sämtlichen **u** Punkte der Axe des Komplexes sind. Die Anzahl derselben ist mithin gleich $\mathbf{u}^2 \times \mathbf{u} = \mathbf{u}^3$.

Die Punkte des Punktraumes kann man in die $\mathbf{u}^2$ Punktreihen zerlegen, deren Träger die Strahlen eines beliebigen Strahlenbündels sind; ihre Zahl ist daher gleich $\mathbf{u}^2 \times \mathbf{u} = \mathbf{u}^3$.

Die Ebenen des Ebenenraumes können zu **u** Ebenenbüscheln gruppiert werden, als deren Axen die $\mathbf{u}^2$ Strahlen eines Strahlen-

feldes betrachtet werden können; die Anzahl der besagten Ebenen erscheint somit ausgesprochen durch: $\mathfrak{u}^2 \times \mathfrak{u} = \mathfrak{u}^3$.

Die Strahlen eines Strahlenraumes endlich sind durch die $\mathfrak{u}^2$ Strahlenbündel dargestellt, deren Scheitel die $\mathfrak{u}^2$ Punkte eines beliebigen Punktfeldes sind. Die Anzahl derselben ist demnach gleich $\mathfrak{u}^2 \times \mathfrak{u}^2 = \mathfrak{u}^4$.

Die *Punktreihe*, das *Strahlenbüschel* und das *Ebenenbüschel*, pflegt man, da die Anzahl ihrer Elemente gleich $\mathfrak{u}^1$ ist, *„Grundgebilde einfacher Mannigfaltigkeit“*, *„Grundgebilde erster Stufe“* oder *„einstufige Grundgebilde“* zu nennen.

Das *Punktfeld*, das *Strahlenfeld*, das *Strahlenbündel* und das *Ebenenbündel*, welche je $\mathfrak{u}^2$ Elemente besitzen, werden als *„Grundgebilde zweifacher Mannigfaltigkeit“*, *„Grundgebilde zweiter Stufe“* oder als *„zweistufige Grundgebilde“* bezeichnet.

Den *linearen Komplex*, den *Punktraum* und den *Ebenenraum*, die je $\mathfrak{u}^3$ Elemente aufweisen, pflegt man *„Grundgebilde dreifacher Mannigfaltigkeit“*, *„Grundgebilde dritter Stufe“* oder *„dreistufige Grundgebilde“* zu heissen.

Der *Strahlenraum*, welcher $\mathfrak{u}^4$ Elemente besitzt, wird ein *„Grundgebilde vierfacher Mannigfaltigkeit“*, *ein „Grundgebilde vierter Stufe“* oder ein *„vierstufiges Grundgebilde“* genannt.

Vor allem wollen wir uns mit der Geometrie der ebenen einstufigen Grundgebilde, d. i. der Punktreihe und des Strahlenbüschels beschäftigen. Gleichzeitig sei schon an dieser Stelle die Bemerkung beigefügt, dass diese beiden Gebilde einander dual gegenüberstehen.

§ 104.

Die incidente oder perspektivische Lage zweier ebenen Grundgebilde erster Stufe, und die dabei auftretenden Eigenschaften.

Die einfachste geometrische Beziehung zwischen zwei ebenen Grundgebilden erster Stufe wird erhalten, wenn man ein Strahlenbüschel $\mathfrak{S}$ (α, β, γ, δ . . . .) [Fig. 90, Taf. V] durch eine Gerade $\mathfrak{r}$ in einer Punktreihe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ . . . . schneidet, oder wenn man, was auf dasselbe hinauskömmt, sämtliche Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ . . . . einer Punktreihe $\mathfrak{r}$ von einem ausserhalb des Trägers $\mathfrak{r}$ liegenden Punkte $\mathfrak{S}$ durch Strahlen α, β, γ, δ . . . . projiziert.

Die Beziehung zwischen den Elementen der beiden genannten Grundgebilde ist in dem vorliegenden Falle die, dass jeder Punkt $\mathfrak{a}$

der Reihe auf einem gewissen Strahle α des Büschels liegt, oder umgekehrt, dass jeder Strahl α des Büschels **S** durch einen bestimmten Punkt **a** der Reihe geht.

Diese Beziehung zwischen den Elementen der beiden Grundgebilde nennt man das *„Entsprechen“* oder die *„Korrespondenz“* der Elemente.

Man wird diese Korrespondenz kurz dadurch aussprechen, dass man sagt: der Strahl α des Büschels **S** *entspricht* dem Punkte **a** der Reihe **r**. Letzteres wird also stets dann stattfinden, wenn der Strahl α mit dem Punkte **a** incident ist, d. h. sobald der Strahl α den Punkt **a** enthält.

Den hier definierten Zusammenhang einer Punktreihe und eines Strahlenbüschels pflegt man auf mehrfache Weise zu kennzeichnen. Gewöhnlich jedoch dadurch, dass man die Punktreihe und das Strahlenbüschel als in *„perspektivischer“* oder in *„incidenter Lage“* bezeichnet und dann kurz sagt: die Punktreihe sei mit oder zu dem Strahlenbüschel *„perspektivisch“* oder *„incident“* und umgekehrt.

Ist das Strahlenbüschel das ursprüngliche und die Punktreihe das abgeleitete Gebilde, so sagt man, die Punktreihe sei der *„Schnitt“* des Strahlenbüschels; im entgegengesetzten Falle pflegt man das Strahlenbüschel die *„Projektion“* oder den *„Schein“* der Punktreihe zu nennen.

Eine Punktreihe und ein zu demselben perspektivisches Strahlenbüschel besitzen folgende wesentliche Eigenschaften.

Da zwei Geraden sich nur in einem einzigen Punkte schneiden können, und umgekehrt durch zwei Punkte nur eine einzige Gerade gezogen werden kann, so ist einleuchtend, dass einem Elemente des einen Gebildes ein, aber auch nur ein einziges Element des anderen Gebildes entspricht, d. h. die Elemente der beiden Gebilde entsprechen sich *„gegenseitig eindeutig“*.

Ferner folgt aus dem ersten Satze in § 100, dass vier harmonischen Elementen des einen Gebildes stets vier harmonische Elemente des anderen Gebildes entsprechen.

Ebenso kann nach der in § 101 gegebenen Definition gefolgert werden, dass allen Elementen des einen Gebildes, welche mit drei Elementen desselben rational verbunden sind, im anderen Gebilde wieder nur solche Elemente entsprechen, die mit den, den drei Elementen entsprechenden Elementen im rationalen Zusammenhange stehen. Sind also **a**, **b**, **c** drei beliebige

Punkte der Reihe **r** und α, β, γ die ihnen entsprechenden Strahlen des perspektivischen Büschels **S**, so entspricht jedem mit **a**, **b**, **c** rational verbundenen Punkte der Reihe **r** ein mit α, β, γ rational verbundener Strahl des Büschels **S**.

§ 105.

Perspektivische Punktreihen.

Zwei in einer und derselben Ebene liegende Punktreihen $\mathbf{r}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1 \ldots .)$ und $\mathbf{r}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\mathbf{d}_2 \ldots .)$ [Fig. 91, Taf. V] heissen *„perspektivisch“* sobald die eine Reihe die Centralprojektion der anderen (von irgend einem Punkt **S** aus) ist, oder was dasselbe bedeutet, wenn beide Punktreihen Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels $\mathbf{S}(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \ldots .)$ sind.

Hierbei entsprechen sich solche Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ der beiden Reihen, von welchen der eine die Projektion des anderen aus dem Centrum **S** ist, oder was dasselbe heisst, solche Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, welche auf einem und demselben Strahle α des Büschels **S** liegen. Dass dieses „Entsprechen“ wieder ein *„gegenseitig eindeutiges“* ist, braucht wohl nicht erst besonders bewiesen zu werden.

Den Punkt **S** nennt man das *„gemeinschaftliche Projektionscentrum“* der beiden perspektivischen Reihen, und das Strahlenbüschel **S** $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \ldots .)$ das die *„Perspektivität vermittelnde Strahlenbüschel“*.

Aus dem zweiten, in § 100 angeführten Satze folgt unmittelbar, dass irgend vier harmonischen Punkten der Reihe $\mathbf{r}_1$ notwendig vier harmonische Punkte der Reihe $\mathbf{r}_2$ entsprechen müssen, und umgekehrt.

Ebenso leicht findet man auf Grund dieser Eigenschaft und der in § 101, in bezug auf die mit drei Punkten rational verbundenen Punkte, gegebenen Definition, dass, wenn $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$; $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ irgend drei Paare einander entsprechender Punkte zweier perspektivischer Punktreihen sind, jedem Punkte der Reihe $\mathbf{r}_1$, welcher mit $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$ in rationaler Verbindung steht, notwendig in der Reihe $\mathbf{r}_2$ ein Punkt entsprechen muss, welcher mit $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2$ rational verbunden ist, und umgekehrt.

Der Schnittpunkt der Träger $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ der beiden perspektivischen Reihen vereinigt in sich zwei einander entsprechende Punkte $\mathbf{s}_1$ und $\mathbf{s}_2$, da diese letzteren, sowie jedes andere Paar entsprechender Punkte, im Schnitte der Träger mit einem Strahle σ des Büschels **S** erhalten werden.

Zwei perspektivische Puntreihen sind offenbar durch die Angabe ihrer Träger $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ und des gemeinschaftlichen Projektionscentrums **S** vollständig gegeben. Dieselben sind aber auch durch die Angabe zweier Paare entsprechender Punkte, wie etwa beispielsweise durch $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ bestimmt. Denn die Geraden $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 = \mathbf{r}_1$ und $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{r}_2$ sind deren Träger, und der Schnitt **S** der Verbindungsstrahlen $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ das gemeinschaftliche Projektionscentrum.

Die Ergebnisse aller dieser Erörterungen lassen sich in dem nachstehenden Satze zusammenfassen:

„In zwei perspektivischen Punktreihen entsprechen sich die Punkte gegenseitig eindeutig.

Vier harmonischen Punkten der einen Reihe entsprechen vier harmonische Punkte der anderen Reihe.

Allen Punkten der einen Reihe, welche mit drei Punkten rational verbunden sind, entsprechen in der zweiten Reihe alle Punkte die mit den, den genannten drei Punkten entsprechenden Punkten rational verbunden sind.

Der Schnitt der beiden Träger ist ein selbstentsprechender Punkt.

Zwei perspektivische Reihen sind durch zwei Paare entsprechender Punkte vollkommen bestimmt.“

§ 106.

Perspektivische Strahlenbüschel.

Die zwei perspektivischen Punktreihen dual gegenüberstehende Beziehung ist die zweier perspektivischen Strahlenbüschel.

Zwei Strahlenbüschel $\mathbf{S}_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots)$ und $\mathbf{S}_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots)$ [Fig. 92, Taf. V] werden als *„perspektivisch“* definiert, wenn sie Projektionen einer und derselben Punktreihe **r** (**a b c d** . . .) sind.

Es entsprechen sich demnach in denselben stets solche Strahlen α_1 und α_2, welche durch den nämlichen Punkt **a** der Reihe **r** gehen. Diese Reihe heisst der *„perspektivische Durchschnitt“* der beiden perspektivischen Büschel.

Der Verbindungsstrahl $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ der beiden Scheitel $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ vereinigt zwei einander entsprechende Strahlen, die durch denselben Punkt **s** von **r** gehen. Da durch jeden Punkt der Reihe **r** nur ein Strahl eines jeden Büschels gehen kann, so ist das Entsprechen der Strahlen in den beiden perspektivischen Büscheln $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ gegenseitig eindeutig.

Irgend vier harmonische Strahlen des einen Büschels treffen die Reihe **r** in vier harmonischen Punkten, und diese werden im zweiten Büschel wieder durch vier harmonische Strahlen projiziert. (Satz § 100.) Es entsprechen mithin vier harmonischen Strahlen des einen Büschels stets vier harmonische Strahlen des zweiten Büschels.

Hieraus folgt aber nach der in § 101 aufgestellten Definition bezüglich rational verbundener Punkte und Strahlen, dass, wenn α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 drei Paare entsprechender Strahlen der beiden Büschel sind, jedem mit $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ rational verbundenem Strahle ein mit $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ rational verbundener Strahl im zweiten Büschel entsprechen muss.

Wenn von zwei perspektivischen Strahlenbüscheln zwei Paare entsprechender Strahlen α_1 α_2; β_1 β_2 als gegeben vorliegen, so kann zu jedem weiteren Strahle des einen Büschels der entsprechende Strahl des zweiten Büschels konstruiert werden. Die beiden Büschel sind somit durch diese Angabe vollständig bestimmt.

Die beiden einander entsprechenden Strahlen α_1 und α_2 schneiden sich nämlich in einem Punkte **a**, welcher notwendig dem perspektivischen Durchschnitt **r** angehört; ebenso treffen sich die Strahlen β_1 und β_2 in einem zweiten Punkte **b** von **r**, so dass man den perspektivischen Durchschnitt in der Verbindungsgeraden **ab** erhält. Mit Hilfe des letzteren können nun beliebig viele Paare entsprechender Strahlen konstruiert werden.

Die Ergebnisse dieser Betrachtungen zusammengefasst, ergibt sich der Satz:

„In zwei perspektivischen Strahlenbüscheln entsprechen sich die Strahlen gegenseitig eindeutig.

Vier harmonischen Strahlen des einen Büschels entsprechen vier harmonische Strahlen des anderen Büschels.

Allen Strahlen der einen Reihe, welche mit drei Strahlen rational verbunden sind, entsprechen in dem zweiten Büschel alle Strahlen, welche mit den, den genannten drei Strahlen entsprechenden Strahlen rational verbunden sind.

Die Verbindungsgerade der Scheitel beider Büschel ist ein selbstentsprechender Strahl.

Zwei perspektivische Strahlenbüschel sind durch zwei Paare entsprechender Strahlen vollständig bestimmt.“

Die vollkommene Dualität, welche zwischen diesem Satze und dem vorhergehenden (§ 105) herrscht, ist leicht zu erkennen.

§ 107.

Die projektivische Beziehung zwischen zwei ebenen Grundgebilden erster Stufe.

Wird aus einem Grundgebilde G_1 durch Projektion oder Schnittbildung ein zweites Grundgebilde G_2, aus diesem sodann auf gleiche Weise ein Grundgebilde G_3 und so fort abgeleitet, bis man endlich ein Grundgebilde G_n erhält, so bezeichnet man den Zusammenhang des ersten Grundgebildes G_1 und des letzten Grundgebildes G_n als *„projektivische Beziehung“* von G_1 und G_n.

Projektivische Grundgebilde sind hiernach solche, von welchen das eine aus dem anderen durch n-malige Projektion und Schnittbildung abgeleitet ist.

Dieser Definition gemäss können zwei Punktreihen, oder zwei Strahlenbüschel, oder eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel projektivisch sein.

Um auf die Sache näher eingehen zu können, wollen wir annehmen, das erste Grundgebilde G_1 sei eine Punktreihe r_1. Aus dieser Punktreihe werde durch Projektion von irgend einem Scheitel S_1 ein Strahlenbüschel S_1 abgeleitet. Dieses letztere stellt sodann das vorher mit G_2 bezeichnete Grundgebilde vor. Das Gebilde G_3 ist wieder eine Punktreihe r_2, welche als Schnitt des Strahlenbüschels S_1 mit einer beliebigen Geraden r_2 erhalten wird. Das nächste Grundgebilde G_4 ist ein Strahlenbüschel S_2, welches die Reihe r_2 aus irgend einem Punkte S_2 projiziert u. s. w. Auf gleiche Weise fortgesetzt, gelangt man endlich zu einem Grundgebilde, beispielsweise etwa zu einem Strahlenbüschel S_k.

Man hat nun folgende Kette perspektivischer Beziehungen:
$r_1, S_1, r_2, S_2, r_3, S_3 \ldots . r_k, S_k$.

Durch Vergleichung bemerken wir sofort, dass zwei unmittelbar benachbarte Grundgebilde dieser Kette stets eine Reihe und ein Büschel in incidenter Lage sind.

Ferner ersehen wir, dass jedes Grundgebilde mit seinem zweitnächsten (oder mit seinem zweitvorhergehenden) perspektivisch ist, wobei das dazwischen liegende Grundgebilde die Perspektivität vermittelt. So sind beispielsweise die beiden aufeinander folgenden Reihen r_2 und r_3 perspektivisch, da sie Schnitte des zwischen ihnen liegenden Strahlenbüschels S_2 repräsentieren.

Je zwei weiter auseinander liegende Grundgebilde der Kette, wie etwa r_1 und r_3, oder S_1 und r_k oder auch Anfangs-

gebilde und Endgebilde r_1 und S_k sind nicht mehr perspektivisch (obwohl sie es, wie wir später zeigen werden, unter bestimmten Bedingungen sein können), sondern, gemäss der aufgestellten Definition, projektivisch.

Zwei Elemente zweier projektivischen Grundgebilde werden als einander entsprechend bezeichnet, wenn das eine aus dem anderen durch successives perspektivisches Entsprechen in sämtlichen Zwischengebilden abgeleitet ist.

Ist mithin a_1 ein Punkt der Reihe r_1, α_1 der ihn projizierende Strahl des Büschels S_1, und entspricht diesem Strahle α_1 in der Reihe r_2 ein Punkt a_2, diesem in dem Büschel S_2 ein Strahl α_2, und diesem wieder in der Reihe r_3 ein Punkt a_3 u. s. w., so gelangt man endlich durch Fortsetzung dieses Entsprechens zu einem Strahle α_k in dem letzten Büschel S_k, welcher Strahl als der dem Punkte a_1 von r_1 entsprechende Strahl bezeichnet wird.

Hieraus lassen sich sofort die wesentlichen Eigenschaften zweier projektivischen Gebilde folgern.

Vor allem ist einleuchtend, dass hier ebenso wie bei perspektivischen Grundgebilden das Entsprechen der Elemente ein *„gegenseitig eindeutiges“* ist, da dieses gegenseitig eindeutige Entsprechen in allen Zwischengebilden statthat.

Nachdem ferner die Sätze in § 95 und § 100 für je zwei aufeinander folgende Zwischengebilde gelten, so haben dieselben offenbar auch für die weiter auseinander liegenden Zwischengebilde, sowie endlich auch für das Anfangs- und Endgebilde ihre volle Gültigkeit, oder mit anderen Worten: In zwei projektivischen Grundgebilden sind zwei Elementenpaare des einen, welche zwei getrennten Elementenpaaren des anderen entsprechen, ebenfalls getrennt; und irgend vier harmonischen Elementen des einen Gebildes entsprechen stets vier harmonische Elemente des anderen Gebildes.

Aus der letzteren Eigenschaft und aus der Definition in § 101 folgt weiter auch, dass einem rational verbundenen Elementensystem des einen Gebildes ein rational verbundenes Elementensystem des anderen Gebildes entsprechen muss. Es gilt sonach der Satz:

„Die Elemente zweier projektivischen Grundgebilde entsprechen sich gegenseitig eindeutig.

Zwei sich trennenden Elementenpaaren des einen Gebildes ent-

sprechen wieder zwei sich trennende Elementenpaare im anderen Gebilde.

Vier harmonischen Elementen des einen Gebildes entsprechen stets vier harmonische Elemente des anderen.

Einem rational verbundenen Elementensystem des einen Gebildes entspricht stets ein rational verbundenes Elementensystem des anderen.“

Vergleicht man diesen Satz mit den beiden in §§ 105 und 106 aufgestellten Sätzen, so findet man, dass perspektivische Grundgebilde nicht nur dieselben Eigenschaften besitzen wie die projektivischen Grundgebilde, sondern dass in ersterem Falle überdies noch eine wesentliche Eigenschaft, die des Vorhandenseins eines selbstentsprechenden Elementes, hinzutrat.

Zwei perspektivische Gebilde sind daher stets projektivisch, aber nicht auch umgekehrt zwei projektivische Gebilde perspektivisch.

Damit das Letztere eintrete, ist, wie wir zeigen werden, einerseits notwendig und andererseits hinreichend, dass die beiden projektivischen Gebilde ein selbstentsprechendes Element besitzen.

§ 108.

In den vorhergehenden Betrachtungen wurde gezeigt, dass in der Kette von Grundgebilden, welche zwei projektivische Grundgebilde verbinden, je zwei unmittelbar benachbarte Gebilde incident, und je zwei Grundgebilde, welche nur durch ein einziges Grundgebilde der Kette getrennt werden, perspektivisch sind. Zwei weiter auseinander liegende Grundgebilde der Kette sind projektivisch.

Es kann daher behauptet werden, dass zwei Grundgebilde, welche zu einem dritten perspektivisch sind, ohne jedoch direkt Schnitte oder Projektionen des letzteren zu sein, projektivisch sein müssen.

Diese Eigenschaft lässt sich leicht verallgemeinern.

Seien G_1 und G_2 zwei Grundgebilde, welche zu einem dritten Grundgebilde G_3 projektivisch sind. Dies vorausgesetzt wird G_1 mit G_3 durch eine Kette von n_1 Grundgebilden verbunden sein, von welchen jedes mit dem unmittelbar vorhergehenden und dem unmittelbar folgenden perspektivisch ist. Ebenso wird G_2 mit G_3 durch eine andere Kette von n_2 Grundgebilden im Zusammenhange stehen.

Hieraus folgt aber, dass auch G_1 und G_2 durch die Summe dieser beiden Ketten, d. h. durch eine Kette von $n_1 + n_2$ Grundgebilden verbunden sind, also *projektivische Gebilde* repräsentieren. Es besteht hiernach der Satz:

„Sind zwei Grundgebilde zu einem dritten projektivisch oder perspektivisch (ohne jedoch im letzteren Falle Schnitte oder Projektionen des dritten zu sein) so sind sie auch untereinander projektivisch.“

In gleicher Weise ergibt sich auch durch Zusammensetzung der Ketten der folgende Satz:

„Sind zwei Grundgebilde zu zwei anderen, untereinander projektivischen Grundgebilden, perspektivisch oder projektivisch, so sind dieselben auch untereinander projektivisch.“

§ 109.

Konlokale Grundgebilde und deren Doppelelemente. Identische Grundgebilde.

Es kann vorkommen, dass zwei projektivische und selbstverständlich gleichartige Grundgebilde einen und denselben Träger besitzen; in diesem Falle werden sie als *„konlokale“* Grundgebilde bezeichnet.

Dem letzt ausgesprochenen Satze gemäss wird man beispielsweise zwei konlokale Punktreihen erhalten, wenn man irgend zwei projektivische oder perspektivische Strahlenbüschel durch eine und dieselbe Gerade schneidet, und zwei konlokale Strahlenbüschel finden, wenn man irgend zwei projektivische oder perspektivische Punktreihen von einem beliebigen Scheitel aus projiziert.

Zwei konlokale Punktreihen werden auch *„koaxiale“* oder *„konjektivische“* Punktreihen, und zwei konlokale Strahlenbüschel auch *„konzentrische“* Strahlenbüschel genannt.

Es ist einleuchtend, dass im allgemeinen entsprechende Elemente zweier konlokalen Grundgebilde nicht zusammenfallen werden.

Vereinzelt können jedoch solche Elemente vorkommen, und ist man auch in der Lage durch eine passende Wahl des Trägers derartige Elemente zu erhalten.

Nehmen wir beispielsweise an, es seien S_1 und S_2 [Fig. 93, Taf. V] zwei perspektivische Strahlenbüschel; die Punktreihe r^1 repräsentiere ihren perspektivischen Schnitt.

Schneiden wir diese beiden Strahlenbüschel durch eine beliebige Gerade $\mathbf{r}$, so erhalten wir auf dieser zwei konlokale Punktreihen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$, in welchen sich solche Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ entsprechen, welche Schnitte des Trägers $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)$ mit den entsprechenden Strahlen α_1 und α_2 der Büschel $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ vorstellen. Im allgemeinen werden zwei solche Punkte wie beispielsweise $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ nicht zusammenfallen.

Betrachten wir jedoch den Schnittpunkt $\mathbf{d}$ des Trägers $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)$ mit dem perspektivischen Durchschnitt $\mathbf{r}'$. Da durch den besagten Schnittpunkt $\mathbf{d}$ zwei einander entsprechende Strahlen δ_1 und δ_2 von $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ gehen, so sind in $\mathbf{d}$ auch zwei einander entsprechende Punkte $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$ der beiden konlokalen Reihen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ vereinigt. Eine solche Vereinigung nennen wir ein *„Doppelelement“* der beiden konlokalen Grundgebilde, und zwar *„Doppelpunkte“*, wenn die letzteren Punktreihen sind, *„Doppelstrahlen“* dagegen, wenn sie Strahlenbüschel sind.

Im vorliegenden Falle können wir noch das Vorhandensein eines zweiten Doppelpunktes konstatieren. Letzterer wird als der Schnittpunkt $(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)$ von $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)$ mit dem selbstentsprechenden Strahle $(\sigma_1\sigma_2)$ der beiden Büschel $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ erhalten.

Um ein anderes Beispiel anzuführen, setzen wir voraus $\mathbf{r}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots)$ und $\mathbf{r}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots)$ [Fig. 94, Taf. V] seien zwei projektivische Reihen.

Werden diese Reihen von einem beliebigen Punkte $\mathbf{S}$ aus projiziert, so erhalten wir zwei konlokale oder konzentrische Strahlenbüschel. Wählen wir den Scheitel $\mathbf{S}$ irgendwo auf der Verbindungsgeraden zweier entsprechenden Punkte, etwa auf jener von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, so werden in derselben zwei entsprechende Strahlen α_1 und α_2 vereinigt sein. Man kann nun selbstverständlich als Scheitel $\mathbf{S}$ speziell auch den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden zweier Paare entsprechender Punkte $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ annehmen. Dies vorausgesetzt werden von $\mathbf{S}$ aus die beiden Reihen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ durch zwei konlokale Strahlenbüschel $\mathbf{S}(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $\mathbf{S}(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ projiziert, welche in den vorgenannten Verbindungsgeraden $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ zwei Doppelstrahlen (α_1, α_2) und (β_1, β_2) besitzen.

Durch diese Beispiele ist erwiesen, dass zwei konlokale Grundgebilde in der That zwei Doppelelemente besitzen können. Unsere nächste Aufgabe wird demnach darin bestehen

zu untersuchen, ob derartige Doppelelemente auch in grösserer Zahl vorkommen können.

Zu diesem Zwecke bemerken wir vor allem, dass man sich ein beliebiges Grundgebilde (ohne die Definition der Projektivität zu verletzen oder zu überschreiten) stets als in allen Elementen selbstentsprechend vorstellen kann. Denn denken wir uns aus dem Grundgebilde G_1 durch eine Kette von n Zwischengebilden ein beliebiges projektivisches Grundgebilde G_n abgeleitet, und nehmen wir von diesem letzteren ausgehend wieder die Rückbildung durch dieselben Zwischengebilde bis zum ursprünglichen Gebilde G_1 vor, so kann man dieses letztere als aus sich selbst durch eine Kette von $2n$ Zwischengliedern abgeleitet, d. h. als mit sich selbst projektivisch auffassen.

Zwei solche Grundgebilde, welche in allen Elementen selbstentsprechend sind, oder deren Elemente durchwegs Doppelelemente sind, bezeichnen wir als *„identische“* Grundgebilde.

§ 110.

Behufs Beantwortung der vorher aufgeworfenen Frage nach der Zahl der möglichen Doppelelemente zweier konlokalen Grundgebilde wollen wir das Vorhandensein dreier Doppelelemente voraussetzen, und die Folgen dieser Annahme näher untersuchen.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wählen wir zwei konlokale Punktreihen auf einem Träger r [Fig. 95, Taf. V] und nehmen an, es seien A, B, C drei Doppelpunkte derselben, das heisst, wir stellen uns vor, dass in A zwei einander entsprechende Punkte a_1 und a_2; in B zwei entsprechende Punkte b_1 und b_2 und in C zwei entsprechende Punkte c_1 und c_2 vereinigt seien.

Bestimmen wir nun zu A, B, C den vierten harmonischen Punkt D, und betrachten wir denselben als Element d_1 der einen Reihe r_1, so haben wir in a_1, b_1, c_1, d_1 vier harmonische Elemente dieser Reihe, welchen in der zweiten Reihe r_2 (nach dem in § 107 angeführten Satze) wieder vier harmonische Elemente a_2, b_2, c_2, d_2 entsprechen müssen. Da aber a_2, b_2, c_2 mit a_1, b_1, c_1 resp. mit A, B, C dieselbe Lage haben, so muss auch d_2 mit d_1 in D (gemäss den in § 98 angestellten Betrachtungen) zusammenfallen; es wird also D gleichfalls ein Doppelpunkt der Reihen r_1 u. r_2 sein.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dass auch alle weiteren aus **A**, **B**, **C** abgeleiteten harmonischen Punkte, kurz alle mit **A**, **B**, **C** rational verbundenen Punkte, Doppelpunkte der beiden Reihen sein müssen.

Ebenso leicht kann weiter auch gezeigt werden, dass überhaupt jeder Punkt auf dem Träger **r** ein Doppelpunkt der beiden Reihen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sein müsse, d. h. dass es kein Paar nicht zusammenfallender entsprechender Punkte geben könne.

Wäre thatsächlich ein solches Paar vorhanden, so müsste dieses eine solche Lage haben, dass es durch kein Paar der vorhandenen Doppelpunkte getrennt erschiene; denn wäre besagtes Paar, wie etwa $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2$, durch **A** und **B** getrennt, so würden den sich trennenden Punktepaaren $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{c}_1\mathbf{y}_1$ der Reihe $\mathbf{r}_1$ zwei sich nicht trennende Punktepaare $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{c}_2\mathbf{y}_2$ entsprechen, was (nach dem in § 107 aufgestellten Satze) unmöglich ist. Wenn also wirklich zwei sich entsprechende und nicht zusammenfallende Punkte vorhanden sein sollen, so müssen sie eine solche Lage haben, dass sie durch kein Paar von Doppelpunkten getrennt erscheinen.

Was aber diese beiden Punkte $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2$ auch immer für eine Lage haben mögen, so kann doch stets ein Doppelpunkt sowohl innerhalb ihrer Strecke, als auch ein Doppelpunkt ausserhalb ihrer Strecke bestimmt werden, da man sich sowohl einem innerhalb als auch einem ausserhalb der Strecke $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ beliebig angenommenen Punkte (nach den in § 101 stattgehabten Betrachtungen) mit Doppelpunkten (mit **ABC** rational verbundenen Punkten) nach Belieben nähern kann.

Hiernach ist die Annahme, dass zwei einander entsprechende Punkte der beiden konlokalen Reihen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ eine getrennte Lage haben, sobald drei Doppelpunkte vorhanden sind, unstatthaft; die beiden Reihen sind daher notwendig identisch.

Zu gleichem Resultate gelangt man auch bezüglich zweier konlokalen Strahlenbüschel, in welchen man drei Doppelstrahlen als vorhanden annimmt. Hiervon kann man sich sofort die Überzeugung verschaffen, wenn man die vorstehende Betrachtung auf jene von konlokalen Reihen anwendet, in welchen die besagten Büschel von einer beliebigen Geraden geschnitten werden. Es folgt mithin der Satz:

„Zwei konlokale Grundgebilde können nicht mehr als zwei Doppelelemente besitzen; haben sie mehr als zwei Doppelelemente, so sind dieselben notwendig identisch.“

§ 111.

In den §§ 105 und 106 wurde nachgewiesen, dass zwei perspektivische Punktreihen oder Strahlenbüschel durch zwei Paare beliebig angenommener und als einander entsprechend vorausgesetzter Elemente vollständig und eindeutig bestimmt sind.

Beachtet man jedoch, dass der Schnittpunkt der Träger zweier perspektivischen Reihen, resp. der Verbindungsstrahl der Scheitel zweier perspektivischen Strahlenbüschel schon an und für sich ein drittes Paar entsprechender Elemente repräsentiert, so wird man sofort auf den Gedanken kommen, dass zwei projektivische Grundgebilde ebenfalls durch drei Paare entsprechender Elemente vollständig bestimmt sind. Dass dies in der That der Fall ist, kann folgendermassen gezeigt werden.

Nehmen wir an, es seien zwei projektivische Grundgebilde G_1 und G_2 vermittels irgend einer Kette von n Zwischengebilden erhalten worden, und a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 würden irgend drei Paare entsprechender Elemente derselben vorstellen; irgend einem weiter angenommenen vierten Elemente d_1 von G_1 möge das Element d_2 von G_2 entsprechen.

Setzen wir voraus, es wäre, ausser mit Hilfe der vorgenannten n Zwischengebilde, noch auf andere Weise, d. i. mit Zuhilfenahme anderer Zwischengebilde möglich, eine derartige projektivische Beziehung zwischen den Gebilden G_1 und G_2 herzustellen, dass wieder den drei Elementen a_1, b_1, c_1 die drei Elemente a_2, b_2, c_2 entsprechen.

Dies vorausgesetzt müsste notwendig jedem weiteren Elemente d_1 von G_1 dasselbe Element d_2 von G_2 entsprechen, welches dem Elemente d_1 bei der ersten projektivischen Beziehung entsprach; denn würde der Fall eintreten, dass in den beiden projektivischen Beziehungen wohl den drei Elementen a_1, b_1, c_1 die drei Elemente a_2, b_2, c_2 entsprechen, jedem anderen Elemente d_1 von G_1 jedoch, infolge der ersten projektivischen Beziehung ein Element d_2, infolge der zweiten projektivischen Beziehung dagegen ein von d_2 verschiedenes Element d'_2 entspräche, so hätte man zwei zu $G_1(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \ldots)$ projektivische, also auch untereinander projektivische Gebilde $G_2(a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 \ldots)$ und $G'_2(a_2 b_2 c_2 d'_2 e'_2 \ldots.)$ mit demselben Träger. (Siehe § 108, ersten Satz.)

Nachdem jedoch diese beiden Gebilde drei Doppelelemente a_2, b_2, c_2 besitzen, so müssen sie (Satz in § 110) notwendig iden-

tisch sein, oder mit anderen Worten, es muss d_2 mit d'_2, e_2 mit mit e'_2 .... zusammenfallen.

Hieraus ist zu ersehen, dass, wenn von zwei projektivischen Grundgebilden drei Paare entsprechender Elemente als bekannt vorliegen oder von vornherein gegeben sind, jedem weiteren Elemente des einen Gebildes ein ganz bestimmtes Element des zweiten Grundgebildes, und umgekehrt, entsprechen muss.

Selbstverständlich ist dieses Ergebnis unabhängig und unbeeinflusst von dem Wege, der eingeschlagen wurde, um die Projektivität der beiden Grundgebilde so herzustellen, dass jene drei Elementenpaare sich wirklich entsprechen. Es besteht demnach der Satz:

„Zwei projektivische Grundgebilde sind durch die Angabe dreier Paare entsprechender Elemente vollständig und eindeutig projektivisch aufeinander bezogen.“

§ 112.

Setzen wir voraus, in zwei projektivischen Gebilden gleicher Art (zwei Punktreihen oder zwei Strahlenbüscheln) würde das Element, welches den beiden Trägern gemeinschaftlich ist, sich selbst entsprechen, so ist leicht zu zeigen, dass diese Gebilde nicht nur projektivisch, sondern speziell perspektivisch sind.

Denken wir uns, um die Betrachtung zu fixieren, etwa zwei projektivische Punktreihen r_1 und r_2 [Fig. 96, Taf. V] und setzen wir allenfalls voraus, dass sich im Schnitte der Träger r_1 und r_2 zwei entsprechende Punkte a_1 und a_2 vereinigt vorfinden. Ferner seien b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 irgend welche andere Paare entsprechender Punkte der beiden Reihen r_1 und r_2.

Bringen wir die beiden Verbindungsgeraden $b_1 b_2$ und $c_1 c_2$ in S zum Schnitte, so vermittelt S auf r_1 und r_2 eine perspektivische Beziehung, in welcher ebenfalls a_1 und a_2; b_1 und b_2; c_1 und c_2 als entsprechende Punkte auftreten.

Würde nun vermittels dieser perspektivischen Beziehung irgend einem Punkte d_1 von r_1 ein anderer Punkt d'_2 auf r_2 entsprechen, als der durch die projektivische Beziehung gegebene Punkt d_2, so hätte man auf r_2 zwei Reihen $r_2(a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 \ldots)$ und $r'_2(a_2 b_2 c_2 d'_2 e'_2 \ldots)$ wovon die erste mit der Reihe $r_1(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \ldots)$. projektivisch, die andere aber mit der letzteren perspektivisch wäre. Diese beiden Reihen auf r_2 wären mithin konlokal, und da sie überdies drei Doppelpunkte a_2, b_2, c_2 be-

sitzen, so müssen sie (nach § 108) notwendig auch identisch sein, d. h. es muss $\mathbf{d}'_2$ mit $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{e}'_2$ mit $\mathbf{e}_2$ u. s. w. zusammenfallen.

Die projektivische Beziehung der beiden Reihen $\mathbf{r}_1 (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_1 \ldots)$ und $\mathbf{r}_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_2 \ldots)$ ist also in der That gleichzeitig eine perspektivische.

Zum gleichen Resultat führen analoge (duale) Betrachtungen über zwei projektivische Strahlenbüschel, deren Scheitelverbindungsgerade zwei sich entsprechende Strahlen vereinigt. Mithin besteht der Satz:

„Vereinigt der Schnittpunkt der Träger zweier projektivischen Punktreihen zwei entsprechende Punkte derselben, resp. der Verbindungsstrahl der Scheitel zweier projektivischen Strahlenbüschel zwei entsprechende Strahlen der letzteren, so sind diese Punktreihen oder beziehungsweise diese Strahlenbüschel insbesondere perspektivisch.“

§ 113.

Vervollständigung zweier durch drei Paare entsprechender Elemente gegebener projektivischer Grundgebilde.

Da, wie in § 111 gezeigt wurde, die projektivische Beziehung zweier Grundgebilde durch die Angabe dreier Paare entsprechender Elemente eindeutig bestimmt ist, welches auch der Weg sein mag, welcher die projektivische Beziehung herstellt, so wird man, um diese Gebilde nach Belieben und Bedarf zu vervollständigen, d. h. zu beliebig angenommenen Elementen des einen die entsprechenden Elemente im zweiten zu finden, dahin trachten, die Beziehung konstruktiv möglichst einfach zu gestalten und sich daher auf die geringste Anzahl von Zwischengebilden beschränken. Diesbezüglich sind die nachstehenden Methoden hervorzuheben.

a) Zwei projektivische Reihen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$, gegeben durch drei Paare entsprechender Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ [Fig. 97, Taf. V] sind zu vervollständigen.

Man verbindet irgend ein Paar entsprechender Punkte, etwa $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, und wählt auf der Verbindungsgeraden $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ zwei beliebige Punkte $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$. Aus diesen Punkten projiziert man die beiden Reihen $\mathbf{r}_1 (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_1 \ldots)$ und $\mathbf{r}_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_2 \ldots)$ durch die beiden Strahlenbüschel $\mathbf{S}_1 (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_1 \ldots)$ und $\mathbf{S}_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_2 \ldots)$, welche (nach dem zweiten Satze in § 108) projektivisch sind.

Da aber überdies die Verbindungsgerade der beiden Scheitel S_1 und $\mathbf{S}_2$ zwei entsprechende Strahlen $\mathbf{S}_1 \mathbf{a}_1$ und $\mathbf{S}_2 \mathbf{a}_2$ vereinigt,

so sind diese Büschel (Satz in § 112) auch insbesondere perspektivisch.

Den perspektivischen Durchschnitt der beiden Büschel erhält man auf jener Geraden **R**, welche die Schnittpunkte **b** und **c** der noch übrigen entsprechenden Strahlenpaare $S_1 b_1$, $S_2 b_2$ und $S_1 c_1$, $S_2 c_2$ verbindet.

Die projektivische Beziehung der beiden Reihen r_1 und r_2 ist nun durch die Kette:

$$r_1, S_1, R, S_2, r_2$$

hergestellt.

Zu irgend einem beliebigen Punkte d_1 der Reihe r_1 findet man den entsprechenden Punkt d_2 von r_2, indem man zuerst d_1 von S_1 aus nach **d** auf **R**, und sodann **d** von S_2 aus auf r_2 nach d_2 projiziert.

Auf gleichem Wege kann man leicht auch die Punkte finden, welche dem Schnitt der Träger r_1 und r_2 entsprechen. Bezeichnet man nämlich diesen Punkt als Element der Reihe r_2 mit s_2, so hat man s_2 von S_2 auf **R** nach **s** und hierauf **s** von S_1 aus auf r_1 in den entsprechenden Punkt s_1 zu projizieren. Betrachtet man jedoch den Schnitt beider Träger als Element t_1 der Reihe r_1, so hat man, um auf r_2 das entsprechende Element t_2 zu finden, zuerst t_1 von S_1 aus auf **R** nach **t**, und sodann **t** von S_2 aus auf r_2 nach t_2 zu projizieren.

§ 114.

b) Zwei projektivische Strahlenbüschel S_1 und S_2, gegeben durch drei Paare entsprechender Strahlen α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 [Fig. 98, Taf. V] sind zu vervollständigen.

Die diesbezüglich zum Ziele führende Konstruktion ist der vorhergehenden genau dual entgegengesetzt.

Wir schneiden die beiden Büschel $S_1 (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots)$ und $S_2 (\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots)$ durch zwei Geraden r_1 und r_2, welche durch den Schnittpunkt irgend zweier entsprechender Strahlen, beispielsweise durch den Schnitt **a** von $S_1 \alpha_1$ und $S_2 \alpha_2$ gehen, in den beiden (§ 108, Satz 2) projektivischen Reihen $r_1 (a_1 b_1 c_1 \ldots .)$ und $r_2 (a_2 b_2 c_2 \ldots .)$. Da jedoch infolge der hier getroffenen Wahl der Schnittpunkt **a** der beiden Träger r_1 und r_2 zwei einander entsprechende Punkte a_1 und a_2 dieser Reihen r_1 und r_2 vereinigt, so sind die letzteren (nach dem in § 112 angeführten Satze) insbesondere perspektivisch. Das vermittelnde Strahlenbüschel

hat seinen Scheitel **S** im Schnitte der beiden Verbindungsstrahlen $\mathbf{b_1 b_2}$ und $\mathbf{c_1 c_2}$.

Hierdurch ist die projektivische Beziehung der beiden Strahlenbüschel $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ vermittels der Kette

$$\mathbf{S_1, r_1, S, r_2, S_2}$$

hergestellt.

Um nun zu einem beliebigen Strahle δ_1 des Büschels $\mathbf{S_1}$ den entsprechenden Strahl δ_2 von $\mathbf{S_2}$ zu finden, wird man den Schnittpunkt $\mathbf{d_1}$ des Strahles δ_1 mit dem Hilfsträger $\mathbf{r_1}$ von **S** aus auf $\mathbf{r_2}$ nach $\mathbf{d_2}$ projizieren, und durch $\mathbf{d_2}$ den gesuchten Strahl δ_2 des Büschels $\mathbf{S_2}$ führen.

Auf gleichem Wege können auch jene beiden Strahlen σ_1 und τ_2 der Büschel $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ konstruiert werden, welche den in der Scheitelverbindungsgeraden $\mathbf{S_1 S_2}$ liegenden Strahlen σ_2 und τ_1 der Büschel $\mathbf{S_2}$ resp. $\mathbf{S_1}$ entsprechen.

§ 115.

c) Eine Punktreihe **r** und ein zu derselben projektivisches Strahlenbüschel **S**, durch drei Paare entsprechender Elemente **a**, α; **b**, β; **c**, γ gegeben, sind zu vervollständigen.

Dieser Fall kann auf einen oder den andern der beiden vorhergehenden Fälle dadurch zurückgeführt werden, dass man entweder die Reihe **r** durch ein Hilfsbüschel **s** projiziert, oder das gegebene Büschel **S** durch eine Hilfsreihe schneidet, so dass man in jedem der beiden Fälle wieder bloss zwei gleichartige Grundgebilde zu vervollständigen hat.

§ 116.

Das paarweise Auftreten von Doppelelementen konlokaler Grundgebilde.

Setzen wir voraus, zwei konlokale Punktreihen $\mathbf{r_1}$ und $\mathbf{r_2}$ auf dem Träger $(\mathbf{r_1 r_2})$ [Fig. 99, Taf. V] hätten einen Doppelpunkt $\mathbf{s_1 s_2}$, so kann leicht nachgewiesen werden, dass diese beiden Reihen $\mathbf{r_1}$ und $\mathbf{r_2}$ unter der gemachten Voraussetzung noch einen zweiten Doppelpunkt haben müssen.

Seien $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$; $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ irgend zwei Paare entsprechender Punkte von $\mathbf{r_1}$ und $\mathbf{r_2}$, und projizieren wir die Reihe $\mathbf{r_2}$ $(\mathbf{a_2 b_2 s_2} \ldots)$ von einem beliebigen Punkte $\mathbf{S'}$ aus auf einen willkürlich durch den Doppelpunkt $\mathbf{s_1 s_2}$ gezogenen Träger $\mathbf{r'_2}$.

Hierdurch wird eine zur Reihe $\mathbf{r_2}$ $(\mathbf{a_2 b_2 s_2} \ldots)$ perspek-

tivische und folglich zur Reihe $r_1(a_1 b_1 s_1 \ldots)$ projektivische Reihe $r'_2(a'_2 b'_2 s'_2 \ldots .)$ erhalten. Nachdem jedoch im Schnitte der Träger r_1 und r'_2 dieser beiden letztgenannten Reihen zwei entsprechende Punkte s_1 und s'_2 vereinigt sind, so müssen dieselben (mit Zugrundelegung des in § 112 angeführten Satzes) überdies perspektivisch sein. Das vermittelnde Projektionscentrum S erhält man sodann im Schnitte der Verbindungsstrahlen $a_1 a'_2$ und $b_1 b'_2$.

Zieht man nun den Strahl SS', so kann derselbe das eine Mal als Strahl des Büschels S aufgefasst werden, in welcher Eigenschaft er auf r_1 und r'_2 zwei entsprechende Punkte t_1 und t'_2 bestimmt; das andere Mal hingegen als Strahl des Büschels S' betrachtet werden, in welcher Eigenschaft er zwei entsprechende Punkte t_2 und t'_2 der Reihen r_2 und r'_2 bestimmt. Man sieht, dass hierbei t_2 mit t_1 zusammenfällt, dass also die Vereinigung $t_1 t_2$ einen zweiten Doppelpunkt der konlokalen Reihen r_1 und r_2 repräsentiert.

Ebenso werden zwei konzentrische Strahlenbüschel, die einen Doppelstrahl besitzen, notwendig noch einen zweiten Doppelstrahl besitzen müssen. Denn, schneidet man diese Büschel durch eine beliebige Gerade, so erhält man auf dieser letzteren zwei konlokale Reihen, welche (im Schnitte mit dem vorausgesetzten Doppelstrahle) einen Doppelpunkt haben.

Diesen Reihen entspricht aber, wie soeben gezeigt wurde, noch ein zweiter Doppelpunkt, und durch diesen letzteren muss der zweite Doppelstrahl der genannten Büschel gehen. Mithin besteht der Satz:

„Besitzen zwei konlokale Grundgebilde ein Doppelelement, so haben sie notwendig noch ein zweites Doppelelement.“

§ 117.

Projektivität von Würfen.

In § 111 wurde nachgewiesen, dass zwei projektivische Grundgebilde durch drei Paare entsprechender Elemente vollständig bestimmt seien, oder mit anderen Worten, dass, um zwei Grundgebilde projektivisch aufeinander beziehen zu können, drei Paare entsprechender Elemente (jedoch nicht mehr als drei) willkürlich angenommen werden dürfen.

Zeigt sich nun bei irgend einer geometrischen Betrachtung, dass gewissen vier Elementen eines Grundgebildes vier gewisse

Elemente eines zweiten Grundgebildes projektivisch entsprechen, so muss dieses Verhalten resp. dieses Ergebnis offenbar irgend eine geometrische Eigenschaft zum Ausdrucke bringen.

In der That reduzieren sich sehr viele Betrachtungen der Geometrie der Lage auf den Nachweis, dass eine solche Projektivität zweier vierelementiger Gruppen wirklich vorhanden sei.

In all diesen Fällen pflegt man sich mit Vorteil einer symbolischen Schreibweise derart zu bedienen, dass man die vier Elemente in beliebiger Reihenfolge in eine Klammer schliesst, die vier ihnen entsprechenden Elemente in der nämlichen Reihenfolge in eine zweite Klammer setzt, und beide Klammern beziehungsweise durch das Zeichen π oder $\pi\pi$ verbindet, je nachdem die Beziehung der beiden Elementengruppen projektivisch oder perspektivisch ist.

Entsprechen also beispielsweise vier Elementen $\mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{c}_1\,\mathbf{d}_1$, vier Elemente $\mathbf{a}_2\,\mathbf{b}_2\,\mathbf{c}_2\,\mathbf{d}_2$ projektivisch, so kann dies durch:

$$(\mathbf{c}_1\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{d}_1\,\mathbf{a}_1)\ \pi\ (\mathbf{c}_2\,\mathbf{b}_2\,\mathbf{d}_2\,\mathbf{a}_2)$$

ausgedrückt werden.

Werden vier Elemente irgend eines Grundgebildes in einer bestimmten Aufeinanderfolge aufgefasst, so bezeichnet man sie als einen *„Wurf“*. Hiernach sind $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1)$ und $(\mathbf{a}_1\mathbf{c}_1\mathbf{b}_1\mathbf{d}_1)$ zwei voneinander verschiedene Würfe.

In Folgendem wollen wir ein Beispiel für die projektivische Beziehung zweier Würfe aufstellen.

Seien **a**, **b**, **c**, **d** [Fig. 100, Taf. V] vier beliebige Punkte einer Geraden **r**. Leiten wir aus dem Wurfe (**abcd**) einen zweiten Wurf dadurch ab, dass wir zuerst zwei Elemente, sodann aber auch die beiden noch übrigen Elemente miteinander vertauschen, und bezeichnen wir diesen zweiten Wurf mit $(\mathbf{a'\,b'\,c'\,d'})$, so muss $\mathbf{a'}$ mit **b** und $\mathbf{b'}$ mit **a**, und ebenso auch $\mathbf{c'}$ mit **d** und $\mathbf{d'}$ mit **c** zusammenfallen.

Es lässt sich nun unschwer zeigen, dass die beiden Würfe (**a b c d**) und $(\mathbf{a'\,b'\,c'\,d'})$ projektivisch sind.

Projiziert man nämlich die vier Punkte **a**, **b**, **c**, **d** von einem beliebigen Punkte $\mathbf{S}_1$ aus auf eine durch **a** geführte Gerade $\mathbf{r}_1$ nach $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$ so ist:

$$(\mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{c}_1\,\mathbf{d}_1)\ \pi\pi\ (\mathbf{a\,b\,c\,d})$$

und es fallen überdies **a** und $\mathbf{a}_1$ zusammen.

Betrachten wir den nach dem Punkte **b** führenden Projektionsstrahl $\mathbf{S_1 b}$ als einen neuen Träger $\mathbf{r_2}$, und projizieren von jenem Scheitel $\mathbf{S_2}$, welcher mit **d** zusammenfällt, die vier Punkte $\mathbf{a_1, b_1, c_1, d_1}$ auf $\mathbf{r_2}$ nach $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{d_2}$, so wird der besonderen Annahme zufolge nun $\mathbf{a_2}$ mit **b** und $\mathbf{b_1}$ mit $\mathbf{b_2}$ zusammenfallen und wird überdies:

$$(\mathbf{a_2 b_2 c_2 d_2}) \; \pi\pi \; (\mathbf{a_1 b_1 c_1 d_1})$$

sein. Nimmt man endlich den Punkt $\mathbf{c_1}$ von $\mathbf{r_1}$ als drittes Projektionscentrum $\mathbf{S_3}$ an, und projiziert $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{d_2}$ auf die Gerade **r** nach **a'**, **b'**, **c'**, **d'** zurück, so wird man finden, dass **a'** auf **b**, **b'** auf **a**, **c'** auf **d** und **d'** auf **c** fällt, und dass überdies:

$$(\mathbf{a' b' c' d'}) \; \pi\pi \; (\mathbf{a_2 b_2 c_2 d_2})$$

sei. Die vorgenommenen Projektionen ergeben sonach schliesslich das Resultat, dass:

$$(\mathbf{a' b' c' d'}) \; \pi \; (\mathbf{a b c d})$$

ist.

Die gleiche Eigenschaft besitzt auch ein Strahlenwurf, wie man einerseits nach dem Prinzip der Dualität, oder andererseits dadurch, dass man den besagten Strahlenwurf mittels einer Geraden in einem Punktwurf schneidet, leicht erkennt. Es gilt sonach der Satz:

„Vertauscht man in einem beliebigen Wurfe zwei Elemente und dann die beiden übrigen, so erhält man einen neuen Wurf, welcher mit dem früheren projektivisch ist.“

§ 118.

Ebenso leicht lässt sich folgender Satz nachweisen:

„Vertauscht man in einem Wurfe zwei Elemente, während die übrigen ungeändert bleiben, und ist der neue Wurf mit dem früheren projektivisch, so müssen beide Würfe notwendig harmonisch sein.“

Sei (**a b c d**) [Fig. 101, Taf. VI] der ursprüngliche Wurf. Bilden wir den neuen Wurf (**a' b' c' d'**) in der Weise, dass wir **a'** mit **a** und **b'** mit **b** zusammenfallen lassen, hingegen **c'** auf **d**, und **d'** auf **c** legen.

Die beiden Würfe (**a b c d**) und (**a' b' c' d'**) können nur dann projektivisch sein, wenn sie harmonisch sind. Denn projiziert man (**a b c d**) von irgend einem Punkte $\mathbf{S_1}$ auf eine beliebige durch **a** gezogene Gerade $\mathbf{r_1}$ nach $(\mathbf{a_1 b_1 c_1 d_1})$ so ist:

$$(\mathbf{a_1 b_1 c_1 d_1}) \; \pi\pi \; (\mathbf{a b c d}).$$

Soll nun (**a' b' c' d'**) π (**a b c d**) sein, so muss nicht nur

$(a_1 b_1 c_1 d_1) \pi (a' b' c' d')$, sondern überdies auch, da im Schnitte der Träger r und r_1 zwei entsprechende Punkte a_1 und a' vereinigt sind, perspektivisch sein. In diesem Falle müssen sich aber die drei Geraden $b_1 b'$, $c_1 c'$ und $d_1 d'$ in einem und demselben Punkte S' (dem vermittelnden Projektionscentrum) schneiden, was schliesslich auf die aus früherem bekannte Viereckskonstruktion führt.

Die gleiche Eigenschaft gilt auch von einem harmonischen Strahlenwurf.

§ 119.

Konlokale involutorische Gebilde.

Es kann vorkommen, dass in zwei konlokalen Grundgebilden zwei entsprechende Elemente auch dann entsprechend bleiben, wenn man ihre Lage tauscht; denn nachdem diese Grundgebilde durch drei Paare beliebig gewählter entsprechender Elemente a_1, a_2; b_1, b_2 und c_1, c_2 bestimmt werden können, so hindert nichts, die Wahl so zu treffen, dass beispielsweise a_2 mit b_1 und b_2 mit a_1 zusammenfällt.

Nehmen wir nun an, man hätte in zwei konlokalen Grundgebilden wirklich ein solches Paar entsprechender Elemente a_1, a_2, die nach Vertauschung wieder zwei entsprechende Elemente b_1, b_2 ergeben, gefunden, und es wäre ferner x_1, x_2 irgend ein ganz beliebiges anderes Paar entsprechender Elemente der Gebilde G_1 und G_2.

Durch die drei Paare entsprechender Elemente a_1, a_2; b_1, b_2 und x_1, x_2 ist die projektivische Beziehung der beiden Gebilde G_1 und G_2 vollständig bestimmt. Findet man demnach zwei weitere Elemente y_1 und y_2 von der Beschaffenheit, dass die Würfe

$$(a_1 b_1 x_1 y_1) \text{ und } (a_2 b_2 x_2 y_2)$$

projektivisch sind, so werden y_1 und y_2 notwendig zwei sich entsprechende Elemente von G_1 und G_2 sein müssen.

Zwei derartige Elemente erhält man aber, wenn man y_1 mit x_2 und y_2 mit x_1 zusammenfallen lässt; denn nachdem a_2 und b_2 zwei Elemente sind, welche beziehungsweise durch den Lagenwechsel von b_1 und a_1 erhalten wurden, x_2 und y_2 aber zwei Elemente, die durch den bezüglichen Lagenwechsel von y_1 und x_1 erhalten werden, so sind (nach dem in § 117 aufgestellten Satze) die Würfe:

$$(a_2 b_2 x_2 y_2) \text{ und } (b_1 a_1 y_1 x_1)$$

projektivisch. Nach demselben Satze gilt aber das Gleiche auch betreffs der Würfe:

$$(a_1 b_1 x_1 y_1) \text{ und } (b_1 a_1 y_1 x_1),$$

woraus weiter die Projektivität der Würfe:

$$(a_1 b_1 x_1 y_1) \text{ und } (a_2 b_2 x_2 y_2)$$

folgt, welcher wir, wie oben bemerkt, unmittelbar entnehmen, dass y_1 und y_2 ebenfalls entsprechende Elemente von G_1 und G_2 sind.

Hiermit ist aber gleichzeitig auch bewiesen, dass, sobald in zwei konlokalen Grundgebilden G_1 und G_2 ein Paar entsprechender Elemente durch Platzwechsel wieder in ein Paar entsprechender Elemente übergeht, dieselbe Eigenschaft auch einem beliebigen anderen Paare entsprechender Elemente zukomme, und dass mithin die nämliche Eigenschaft alle Paare entsprechender Elemente besitzen.

In diesem Falle nennt man die Vereinigung der beiden Gebilde G_1 und G_2 eine *„Involution“* oder ein *„involutorisches Grundgebilde“* und jedes Paar entsprechender Elemente ein Paar *„konjugierter Elemente“*.

Sind die Gebilde G_1 und G_2 Punktreihen, so pflegt man ihre Vereinigung auch als *„involutorische Punktreihe“;* sind es Strahlenbüschel, so als *„involutorisches Strahlenbüschel“* zu bezeichnen, wobei aber nie zu vergessen ist, dass man es nicht mit bloss einer Punktreihe oder einem Strahlenbüschel, sondern stets mit zwei konlokalen Punktreihen oder Strahlenbüscheln von besonderer gegenseitiger Lage zu thun hat.

§ 120.

Höchst wichtig ist die Beziehung, in welcher die konjugierten Elemente einer Involution zu den eventuell vorhandenen zwei Doppelelementen der beiden konlokalen, zur Involution vereinigten Gebilde G_1 und G_2 stehen.

Bezeichnen wir irgend ein Paar konjugierter Elemente mit x_1 und x_2, und die sich selbst entsprechenden Doppelelemente mit s und t, so ist nach der Definition einer Involution:

$$G_1(stx_1x_2) \;\pi\; G_2(stx_2x_1).$$

In diesem Falle tritt aber der in § 118 aufgestellte Satz in Kraft, d. h. die konjugierten Elemente x_1 und x_2 sind durch die Doppelelemente s und t harmonisch getrennt.

Die Doppelelemente der beiden konlokalen zur Involution vereinigten Grundgebilde pflegt man auch die *„Doppelelemente der*

Involution“ zu nennen. Jedes derselben repräsentiert gleichzeitig ein Paar zusammenfallender konjugierter Elemente der Involution. Es besteht demnach der Satz:

„*Alle Paare konjugierter Elemente einer Involution sind durch die eventuell vorhandenen Doppelelemente harmonisch getrennt.*“

Und umgekehrt:

„*Alle Strahlenpaare, welche ein festes Strahlenpaar harmonisch trennen, sind konjugierte Strahlen eines involutorischen Büschels, dem die beiden festen Strahlen als Doppelstrahlen angehören.*“

Und:

„*Alle Punktepaare einer Geraden, welche zwei feste Punkte harmonisch trennen, sind konjugierte Punkte einer involutorischen Punktreihe, welche die festen Punkte zu Doppelpunkten hat.*“

§ 121.

Wenn von einer Involution $(\mathbf{G_1 G_2})$ zwei Paare konjugierter Elemente, beispielsweise $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$; $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ vorliegen, so ist dieselbe dadurch vollständig bestimmt, indem $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$; $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ diesfalls gleichzeitig entsprechende Elemente der beiden projektivischen zur Involution vereinigten Grundgebilde $\mathbf{G_1}$ und $\mathbf{G_2}$ sind und ein drittes Paar entsprechender Elemente $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ der letzteren (auf Grund der Definition einer Involution) sofort durch den Platzwechsel von $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_2}$ erhalten wird.

Es sind sonach die beiden Paare konjugierter Elemente $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$; $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ der Involution mit drei Paaren entsprechender Elemente von $\mathbf{G_1}$ und $\mathbf{G_2}$ gleichwertig, was zur vollkomenen Bestimmung der Involution hinreichend ist.

Indem ein Doppelelement einer Involution zwei zusammenfallende konjugierte Elemente repräsentiert, so ist die Involution auch durch ihre beiden Doppelelemente bestimmt. Mithin gilt der Satz:

„*Ein involutorisches Grundgebilde ist durch Angabe zweier Paare konjugierter Elemente, oder durch Angabe der beiden Doppelelemente vollständig bestimmt.*“

§ 122.

Aus dem vorstehenden Satze folgt unmittelbar, dass drei Paare konjugierter Elemente einer Involution nicht beliebig angenommen werden können, sondern dass dieselben dort, wo sie

auftreten, das Resultat einer geometrischen Beziehung oder Konstruktion sein müssen.

Als Beispiel für diese Behauptung kann der Beweis gelten, dass die drei Gegenseitenpaare **AB**, **CD**; **AC**, **BD**; **BC**, **AD** [Fig. 102, Taf. VI] eines beliebigen vollständigen Viereckes (**ABCD**) eine beliebige Gerade **r** in drei Paaren konjugierter Punkte $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$; $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ einer Involution schneiden.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke noch den Schnitt von **AB** und **CD** mit **E**, so ist durch Projektion aus **C**:

$$(\mathbf{EABa}_2) \;\pi\pi\; (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{a}_2)$$

und durch Projektion aus **D**:

$$(\mathbf{EABa}_2) \;\pi\pi\; (\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2),$$

mithin:

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{a}_2) \;\pi\; (\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2).$$

Nach dem in § 117 angeführten Satze ist aber auch:

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2) \;\pi\; (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\mathbf{a}_1),$$

woraus folgt, dass:

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{a}_2) \;\pi\; (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\mathbf{a}_1).$$

Betrachtet man also $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$; $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ als entsprechende Elemente zweier Reihen, so entsprechen sich in denselben die Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ auch nach erfolgtem Platzwechsel, d. h. diese beiden Reihen sind wirklich zu einer Involution vereinigt. Es gilt sonach der Satz:

„Die drei Gegenseitenpaare eines vollständigen Viereckes schneiden eine beliebige Gerade stets in drei Paaren konjugierter Punkte einer Involution.“

Der dem angeführten Satze dual gegenüberstehende Satz, dessen Beweis ebenso einfach geliefert werden kann, lautet:

„Die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseites werden von jedem beliebigen Punkte aus durch drei Paare konjugierter Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels projiziert.“

V. Kapitel.

Die Kurven zweiten Grades als projektivische Erzeugnisse.

§ 123.

Das geometrische Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel.

Seien $\mathbf{S}_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $\mathbf{S}_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ [Fig. 103, Taf. VI] irgend zwei projektivische Strahlenbüschel. Da beide Strahlenbüschel unendlich viele Paare entsprechender Strahlen, α_1, α_2; β_1, β_2; $\gamma_1, \gamma_2\ldots$ besitzen, und ausserdem diese Strahlenpaare eine stetige Folge bilden, so wird der geometrische Ort der Durchschnittspunkte **A**, **B**, **C** . . . . aller dieser Strahlenpaare eine stetige Folge von unendlich vielen Punkten, d. h. eine Linie sein.

Setzen wir insbesondere die beiden Büschel als perspektivisch voraus, so wäre die so erhaltene Linie eine Gerade d. i. der zugehörige perspektivische Durchschnitt.

Sind jedoch die beiden Büschel $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ projektivisch, so wird der vorgenannte geometrische Ort eine krumme Linie oder eine *„Kurve“* sein. Letztere wird sodann als das *„Erzeugnis“* der beiden Strahlenbüschel bezeichnet.

Denken wir uns eine beliebige Gerade **g** angenommen, so wird dieselbe die beiden projektivischen Strahlenbüschel $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ in zwei projektivischen (konlokalen) Punktreihen $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots.)$ und $(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots.)$ schneiden. Diese Punktreihen haben entweder keinen Doppelpunkt, oder sie besitzen ihrer zwei. (Satz in § 116.) Drei Doppelpunkte können die beiden Reihen nicht besitzen, weil sie sonst (nach § 110) identisch, die beiden Strahlenbüschel mithin perspektivisch wären.

Untersuchen wir nun, in welcher Beziehung die eventuell vorhandenen Doppelpunkte **X** und **Y** der beiden Reihen $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots.)$ und $(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots.)$ zu dem Erzeugnisse der beiden Büschel $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ stehen.

Da ein solcher Doppelpunkt **X** zwei einander entsprechende Punkte der beiden Reihen vereinigt, so gehen durch denselben auch zwei einander entsprechende Strahlen ξ_1 und ξ_2 der beiden Büschel $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$; besagter Doppelpunkt ist demnach, als Schnitt dieser

Strahlen ξ_1 und ξ_2, gleichzeitig ein Punkt der erzeugten Kurve. Das Gleiche gilt von dem zweiten Doppelpunkte **Y**.

Hieraus ist zu ersehen, dass eine Gerade **g** mit der erzeugten Kurve entweder zwei oder gar keine Punkte gemein hat (mehr als zwei jedoch niemals), je nachdem die beiden konlokalen Punktreihen, welche auf **g** von den projektivischen Strahlenbüscheln S_1 und S_2 bestimmt werden, zwei Doppelpunkte oder keinen besitzen.

Das Vorhandensein der beiden Schnittpunkte resp. der Doppelpunkte ist offenbar bloss von der gegenseitigen Lage der Geraden **g** gegen die erzeugte Kurve abhängig.

Wir erlauben uns diesbezüglich die sich in allen späteren Betrachtungen als berechtigt erweisende Annahme, dass stets zwei solche Durchschnittspunkte oder Doppelpunkte vorhanden sind, dass diese jedoch nur in dem einem Falle *„reell“* d. h. wirklich konstruierbar und anschaulich, im anderen Falle dagegen *„imaginär“* d. h. nicht konstruierbar, und nur in der Einbildung oder richtiger gesagt, nur begrifflich vorhanden seien.

Besagte Annahme hat diesfalls dieselbe Berechtigung, wie in der Algebra die Darstellung der „imaginären Grössen“ als „Quadratwurzeln aus negativen Zahlen“.

Hiernach sagen wir, zwei konlokale Punktreihen und folglich auch zwei konlokale Strahlenbüschel besitzen stets zwei reelle oder zwei imaginäre Doppelelemente.

Diese Betrachtungen führen zu nachstehenden Satz:

„Eine Kurve, welche sich als das Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel ergibt, hat mit jeder Geraden zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein.“

Aus diesem Grunde wird auch das Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel als *„eine Kurve zweiter Ordnung“* bezeichnet.

§ 124.

Auf jedem Strahle der erzeugenden Strahlenbüschel S_1 und S_2 [Fig. 103, Taf. VI] einer Kurve zweiter Ordnung liegt ein Punkt dieser Kurve d. i. der Schnittpunkt des besagten Strahles mit dem ihm entsprechenden Strahle des zweiten Büschels. Selbstverständlich muss dieser Strahl, ebenso gut wie jede andere Gerade mit der Kurve zwei Punkte gemein haben.

Es ist aber einleuchtend, dass, weil kein zweiter dem ge-

nannten Strahle entsprechender Strahl im anderen Büschel vorhanden ist, dieser zweite Schnittpunkt nur der Scheitel des betreffenden Strahlenbüschels sein kann.

Dass die Scheitel S_1 und S_2 der erzeugenden Strahlenbüschel in der That auch Punkte der erzeugten Kurve sind, geht aus folgender Betrachtung hervor.

Denken wir uns in dem Büschel S_1 jenen Strahl σ_1 gezogen, welcher gleichzeitig durch S_2 geht, so wird demselben in dem Büschel S_2 ein Strahl σ_2 entsprechen; es wird mithin der Scheitel S_2, welcher gleichzeitig den Schnittpunkt der sich entsprechenden Strahlen σ_1 und σ_2 repräsentiert, ein Punkt der Kurve sein. Ebenso entspricht dem durch S_1 gehenden Strahle τ_2 des Büschels S_2 in dem Büschel S_1 ein Strahl τ_1; es ist folglich S_1, als Schnitt von τ_1 und τ_2, ebenfalls ein Punkt der Kurve.

Die beiden Strahlen σ_2 und τ_1 haben ausserdem eine wichtige Bedeutung.

Wir sehen nämlich, dass ein beliebiger Strahl δ_2 des Büschels S_2 von dem ihm entsprechenden Strahle δ_1 des Büschels S_1 in einem von S_2 verschiedenen Kurvenpunkte D geschnitten wird. Denken wir uns nun δ_2 um S_2 gegen die Grenzlage σ_2 gedreht und in jeder Lage seinen Schnitt D mit dem ihm entsprechenden Strahle δ_1 bestimmt, so wird das Stück S_2D stets kleiner werden und für die Grenzlage σ_2 gänzlich verschwinden (resp. unendlich klein werden).

Der Strahl σ_2 hat daher mit der Kurve in S_2 zwei unendlich nahe oder zusammenfallende Punkte gemein, stellt sonach die Tangente der Kurve in S_2 vor. Desgleichen erhält man in τ_1 die Tangente der Kurve in S_1. Mithin besteht der Satz:

„Die Scheitel der eine Kurve zweiter Ordnung erzeugenden projektivischen Strahlenbüschel sind ebenfalls Punkte der Kurve, und die beiden Strahlen, welche der Scheitelverbindungsgeraden — als Strahl des jeweilig zweiten Büschels betrachtet — entsprechen, sind Tangenten der Kurve in den zwei Scheitelpunkten.“

§ 125.

Nachdem man leicht zu dem Glauben verleitet werden könnte, dass die Punkte S_1 und S_2, als Scheitel der erzeugenden Strahlenbüschel, nicht gewöhnliche Punkte der Kurve zweiter Ordnung seien, sondern dass sich dieselben durch irgend welche besondere Eigenschaften auszeichnen, wollen wir in Nachstehendem zeigen,

dass dies nicht der Fall sei, dass vielmehr jede Kurve zweiter Ordnung auf unendlich viele Arten projektivisch erzeugt werden könne, und dass man jede beliebigen zwei Punkte der besagten Kurve als Scheitel zweier erzeugenden Strahlenbüschel betrachten kann.

Nehmen wir an, es seien S_1 und S_2 [Fig. 104, Taf. VI] die Scheitel der beiden, eine Kurve **K** zweiter Ordnung erzeugenden Strahlenbüschel, und **A**, **B**, **C**, **M**, **N** wären fünf beliebige Punkte der besagten Kurve, von welchen angenommen wird, dass sie bereits auf irgend eine Weise durch Vervollständigung der beiden Büschel S_1 und S_2 konstruiert resp. gefunden worden seien.

Die durch diese fünf Punkte gehenden Strahlenpaare α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; μ_1, μ_2 und ν_1, ν_2 sind entsprechende Strahlenpaare der beiden Büschel S_1 und S_2. Nachdem jedoch die letzteren schon durch die drei ersten Punkte **A**, **B**, **C** oder beziehungsweise durch die sie bestimmenden Strahlenpaare gegeben sind, so ist einleuchtend, dass zwischen den Punkten S_1, S_2, **A**, **B**, **C**, **M**, **N** und den sie verbindenden Strahlenpaaren geometrische Beziehungen obwalten müssen. Zu solchen Beziehungen gelangen wir sofort, wenn wir, etwa auf Grund der drei Strahlenpaare α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2, die beiden Büschel S_1 und S_2 nach der in § 114 entwickelten Methode vervollständigen.

Zu diesem Zwecke haben wir durch den Schnitt zweier entsprechenden Strahlen, beispielsweise durch den Schnitt **A** von α_1 und α_2, zwei Geraden als Träger von Hilfsreihen zu ziehen. Anstatt diesen Trägern beliebige Lagen zu geben, wählen wir für dieselben unmittelbar die Verbindungsgeraden $r_1 = AM$ und $r_2 = AN$.

Diese beiden Geraden werden von den Strahlenbüscheln S_1 und S_2 in zwei perspektivischen Punktreihen $(a_1 b_1 c_1 \ldots.)$ und $(a_2 b_2 c_2 \ldots.)$ getroffen, deren vermittelndes Projektionscentrum **S** im Schnitte der Verbindungsstrahlen $c_1 c_2$ und $b_1 b_2$ erhalten wird.

Der auf r_1 liegende Kurvenpunkt **M** ist ebenfalls der Schnitt zweier entsprechenden Strahlen μ_1 und μ_2 der Büschel S_1 und S_2. Diese Strahlen bestimmen in den Reihen r_1 und r_2 zwei entsprechende Punkte m_1 und m_2, von welchen der erstere mit **M** selbst zusammenfällt, während deren Verbindungsgerade $m_1 m_2$, welche identisch mit dem Strahle $\mu_2 = S_2 M$ ist, durch **S** gehen muss.

Durch eine gleiche Betrachtung gelangt man zu der Erkenntnis,

dass auch die Verbindungsgerade S_1N durch S geht. In diesem Ergebnisse liegt die vorgenannte geometrische Beziehung.

Mittels der Punktreihen r_1 und r_2 können nun anstandslos auch die beiden Büschel S_1 und S_2 vervollständigt, und so beliebig viele Punkte der Kurve erhalten werden. Es genügt für den vorliegenden Zweck, durch S irgend einen Strahl zu führen, um auf r_1 und r_2 zwei entsprechende Punkte d_1 und d_2 zu bestimmen. Die durch d_1 und d_2 gehenden Strahlen δ_1 und δ_2 der Büschel S_1 und S_2 entsprechen einander, schneiden sich daher in einem Punkte D der Kurve.

Zwischen den beiden Scheiteln S_1 und S_2 und den vier beliebigen Kurvenpunkten A, D, M, N herrscht gleichfalls eine leicht erkennbare Beziehung.

Es liegen nämlich die drei Schnittpunkte S, d_1 und d_2 der Paare von Verbindungsgeraden S_1N und S_2M; AM und S_1D; AN und S_2D auf einer und derselben Geraden.

Auch diese Beziehung bietet die Möglichkeit auf einfache Weise einen Kurvenpunkt A zu bestimmen, wenn die beiden Scheitel S_1 und S_2 [Fig. 105, Taf. VI] der erzeugenden Strahlenbüschel und drei beliebige Kurvenpunkte M, N, D gegeben sind.

Man wird nämlich zunächst die Verbindungsgeraden S_1D und S_2D ziehen, und den Schnitt S von S_1N und S_2M feststellen. Werden sodann mittels eines beliebigen durch S geführten Strahles die Punkte d_1 resp. d_2 auf S_1D und S_2D bestimmt, so erhält man im Schnitte von Md_1 und Nd_2 einen Kurvenpunkt A. Irgend ein anderer durch S gezogener Strahl bestimmt auf S_1D und S_2D ebenfalls zwei Punkte d'_1 und d'_2, welche, beziehungsweise mit M und N verbunden, einen Kurvenpunkt A' liefern.

Denkt man sich diese Konstruktionen fortgesetzt, so ergeben sich auf S_1D und S_2D zwei perspektivische Punktreihen

$$(d_1 d'_1 d''_1 \ldots) \quad \text{und} \quad (d_2 d'_2 d''_2 \ldots),$$

deren vermittelndes Projektionscentrum S ist, und welche aus den Punkten M und N projiziert, zwei projektivische Strahlenbüschel

$$M(d_1 d'_1 d''_1 \ldots) \quad \text{und} \quad N(d_2 d'_2 d''_2 \ldots)$$

bestimmen, deren Erzeugnis die frühere Kurve zweiter Ordnung ist.

Hiermit ist nachgewiesen, dass die Scheitel S_1 und S_2 in der That keine besonderen Kurvenpunkte sind, und dass somit der Satz gilt:

„Die Strahlenbüschel, welche aus zwei Punkten einer Kurve zweiter Ordnung alle übrigen Punkte dieser Kurve projizieren, sind stets projektivisch.“

§ 126.

Der Pascal'sche Satz.

Infolge des eben bewiesenen Satzes erscheint es somit betreffs der vorher zwischen den Punkten S_1, S_2, A, D, M und N [Fig. 105, Taf. VI] der Kurve K aufgefundenen Beziehung überflüssig, Rücksicht darauf zu nehmen, dass zwei der genannten Punkte die Scheitel der die Kurve erzeugenden Büschel sind. Nachdem die besagte Beziehung sich überhaupt auf sechs Punkte der Kurve erstreckt, so kann dieselbe auch in nachstehender Weise zum Ausdruck gebracht werden.

Die vorhandenen Verbindungsgeraden der sechs Punkte bestimmen ein Sechseck, dessen aufeinander folgende Seiten S_1D, DS_2, S_2M, MA, AN und NS_1 sind. Die erste Seite und die vierte, die zweite und fünfte, sowie die dritte und sechste Seite eines Sechseckes nennt man bekanntlich dessen Gegenseiten. Im vorliegenden Falle schneiden sich die drei Paare von Gegenseiten: S_1D, MA; DS_2, AN; S_2M, NS_1 in drei Punkten d_1, d_2 und S, welche einer und derselben Geraden angehören. Dies Ergebnis liefert den von *Pascal* herrührenden Satz:

„Die Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten eines einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechseckes liegen auf einer und derselben Geraden.“

§ 127.

Die in § 125 angestellten Betrachtungen sind auch für die Bestimmung einer Kurve zweiter Ordnung durch „Punkte und Tangenten“ von Belang.

So erkennt man ohne jedwede Schwierigkeit, dass eine Kurve K der zweiten Ordnung durch die Angabe von fünf derselben angehörenden Punkten vollständig bestimmt ist.

Wählt man nämlich zwei dieser Punkte als Scheitel von Strahlenbüscheln, deren Projektivität durch die drei nach den noch übrigen Punkten gezogenen Strahlenpaare festgestellt ist, so werden diese Büschel (mit Zugrundelegung des im § 125 angeführten Satzes) die gesuchte Kurve erzeugen.

Ebenso ist eine Kurve zweiter Ordnung durch vier Punkte **A**, **B**, **C**, **D** und die Tangente σ_1 in einem derselben, etwa in **A**, bestimmt.

Nimmt man nämlich **A** und irgend einen zweiten Punkt, beispielsweise **B** als Scheitel der die Kurve erzeugenden Strahlenbüschel an, so erhält man zwei Paare entsprechender Strahlen, welche durch die beiden noch übrigen Punkte **C** und **D** führen, und ein drittes Paar in σ_1 und $\sigma_2 = \mathbf{BA}$ (nach dem in § 124 aufgestellten Satze), womit die Projektivität der erzeugenden Büschel festgestellt ist.

Sind endlich **A**, **B**, **C** drei beliebige Punkte einer Kurve zweiter Ordnung, und stellen die beiden durch **A** und **B** gehenden Geraden τ_1 und σ_2 die Tangenten der Kurve in **A** und **B** vor, so kann man die letztere wieder als das Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüschel, deren Scheitel **A** und **B** sind, betrachten.

Die Projektivität ist durch drei Paare entsprechender Strahlen bestimmt. Ein Paar dieser Strahlen geht nämlich durch den Punkt **C**, während den Tangenten τ_1 und σ_2 in den Büscheln **B** resp. **A** jene Strahlen τ_2 und σ_1 entsprechen, welche in der Geraden **AB** liegen. (Satz in § 124.) Hieraus ergibt sich die Folgerung:

„Eine Kurve zweiter Ordnung ist vollständig bestimmt:

a) durch fünf ihrer Punkte;

b) durch vier ihrer Punkte und die Tangente in einem derselben;

c) durch drei ihrer Punkte und die Tangenten in zweien derselben.“

§ 128.

Der Pascal'sche Satz in speziellen Fällen. Degenerierte Polygone.

Da, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen an und für sich hervorgeht, der in § 125 und 126 bewiesene *Pascal*'sche Satz von der Grösse der einzelnen Seiten des eingeschriebenen Sechseckes unabhängig ist, so wird er offenbar auch dann noch gelten, wenn eine Sechseckseite unendlich klein ist, also durch eine Tangente der Kurve repräsentiert wird. Die beiden auf dieser unendlich kleinen Seite liegenden Eckpunkte des Secksecks sind sodann im Berührungspunkte vereinigt.

Im allgemeinen pflegt man ein einer Kurve eingeschriebenes Polygon, in welchem eine oder mehrere Seiten unendlich klein sind, ihrer Lage und Richtung nach aber durch Kurventangenten dargestellt sind, ein *„degeneriertes eingeschriebenes Polygon“* zu nennen.

So kann beispielsweise, wenn **A**, **B**, **C**, **D** und **E** (Fig. 106, Taf. VI] fünf beliebig angenommene Punkte einer Kurve zweiter Ordnung sind, und $\mathbf{t_a}$ die Tangente der letzteren in **A** vorstellt, das Fünfeck **ABCDE** im Verein mit der Tangente $\mathbf{t_a}$ als ein der Kurve eingeschriebenes degeneriertes Sechseck **ABCDEF** aufgefasst werden, in welchem der Eckpunkt **F** mit dem Eckpunkte **A** zusammenfällt, und die unendlich kleine Seite **AF** ihrer Richtung nach durch die Tangente $\mathbf{t_a}$ dargestellt ist.

Da nun, wie oben bemerkt wurde, der *Pascal'*sche Satz auch für dieses Sechseck gelten muss, so werden die Schnittpunkte α, β, γ der Geradenpaare (Gegenseitenpaare des degenerierten Sechseckes) **AB** und **DE**, **BC** und **AE**; **DC** und $\mathbf{AF} = \mathbf{t_a}$ in einer und derselben Geraden **p** liegen.

Hieraus ergibt sich sofort eine höchst einfache Konstruktion der Tangente $\mathbf{t_a}$.

Man bestimmt nämlich zunächst die Punkte α und β als Schnitte von **AB** und **DE**, resp. **BC** und **AE** und bringt hierauf $\alpha\beta = \mathbf{p}$ mit **CD** in γ zum Schnitte; γ mit **A** geradlinig verbunden, liefert unmittelbar in $\mathbf{A}\gamma$ die gesuchte Tangente $\mathbf{t_a}$.

§ 129.

Wichtig erscheint die Spezialisierung des Pascal'schen Satzes für ein in ein Viereck und zwei Tangenten ausgeartetes Sechseck.

Seien **A**, **B**, **C**, **D** [Fig. 107, Taf. VI] irgend vier Punkte einer Kurve zweiter Ordnung, und denken wir uns in irgend zweien dieser Punkte, etwa in **A** und **C**, die Tangenten $\mathbf{t_a}$ und $\mathbf{t_c}$ der Kurve gegeben.

Die vier Punkte **A**, **B**, **C**, **D** können im Sinne der Elementargeometrie auf drei Arten zu Vierecken verbunden werden; zwei dieser Vierecke sind sogenannte „überschlagene“, während das dritte als „konvexes“ Viereck bezeichnet wird.

Für unsere Betrachtung wählen wir jenes einfache Viereck, in welchem die mit den Tangenten $\mathbf{t_a}$ und $\mathbf{t_c}$ versehenen Punkte **A** und **C** Gegenecken sind, d. i. also das konvexe Viereck **ABCD**.

Im Vereine mit den beiden Tangenten t_a und t_c kann dieses Viereck als ein degeneriertes Sechseck **AEBCFD** aufgefasst werden, in welchem die Eckpunkte **E** und **F** beziehungsweise mit **A** und **C** zusammenfallen, während die Tangenten t_a und t_c die Richtungen der unendlich kleinen Sechseckseiten **AE** und **CF** vorstellen.

In dem besagten degenerierten Sechsecke sind **AB** und **CD**; **BC** und **AD**; $t_a = AE$ und $t_c = CF$ Gegenseiten. Nach dem *Pascal*'schen Satze müssen die drei Schnittpunkte **Y**, **Z** und **r** dieser drei Seitenpaare auf einer und derselben Geraden liegen. Wie ersichtlich ist diese Gerade diejenige, welche gleichzeitig die Schnittpunkte **Y** und **Z** der Gegenseiten des einfachen Viereckes **ABCD** verbindet.

Hätte man anstatt der Tangenten t_a und t_c in den Punkten **A** und **C**, jene t_b und t_d in den beiden anderen Gegenecken **B** und **D** des Viereckes gewählt, so würde man durch eine gleiche Betrachtung gefunden haben, dass ihr Schnittpunkt **q** ebenfalls auf der vorgenannten Geraden **YZ** liegt.

Nehmen wir weiter die Tangenten in einem anderen Punktepaare, beispielsweise die Tangenten t_a und t_b in **A** und **B** an.

In dem überschlagenen Viereck **ACBD** sind die Punkte **A** und **B** Gegenecken. Mit Hinzufügung der Tangenten t_a und t_b erhalten wir wieder ein degeneriertes Sechseck, in welchem die Seiten in der Reihenfolge t_a, **AC**, **CB**, t_b, **BD**, **DA** stehen; es repräsentieren demnach t_a und t_b; **AC** und **BD**; **CB** und **DA** die Gegenseiten, deren Schnittpunkte **m**, **X** und **Z** nach dem *Pascal*'schen Satze in einer Geraden liegen müssen. Letzgenannte Gerade ist aber wieder die Verbindungsgerade der Schnittpunkte **X** und **Z** beider Gegenseitenpaare des Viereckes **ACBD**. Auf derselben Geraden befindet sich auch der Schnittpunkt **n** der beiden Tangenten t_c und t_d in **C** und **D**.

In dem dritten (überschlagenen) Viereck **ABDC** sind **A** und **D**; **B** und **C** Gegenecken, während **XY** die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der beiden Gegenseitenpaare vorstellt.

Durch dieselbe Betrachtung resp. Anwendung des *Pascal*'schen Satzes findet man so wie vorher, dass sich auch in diesem Falle sowohl der Schnittpunkt **o** der Tangenten t_a und t_d in den Gegenecken **A** und **D**, als auch der Schnittpunkt **p** der Tangenten t_b und t_c in den Gegenecken **B** und **C** auf der Geraden **XY** vorfinde. Es gilt mithin allgemein der Satz:

„Werden vier beliebige Punkte einer Kurve zweiten Grades in

irgend einer Reihenfolge zu einem einfachen Viereck verbunden, so liegen die Schnittpunkte der Tangentenpaare der Kurve in den Gegeneckenpaaren des Viereckes auf jener Geraden, welche die Schnittpunkte der beiden Gegenseitenpaare verbindet.“

Eine andere und umfassendere Form kann diesem Satze gegegeben werden, wenn man die vier Punkte **A**, **B**, **C**, **D** als Eckpunkte eines vollständigen Viereckes, und die vier ihnen zukommenden Tangenten t_a, t_b, t_c, t_d als Seiten eines vollständigen Vierseites betrachtet. Man hat sodann nachstehende Anordnung.

a) Bezüglich des vollständigen Viereckes. Die drei Paare von Gegenseiten **AB** und **CD**, **AC** und **BD**, **AD** und **BC** bestimmen beziehungsweise die Diagonalecken **Y**, **X** und **Z**, und diese die drei Diagonalen **XY**, **YZ**, **ZX**.

b) Bezüglich des vollständigen Vierseites. Die Gegenecken sind: $(t_a, t_b) = m$ und $(t_c, t_d) = n$; $(t_a, t_d) = o$ und $(t_b, t_c) = p$; $(t_a, t_c) = r$ und $(t_b, t_a) = q$; es sind mithin **mn**, **op** und **rq** die Diagonalen.

Nun wurde aber vorher nachgewiesen, dass **m** und **n** auf **XZ**, dass **o** und **p** auf **XY** und dass **r** und **q** auf **YZ** liegen; es besteht sonach der Satz:

„Das von vier beliebigen Punkten einer Kurve zweiter Ordnung gebildete vollständige Viereck, und das durch die vier Kurventangenten in diesen Punkten bestimmte vollständige Vierseit besitzen ein gemeinschaftliches Diagonaldreieck.“

Weiter kann der Fig. 107, Taf. VI noch ohne weiteres der nachstehende, auf denselben Gegenstand bezügliche Satz entnommen werden:

„Bildet man aus irgend vier Punkten einer Kurve zweiter Ordnung ein vollständiges Viereck mit seinem Diagonaldreieck, so liegt der Schnittpunkt der Kurventangenten in irgend zwei der vier Punkte auf jener Diagonale, dessen gegenüberliegender Diagonaleckpunkt sich auf der durch die Berührungspunkte gehenden Viereckseite befindet.“

§ 130.

Betrachten wir weiter noch irgend ein einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenes Dreieck **ABC** [Fig. 108, Taf. VI] und die Tangenten t_a, t_b, t_c der Kurve in dessen Eckpunkten **A**, **B** und **C**, so kann auch dieses als ein degeneriertes Pascal'sches

Sechseck **ADBECF** aufgefasst werden, in welchem die unendlich kleinen Seiten **AD**, **BE** und **CF** ihrer Richtung nach durch die Tangenten t_a, t_b und t_c dargestellt sind.

In dem bezeichneten Sechseck sind **AB** und **CF** $= t_c$; **BC** und **AD** $= t_a$; **CA** und **BE** $= t_b$ die drei Gegenseitenpaare, deren Schnittpunkte γ, α, β nach dem Pascal'schen Satze auf einer Geraden **pp** liegen müssen; es besteht demnach auch diesfalls der Satz:

„Die Schnittpunkte der Seiten eines einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Dreieckes mit den Tangenten in den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten liegen auf einer und derselben Geraden.“

§ 131.

Die Spezialfälle des *Pascal*'schen Satzes gestatten überdies (wie schon in § 128 darauf hingewiesen wurde), einfache Tangentenkonstruktionen an eine durch Punkte gegebene Kurve zweiter Ordnung.

Ein derartiges Beispiel wäre allenfalls die Konstruktion der Tangenten einer durch fünf Punkte **A**, **B**, **C**, **D**, **E** [Fig. 109, Taf. VI] gegebenen Kurve zweiter Ordnung in zweien dieser Punkte, etwa in **A** und **B**.

Mit Zugrundelegung des dritten in § 129 angeführten Satzes muss der Schnittpunkt **n** der Tangenten t_a und t_b in den Punkten **A** und **B** auf jener Diagonale des vollständigen Viereckes **ABCD** liegen, welche sich als Verbindungsgerade der Schnittpunkte α und β der Gegenseitenpaare **BC** und **AD** resp. **AC** und **BD** ergibt.

Betrachtet man **A** und **B** als Eckpunkte eines zweiten vollständigen Viereckes, beispielsweise des Viereckes **ABDE**, so muss der vorgenannte Schnittpunkt **n** von t_a und t_b wieder (nach dem vorher angeführten Satze) auf jener Diagonale liegen, welche den Schnittpunkt γ der Gegenseiten **BD** und **AE** mit dem Schnittpunkte δ der Gegenseiten **AD** und **BE** verbindet. Im Schnitte von $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ erhält man sonach den Punkt **n** und in **nA** und **nB** die gesuchten Tangenten t_a und t_b.

§ 132.

Konstruktion der Doppelelemente zweier konlokalen Grundgebilde mittels einer Kurve zweiter Ordnung.

Nehmen wir an, es seien zwei projektivische Strahlenbüschel mit dem gemeinschaftlichen Scheitel **S** [Fig. 110, Taf. VI] durch

drei Paare entsprechender Strahlen $\mathbf{S}\alpha_1$ und $\mathbf{S}\alpha_2$; $\mathbf{S}\beta_1$ und $\mathbf{S}\beta_2$; $\mathbf{S}\gamma_1$ und $\mathbf{S}\gamma_2$ gegeben. Die Doppelstrahlen derselben sind zu konstruieren.

Dies lässt sich mittels einer von *Steiner* herrührenden Konstruktion höchst einfach bewerkstelligen.

Man zeichnet zunächst eine beliebige durch den gemeinschaftlichen Scheitel **S** gehende Kurve **K** zweiter Ordnung. (In Fig. 110, Taf. VI wurde **K** als Kreis gewählt. Obwohl erst in der Folge nachgewiesen werden wird, dass der Kreis eine Kurve zweiter Ordnung sei, machen wir doch schon an dieser Stelle zu gunsten einfacherer Konstruktionen von dieser Thatsache Gebrauch.) Die Kurve **K** wird von den sechs vorgenannten Strahlen $\mathbf{S}\alpha_1$, $\mathbf{S}\alpha_2$, $\mathbf{S}\beta_1$, $\mathbf{S}\beta_2$, $\mathbf{S}\gamma_1$, $\mathbf{S}\gamma_2$ ausser im Punkte **S** selbst, noch in sechs Punkten α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 und γ_2 getroffen.

Werden die Punkte α_1, β_1, γ_1, ..., welche die Strahlen des Büschels $\mathbf{S}(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ auf der Kurve **K** bestimmen, von dem Kurvenpunkte α_2 aus projiziert, so erhalten wir (Satz in § 125) ein Strahlenbüschel $\alpha_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots.)$, welches mit dem Büschel $\mathbf{S}(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ projektivisch ist.

Projizieren wir in gleicher Weise von dem Kurvenpunkte α_1 aus die Punkte $\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots$, welch letztere durch die Strahlen des Büschels $\mathbf{S}(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ auf der Kurve **K** bestimmt werden, so erhalten wir (dem vorgenannten Satze entsprechend) ein Strahlenbüschel $\alpha_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$, welches mit dem Strahlenbüschel $\mathbf{S}(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ projektivisch ist.

Da wir aber die beiden Büschel $\mathbf{S}(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $\mathbf{S}(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ als projektivisch voraussetzen, so müssen auch die beiden Büschel $\alpha_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots.)$ und $\alpha_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots.)$ nicht nur untereinander projektivisch, sondern insbesondere (Satz in § 112) perspektivisch sein, nachdem die Verbindungsgerade ihrer Scheitel α_1 und α_2 zwei einander entsprechende Strahlen $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_2\alpha_1$ vereinigt. Der perspektivische Durchschnitt dieser beiden Büschel ist jene Gerade **r**, welche die Schnittpunkte **b** und **c** der sich entsprechenden Strahlen $\alpha_1\beta_2$ und $\alpha_2\beta_1$ resp. $\alpha_1\gamma_2$ und $\alpha_2\gamma_1$ verbindet.

Nimmt man daher auf **r** einen beliebigen Punkt **d** an, so werden die durch ihn gehenden, sich entsprechenden Strahlen $\alpha_2\mathbf{d}$ und $\alpha_1\mathbf{d}$ der beiden Büschel $\alpha_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $\alpha_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ die Kurve **K** in zwei Punkten δ_1 resp. δ_2 treffen, welche mit **S** verbunden stets zwei einander entsprechende Strahlen $\mathbf{S}\delta_1$ und $\mathbf{S}\delta_2$ der beiden gegebenen Büschel $\mathbf{S}(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $\mathbf{S}(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ liefern.

Wie ersichtlich kann man auf diese Weise durch Wahl verschiedener Punkte von **r** beliebig viele korrespondierende Strahlenpaare der gegebenen konlokalen Strahlenbüschel erhalten.

Die Gerade **r** wird ferner mit der Kurve **K** entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Punkte **x** und **y** gemein haben. (Im vorliegenden Falle sind **x** und **y** reell.)

Die beiden durch **x** gehenden Strahlen $\alpha_2 x$ und $\alpha_1 x$ entsprechen sich in den Büscheln $\alpha_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $\alpha_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$, und bestimmen daher auf der Kurve **K** zwei Punkte ξ_1 und ξ_2, welche mit **S** verbunden zwei einander entsprechende Strahlen $S\xi_1$ und $S\xi_2$ der gegebenen Büschel $S(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $S(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ liefern. Nachdem aber die beiden Punkte ξ_1 und ξ_2 mit **x** selbst zusammenfallen, so sind auch die beiden Strahlen $S\xi_1$ und $S\xi_2$ in **Sx** vereinigt, d. h. **Sx** ist der eine Doppelstrahl der konlokalen Büschel $S(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $S(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$. Der zweite Doppelstrahl ist **Sy**.

Nach derselben Methode kann man auch die Doppelpunkte zweier konlokalen Punktreihen

$r_1(a_1b_1c_1\ldots)$ und $r_2(a_2b_2c_2\ldots)$ [Fig. 110, Taf. VI]

dadurch konstruieren, dass man dieselben von einem beliebigen Punkte **S** aus durch zwei konzentrische Strahlenbüschel projiziert, die Doppelstrahlen **Sx** und **Sy** der letzteren bestimmt, und so die zu suchenden Doppelpunkte x_1x_2 und y_1y_2 im Schnitte von **Sx** und **Sy** mit dem gemeinschaftlichen Träger r_1r_2 findet.

Bezüglich der Konstruktion der Geraden **r** ist noch folgendes zu bemerken.

Besagte Gerade **r** wurde mittels der beiden Punkte **b** und **c** bestimmt, in welchen sich beziehungsweise $\alpha_1\beta_2$ und $\alpha_2\beta_1$, resp. $\alpha_1\gamma_2$ und $\alpha_2\gamma_1$ schneiden. Aber auch der Schnitt von $\beta_1\gamma_2$ und $\beta_2\gamma_1$ liegt auf **r**. Denn verbindet man die sechs Punkte in der Reihenfolge $\alpha_1\beta_2\gamma_1\alpha_2\beta_1\gamma_2$ zu einem Sechseck, so sind die vorgenannten Geradenpaare Gegenseiten; es müssen daher (nach dem *Pascal*'schen Satze) ihre Schnittpunkte auf einer und derselben Geraden liegen. Man erhält demnach **r**, wenn man aus den sechs Punkten α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 zwei Punkte in der Weise ableitet, dass man von den drei Kombinationen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ zwei wählt, aus ihnen durch Indexvertauschung je ein Geradenpaar von der Form $\mu_1\nu_2$ und $\mu_2\nu_1$ bildet, und die Schnittpunkte, welche zwei solche Geradenpaare ergeben, verbindet.

§ 133.

Der Desargues'sche Satz.

Seien **A**, **B**, **C**, **D** [Fig. 111, Taf. VI] vier beliebige Punkte einer Kurve **K** zweiter Ordnung; ferner sei **r** irgend eine Gerade, welche die Kurve **K** in $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$ treffen möge.

Die drei Paare von Gegenseiten des vollständigen Viereckes **ABCD**, nämlich **AB** und **CD**; **AD** und **BC**; **AC** und **BD** schneiden die Gerade **r** (Satz in § 122) in drei Paaren konjugierter Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$; $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ einer Involution. Es lässt sich leicht zeigen, dass auch die beiden Kurvenpunkte $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$ ein Paar konjugierter Punkte dieser Involution sind.

Behufs dieses Nachweises projizieren wir die vier Kurvenpunkte **B**, **D**, $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ das eine Mal vom Kurvenpunkte **A** und das andere Mal vom Kurvenpunkte **C** aus, so, dass wir (Satz in § 125) zwei projektivische Strahlenwürfe erhalten. Die letzteren schneiden die Gerade **r** in den beiden Punktwürfen $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)$ und $(\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)$, welche ebenfalls projektivisch sein müssen.

Weiter können wir durch blosse Elementenvertauschung (Satz in § 117) aus dem Wurfe $(\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)$ den ihm projektivischen Wurf $(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{d}_2\mathbf{d}_1)$ ableiten, so dass auch

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2) \pi (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{d}_2\mathbf{d}_1)$$

ist. Hieraus ist aber ersichtlich, dass, sobald $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$; $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$ als die drei Paare bestimmender Elemente einer Projektivität angenommen werden, das Elementenpaar $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ vertauschbar ist, woraus weiter (nach § 119) folgt, dass $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$; $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ konjugierte Punktepaare einer Involution sind. Ein viertes konjugiertes Punktepaar dieser Involution ist aber (Satz in § 122) auch $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$. Es gilt mithin der von *Desargues* herrührende Satz:

„Eine Kurve zweiter Ordnung und die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Viereckes, dessen Eckpunkte vier beliebige Kurvenpunkte sind, schneiden eine Gerade stets in vier Paaren konjugierter Punkte einer Involution."

§ 134.

Aus dem vorstehenden Satze können ohne weiteres zwei andere Sätze abgeleitet werden, von welchen namentlich der eine für die Konstruktion von Involutionen und ihren Doppelelementen sehr wichtig ist.

Sei nämlich K wieder eine Kurve zweiter Ordnung, seien ferner A und B [Fig. 112, Taf. VI] zwei beliebige Punkte derselben und a_1 ein der Kurve nicht angehörender Punkt.

Denken wir uns durch a_1 beliebige Strahlen gezogen, welche die Kurve K in Punktepaaren C_1, C_2; D_1, D_2; E_1, E_2 .... treffen, und projizieren wir die eine Reihe von Schnittpunkten C_1, D_1, E_1 ... von B aus durch das Strahlenbüschel $B(C_1 D_1 E_1 \ldots)$, während die andere Schnittpunktreihe $C_2, D_2, E_2, \ldots$ von A aus durch das Strahlenbüschel $A(C_2 D_2 E_2 \ldots)$ projiziert werde, so lässt sich beweisen, dass diese beiden Strahlenbüschel projektivisch sind.

Denken wir uns nämlich A mit B verbunden und durch a_1 irgend eine Gerade r gezogen, welche die Kurve K in b_1 und b_2, die Gerade AB aber in a_2 schneiden möge.

Die beiden Punktepaare a_1, a_2 und b_1, b_2 bestimmen auf r (Satz in § 121) eine Involution.

Dem *Desargues*'schen Satze entsprechend wird man stets weitere konjugierte Punkte dieser Involution erhalten, wenn man ein vollständiges Viereck bildet, in welchem A und B zwei Eckpunkte desselben vorstellen, während zwei andere Eckpunkte dieses Vierecks, wie beispielsweise C_1 und C_2, zwei auf einem durch a_1 gehenden Strahle liegende Kurvenpunkte sind, und hierauf ein Paar von Gegenseiten, etwa BC_1 und AC_2, beziehungsweise in c_1 und c_2 mit r zum Schnitte bringt.

Ebenso liefern auch die beiden Strahlen BD_1 und AD_2 auf r zwei konjugierte Punkte d_1 und d_2, und die beiden Strahlen BE_1 und AE_2 zwei konjugierte Punkte e_1 und e_2 u. s. w.

Nachdem aber, wie wir wissen, jede Involution dem Wesen nach zwei projektivische konlokale Grundgebilde repräsentiert, so werden auch die Punktreihen $(c_1 d_1 e_1 \ldots)$ und $(c_2 d_2 e_2 \ldots)$ zu einander projektivisch sein, und wird das Gleiche von den diese Punktreihen projizierenden Strahlenbüscheln $B(C_1 D_1 E_1 \ldots)$ und $A(C_2 D_2 E_2 \ldots)$ gelten. Man erhält somit den Satz:

„Schneidet man eine Kurve zweiter Ordnung durch die Strahlen eines Büschels (dessen Scheitel kein Kurvenpunkt ist) in Punktepaaren, und verbindet man einen Punkt eines jeden Paares mit einem beliebigen festen Kurvenpunkte, und den zweiten Punkt eines jeden Paares mit einem zweiten beliebigen Kurvenpunkte, so erhält man zwei projektivische Strahlenbüschel, deren Scheitel die beiden letztgenannten Kurvenpunkte sind.“

§ 135.

Projizieren wir überdies auch noch die Punkte C_1, D_1, E_1 . . . [Fig. 112, Taf. VI] vom Kurvenpunkte A aus mittels des Strahlenbüschels $A(C_1 D_1 E_1 \ldots)$, so wird dieses letztbezeichnete Büschel (Satz in § 125) mit dem Büschel $B(C_1 D_1 E_1 \ldots)$ projektivisch sein. Dem eben bewiesenen Satze zufolge ist aber das Strahlenbüschel $B(C_1 D_1 E_1 \ldots)$ auch projektivisch mit dem Büschel $A(C_2 D_2 E_2 \ldots)$.

Auf diese Weise erhalten wir zwei projektivische Büschel $A(C_1 D_1 E_1 \ldots)$ und $A(C_2 D_2 E_2 \ldots)$ mit dem gemeinschaftlichen Scheitel A.

In den besagten Büscheln entsprechen sich stets solche Strahlen AC_1 und AC_2, welche durch zwei Kurvenpunkte C_1 und C_2 gehen, die auf einer durch a_1 gehenden Geraden liegen. Nachdem es aber gleichgültig ist, welchen der beiden Schnittpunkte man mit C_1 und welchen mit C_2 bezeichnet (man kann beispielsweise F_1 mit C_2 und F_2 mit C_1 zusammenfallen lassen), so ist offenbar, dass jedes Paar entsprechender Strahlen vertauschbar ist, ohne dass das Entsprechen aufhört.

Die beiden konlokalen Strahlenbüschel $A(C_1 D_1 E_1 F_1 \ldots)$ und $A(C_2 D_2 E_2 F_2 \ldots)$ sind somit zu einer Involution vereinigt, und man erhält stets zwei konjugierte Strahlen derselben, wenn man A mit den beiden Schnittpunkten, die ein durch a_1 gehender Strahl mit der Kurve K bestimmt, verbindet.

Kann durch a_1 eine Tangente an die Kurve K gezogen werden, d. h. ein Strahl, dessen beide Schnittpunkte X_1 und X_2 resp. Y_1 und Y_2 mit der Kurve in einen und denselben Punkt zusammenfallen, so sind auch die konjugierten Strahlen AX_1 und AX_2 resp. AY_1 und AY_2 in je einem „Doppelstrahle“ der Involution vereinigt.

Nachdem aber die Involution zwei reelle oder zwei imaginäre Doppelstrahlen besitzen muss, so sind von a_1 aus entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Tangenten an die Kurve möglich, ein Resultat, zu welchem wir in der Folge auch noch auf anderem Wege gelangen werden. Die angestellten Betrachtungen liefern demnach den Satz:

„Verbindet man die Punktepaare, in welchen die Strahlen irgend eines Strahlenbüschels eine Kurve zweiter Ordnung schneiden, mit einem beliebigen Kurvenpunkte, so erhält man ein involutorisches

Strahlenbüschel, dessen Doppelstrahlen durch die Berührungspunkte der Kurve mit den vom Scheitel des schneidenden Büschels gezogenen Tangenten gehen.

§ 136.

Wenden wir uns wieder einem von vier Punkten **A, B, C, D** [Fig. 111, Taf. VI] einer Kurve **K** zweiter Ordnung gebildeten vollständigen Viereck zu, und wählen wir eine beliebige Tangente **t** dieser Kurve. In dem Berührungspunkte der letzteren sind selbstverständlich die beiden Schnittpunkte derselben mit der Kurve vereinigt.

Den *Desargues*'schen Satz auf diese Tangente angewendet, zeigt sich, dass das konjugierte Punktepaar, welches die Kurve selbst auf der Tangente bestimmt, in einem Punkte, d. i. in dem Berührungspunkte, vereinigt ist, also einen Doppelpunkt jener Involution repräsentiert, von welcher drei Paare konjugierter Punkte als Schnitte der Tangente **t** mit den drei Paaren von Gegenseiten des vollständigen Viereckes **ABCD** erhalten werden.

Wenn nun von einer Kurve zweiter Ordnung vier Punkte **A, B, C, D** [Fig. 113, Taf. VI] gegeben sind, und diese Kurve nebstbei eine gegebene Gerade **t** berühren soll, so kann der Berührungspunkt nur einer von den beiden Doppelpunkten jener Involution sein, welche nach dem *Desargues*'schen Satze das vollständige Viereck **ABCD** auf **t** bestimmt. Jeder der beiden Doppelpunkte bestimmt eine den gestellten Bedingungen entsprechende Kurve. Man hat sonach den Satz:

„Es gibt zwei (reelle oder imaginäre) Kurven zweiter Ordnung, welche durch vier gegebene Punkte gehen und eine gleichfalls gegebene Gerade berühren. Die Berührungspunkte derselben mit der Geraden sind die beiden Doppelpunkte jener Involution, welche das von den vier gegebenen Punkten gebildete vollständige Viereck auf der gegebenen Geraden bestimmt.“

Die genannten Doppelpunkte können folgendermassen konstruiert werden.

Die Involution auf **t** [Fig. 113, Taf. VI] ist durch die beiden Paare konjugierter Punkte a_1, a_2 und b_1, b_2 bestimmt, welche die Gegenseitenpaare **AC** und **BD**; resp. **BC** und **AD** des vollständigen Viereckes **ABCD** auf **t** ergeben.

Zeichnen wir eine beliebige Kurve **K** zweiter Ordnung (diesfalls wieder, so wie in § 132, irgend einen Kreis **K**) und führen

von einem willkürlich gewählten Punkte S der Kurve K nach a_1, a_2, b_1, b_2 Strahlen, welche die besagte Kurve zum zweitenmale in α_1, α_2, β_1, β_2 treffen. Die Verbindungsgeraden $\alpha_1\alpha_2$ und $\beta_1\beta_2$ schneiden sich in einem Punkte S'.

Schneidet man nun die Kurve K mit den Strahlen des Büschels S' in Punktepaaren und projiziert die letzteren von S aus, so erhält man (Satz, § 135) ein involutorisches Strahlenbüschel, in welchem $S\alpha_1$ und $S\alpha_2$; $S\beta_1$ und $S\beta_2$ zwei Paare konjugierter Strahlen vorstellen, während dessen Doppelstrahlen durch die nach den Berührungspunkten δ und δ' der von S' aus an K gezogenen Tangenten repräsentiert werden.

Dieses involutorische Strahlenbüschel $S(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \ldots)$ schneidet weiter die Gerade t in der Involution $(a_1a_2, b_1b_2, \ldots)$. Die gesuchten Doppelpunkte der letzteren sind mithin die Schnittpunkte d und d' von t mit den Doppelstrahlen $S\delta$ und $S\delta'$ des involutorischen Büschels S.

Jede der beiden Kurven zweiter Ordnung, welche durch A, B, C, D gehen und t berühren, kann nun als durch fünf Punkte — A, B, C, D, d resp.: A, B, C, D, d' — gegeben betrachtet und durch Vervollständigung zweier projektivischen Strahlenbüschel (§ 127) konstruiert werden.

Bemerkung. Da nach Satz 1, § 120, die beiden konjugierten Punktepaare a_1, a_2 und b_1, b_2 durch die Doppelpunkte d und d' harmonisch getrennt sind, so ist durch die ausgeführte Konstruktion auch die Lösung der Aufgabe: Ein Punktepaar d, d' zu konstruieren, das gleichzeitig zwei gegebene Punktepaare a_1, a_2 und b_1, b_2 harmonisch trennt, erledigt.

§ 137.

Denken wir uns in zwei beliebigen Punkten A und B [Fig. 114, Taf. VI] einer Kurve K zweiter Ordnung die Tangenten T_a und T_b, sowie auch die Berührungssehne $s = AB$ gezogen, so kann man die drei genannten Geraden als Seiten eines degenerierten eingeschriebenen Viereckes ACBD auffassen, in welchem die Ecken C und D beziehungsweise mit den Ecken A und B zusammenfallen, die zwei Gegenseiten AD und CB in der Geraden $s = AB$ vereinigt erscheinen, und die beiden unendlich kleinen Gegenseiten AC und BD ihrer Richtung nach durch die Tangenten T_a und T_b dargestellt sind.

Wendet man auf dieses Viereck den *Desargues*'schen Satz an,

so erhält man auf einer beliebigen Geraden **g** drei Paare konjugierter Punkte einer Involution, und zwar das eine Paar a_1, a_2 im Schnitte von **g** mit der Kurve **K** und das zweite Paar b_1, b_2 im Schnitte von **g** mit den beiden Gegenseiten T_a, T_b. Das dritte Paar, als Schnitt von **g** mit den in **s** zusammenfallenden Gegenseiten **AD** und **BC**, ist im Schnitte **d** von **s** und **g** vereinigt, und stellt mithin einen Doppelpunkt der Involution vor. Hieraus folgt der Satz:

„Eine Kurve zweiter Ordnung und zwei beliebige Tangenten derselben werden von irgend einer Geraden in zwei Paaren konjugierter Punkte einer Involution geschnitten, von welcher der eine Doppelpunkt sich im Schnitte der Geraden mit der Berührungssehne der beiden Tangenten ergibt.“

Wählt man statt einer beliebigen Geraden **g** eine Tangente **t** der Kurve, so sind deren Schnittpunkte c_1 und c_2 mit T_a und T_b wieder konjugierte Punkte; ferner fallen die beiden Schnittpunkte von **t** mit der Kurve im Berührungspunkte d'' zusammen, so dass letzterer einen Doppelpunkt der Involution repräsentiert; der zweite Doppelpunkt ist, wie im früheren Falle der Schnitt d' von **t** mit **AB** = **s**.

Da (Satz 1 in § 120) das Punktepaar c_1, c_2 durch die Doppelpunkte d' und d'' harmonisch getrennt ist, kann der Satz aufgestellt werden:

„Eine beliebige Tangente einer Kurve zweiter Ordnung wird von zwei anderen beliebigen Tangenten in einem Punktepaar geschnitten, welches durch den Berührungspunkt der ersten Tangente und dem Schnittpunkte der letzteren mit der den beiden anderen Tangenten entsprechenden Berührungssehne harmonisch getrennt ist.“

Ein anderer Spezialsatz ergibt sich sofort, wenn man die schneidende Gerade **h** durch den Schnittpunkt **S** der beiden Tangenten T_a und T_b führt.

Die Punkte m_1 und m_2, in welchen **h** die Kurve **K** trifft, sind zwei konjugierte Punkte der Involution, der Schnittpunkt **n** von **h** mit der Berührungssehne **s** ist der eine Doppelpunkt, während der Punkt **S** den zweiten Doppelpunkt vorstellt, da in demselben die Schnitte von **h** mit den beiden Tangenten T_a, T_b, d. i. zwei konjugierte Punkte zusammenfallen. Nach Satz 1 in § 120 sind wieder die Punkte m_1 und m_2 durch die Punkte **S** und **n** harmonisch getrennt; es folgt mithin der Satz:

„Jeder durch den Schnittpunkt irgend zweier Tangenten einer

Kurve zweiter Ordnung geführte Strahl schneidet die Kurve in einem Punktepaar, welches durch den genannten Schnittpunkt und durch den Schnittpunkt des Strahles mit der den beiden Tangenten entsprechenden Berührungssehne harmonisch getrennt ist.“

§ 138.

Eine Kurve zweiter Ordnung ist, wie wir wissen, durch fünf ihrer Punkte eindeutig bestimmt. Nachdem aber sowohl die Bedingung, dass eine Kurve durch einen gegebenen Punkt gehe, als auch die Bedingung, dass sie eine gegebene Gerade irgendwo berühre, eine einfache Bedingung ist, kann man offenbar zwei von den gegebenen fünf Punkten durch Tangenten ersetzen.

Eine Kurve zweiter Ordnung ist somit auch durch drei ihrer Punkte **A**, **B**, **C** [Fig. 115, Taf. VI] und zwei ihrer Tangenten $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ vollständig bestimmt.

Der erste in § 137 angeführte Satz gibt auch bereits die Mittel an die Hand, eine solche Kurve konstruieren zu können.

Verbinden wir zunächst die beiden Kurvenpunkte **A** und **B** durch eine Gerade **g**, welche die beiden Tangenten $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ beziehungsweise in $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ schneidet. Nach dem obangezogenen Satze bestimmen die beiden Punktepaare **A**, **B** und $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ auf **g** eine Involution; die Berührungssehne der beiden Tangenten $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ muss sodann durch einen der beiden Doppelpunkte **d** oder **d'** dieser Involution gehen.

Vereinigen wir zwei andere Kurvenpunkte, etwa **B** und **C** durch eine Gerade $\mathbf{g}_1$, welche $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ in $\mathbf{c}_1$ resp. $\mathbf{c}_2$ schneidet, so werden die beiden Punktepaare **B**, **C** und $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ auf $\mathbf{g}_1$ wieder eine Involution bestimmen, während die Berührungssehne der Tangenten $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$, so wie vorher, durch einen der beiden Doppelpunkte $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}'_1$ dieser Involution gehen muss.

Hiernach ergeben sich vier verschiedene Berührungssehnen $\mathbf{d}\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}'\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}\mathbf{d}'_1$ und $\mathbf{d}'\mathbf{d}'_1$, deren jede eine den oben gestellten Bedingungen entsprechende Kurve zweiter Ordnung bestimmt. Es kann daher der Satz aufgestellt werden:

„Es gibt stets vier (reelle oder imaginäre) Kurven zweiter Ordnung, welche durch drei gegebene Punkte gehen und zwei gegebene Geraden berühren.“

Was die Konstruktion dieser Kurven betrifft, so führt folgende Methode sehr einfach zum Ziele.

Wir umschreiben den drei gegebenen Punkten **A**, **B**, **C** den Kreis **K'**. (Wiederholt sei hier erwähnt, dass der Kreis an späterer Stelle als Kurve zweiter Ordnung nachgewiesen werden wird.) Von den Punkten $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ [Fig. 115, Taf. VI], in welchen die Gerade $\mathbf{g} = \mathbf{AB}$ die Tangenten $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ trifft, ziehen wir an den Kreis **K'** je eine Tangente τ_1 resp. τ_2; die zugehörige Berührungssehne σ trifft sodann (Satz 1, § 137) die Gerade **g** in einem Doppelpunkte **d** der Involution $[\mathbf{AB};\ \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$. Wendet man statt der Tangente τ_1 die zweite von $\mathbf{b}_1$ aus mögliche Kreistangente τ'_1 an, so wird in gleicher Weise die Berührungssehne σ' von τ'_1 und τ_2 auf **g** den anderen Doppelpunkt **d'** ergeben.

In gleicher Weise bestimmt man mit Hilfe des Kreises **K'** die beiden Doppelpunkte $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}'_1$ der Involution $[\mathbf{BC},\ \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]$ auf $\mathbf{g}_1$.

Wie vorhergehend gezeigt wurde, sind die vier Geraden $\mathbf{d}\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}'\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}\mathbf{d}'_1$, $\mathbf{d}'\mathbf{d}'_1$ die Berührungssehnen der vier möglichen Kurven.

Wählen wir beispielsweise die Berührungssehne $\mathbf{d}\mathbf{d}'_1$, so bestimmt selbe auf $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ die Berührungspunkte $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ der einen Kurve, welch letztere nun aus den fünf Punkten **A**, **B**, **C**, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ mittels zweier projektivischen Büschel konstruiert werden kann.

§ 139.

Das geometrische Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen.

Wenden wir uns nun Betrachtungen zu, welche jenen in § 123 angestellten und den darauf folgenden dual gegenüberstehen.

Seien $\mathbf{r}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 \ldots .)$ und $\mathbf{r}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2 \ldots .)$ [Fig. 116, Taf. VI] irgend zwei projektivische Punktreihen. Da diese Reihen nicht speziell als perspektivisch vorausgesetzt sind, so werden die Verbindungsgeraden $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \ldots .$ ihrer entsprechenden Punkte nicht notwendig durch einen festen Punkt gehen. Diese Verbindungsgeraden folgen aber stetig aufeinander, da eine stetige Aufeinanderfolge der Punkte der beiden gegebenen Reihen statthat. Man kann demnach diese Verbindungsgeraden stets als Tangenten einer gewissen Kurve **K** betrachten.

Die letztbezeichnete Kurve pflegt man die „*Einhüllende*“ der Geraden $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots .$ oder im vorliegenden Falle das „*Erzeugnis*“ der beiden projektivischen Reihen $\mathbf{r}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 \ldots .)$ und $\mathbf{r}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2 \ldots .)$ zu nennen.

Die wesentlichen Eigenschaften dieser Kurve **K** können nun anstandslos aus den Eigenschaften projektivischer Gebilde abgeleitet werden.

Nehmen wir vor allem einen beliebigen Punkt **S** an, und projizieren wir von demselben die gegebenen Reihen durch die beiden konlokalen Strahlenbüschel $\mathbf{S}(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots)$ und $\mathbf{S}(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots)$, so werden diese letzteren entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Doppelstrahlen $\mathbf{S}\xi$ und $\mathbf{S}\eta$ besitzen.

Die Bedeutung dieser Doppelstrahlen für die Kurve **K** ist leicht erkennbar. Da nämlich der Doppelstrahl $\mathbf{S}\xi$ zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel $\mathbf{S}(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots)$ und $\mathbf{S}(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots)$ vereinigt, so wird er gleichzeitig zwei einander entsprechende Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ der beiden Reihen $\mathbf{r}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots)$ und $\mathbf{r}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots)$ projizieren, und daher eine Tangente der Kurve **K** repräsentieren. Das Gleiche gilt von dem zweiten Doppelstrahle $\mathbf{S}\eta$.

Hieraus ist zu ersehen, dass von jedem Punkte **S** an die Kurve **K** zwei reelle oder imaginäre Tangenten gezogen werden können, und dass dies stets die Doppelstrahlen jener konlokalen Büschel sind, welche von dem genannten Punkte aus die erzeugenden projektivischen Reihen projizieren.

Da man nun allgemein unter einer „Kurve **n**-ter Klasse“ eine solche versteht, an welche von jedem Punkte aus **n** Tangenten gezogen werden können, so folgt der Satz:

„Das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen ist eine Kurve zweiter Klasse.“

§ 140.

Dem Schnittpunkte der beiden Träger $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$, als Element $\mathbf{e}_1$ der Reihe $\mathbf{r}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots)$ betrachtet, entspricht in der anderen Reihe $\mathbf{r}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots)$ ein gewisses Element $\mathbf{e}_2$. Hieraus folgt unmittelbar, dass der Träger $\mathbf{r}_2$, da er mit der Verbindungsgeraden der zwei entsprechenden Punkte $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ zusammenfällt, selbst eine Tangente der Kurve **K** sei. Das Gleiche gilt selbstverständlich auch von dem Träger $\mathbf{r}_1$; denn derselbe ist gleichzeitig die Verbindungsgerade des im Schnitte beider Träger liegenden Punktes $\mathbf{f}_2$ der Reihe $\mathbf{r}_2(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2\ldots.)$ mit dem demselben entsprechenden Punkte $\mathbf{f}_1$ der Reihe $\mathbf{r}_1(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\ldots.)$.

Überdies lässt sich auch leicht nachweisen, dass die genannten zwei Punkte $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_1$ die Berührungspunkte der Träger $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_1$ mit der Kurve **K** sind.

Es ist nämlich bekannt, dass, wenn eine bewegliche Tangente irgend einer Kurve sich einer beliebigen festen Tangente dieser Kurve ohne Unterlass bis zum Zusammenfallen nähert, auch der Schnittpunkt der beweglichen Tangenten mit der festen Tangente sich unausgesetzt dem Berührungspunkte der letzteren nähert und endlich mit demselben zusammenfällt.

Dies ist auch hier der Fall. Betrachten wir die Tangente r_2 als fest und die Tangente $a_1 a_2$ als beweglich, so wird sich, sobald wir durch Lagenänderung die letztere der festen Tangente r_2 immer näher und näher bringen, ihr Schnittpunkt a_2 mit r_2 beständig dem Punkte e_2, und ihr Schnittpunkt a_1 mit r_1 beständig dem Schnitte e_1 von r_1 und r_2 nähern, ohne dass a_1 und a_2 in den verschiedenen Lagen aufhören würden entsprechende Punkte von r_1 und r_2 zu sein.

Fällt endlich die bewegliche Tangente mit r_2 zusammen, so gelangt a_1 nach e_1 und a_2 nach e_2. In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass f_1 der Berührungspunkt der Kurve K mit dem Träger r_1 sei. Es gilt mithin der Satz:

„Die Träger der beiden eine Kurve zweiter Klasse erzeugenden projektivischen Punktreihen sind selbst ebenfalls Tangenten der Kurve, und ihre Berührungspunkte sind jene, welche den im Schnittpunkte beider Träger vereinigten Punkten entsprechen.“

§ 141.

Obwohl zwei von den Tangenten einer Kurve zweiter Klasse gleichzeitig die Träger der erzeugenden Punktreihen sind, so unterscheiden sie sich doch nicht durch besondere Eigenschaften von den übrigen Tangenten, wie im Verlaufe der nachstehenden Betrachtungen klar werden wird.

Seien wieder r_1 und r_2 [Fig. 117, Taf. VI] die Träger zweier projektivischen, eine Kurve K zweiter Klasse erzeugenden Punktreihen, und a_1, a_2; m_1, m_2 und n_1, n_2 drei beliebige Paare entsprechender Punkte dieser Reihen, so dass $a_1 a_2$, $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$ als drei ganz beliebige Tangenten der Kurve K zu betrachten sind. Nebstbei ist die Projektivität der beiden Reihen durch die drei genannten Punktepaare festgestellt. Durch Vervollständigung der Reihen können somit beliebig viele anderweitige Kurventangenten konstruiert werden. Hierbei wollen wir folgendermassen verfahren.

Die Tangente $a_1 a_2$ wird von den Tangenten $n_1 n_2$ und $m_1 m_2$ beziehungsweise in den Punkten S_1 und S_2 getroffen. Projizieren wir von S_1 und S_2 die beiden projektivischen Reihen $r_1 (a_1 m_1 n_1 \ldots)$ und $r_2 (a_2 m_2 n_2 \ldots)$ durch die beiden projektivischen Strahlenbüschel $S_1 (a_1 m_1 n_1 \ldots)$ und $S_2 (a_2 m_2 n_2 \ldots)$, so werden diese, da die entsprechenden Strahlen $S_1 a_1$ und $S_2 a_2$ in der Geraden $S_1 S_2 = a_1 a_2$ vereinigt sind, überdies perspektivisch sein.

Die beiden einander entsprechenden Strahlen $S_1 m_1$ und $S_2 m_2$ schneiden sich in dem mit m_1 zusammenfallenden Punkte m des perspektivischen Durchschnittes r. Ein zweiter Punkt des letzteren ist der mit n_2 zusammenfallende Schnittpunkt n der einander entsprechenden Strahlen $S_1 n_1$ und $S_2 n_2$.

Die Projektivität der beiden Reihen r_1 und r_2 ist demnach vermittels der Projektionskette $r_1 S_1 r S_2 r_2$ konstruktiv hergestellt.

Nimmt man auf r einen beliebigen Punkt b an und projiziert denselben von S_1 aus nach b_1 auf r_1 und von S_2 aus nach b_2 auf r_2, so werden b_1 und b_2 zwei entsprechende Punkte von r_1 und r_2, und $b_1 b_2$ daher eine Tangente von K sein.

Wäre umgekehrt die Tangente $b_1 b_2$ von vornherein gegeben, so könnte man mit Hilfe der eben gefundenen geometrischen Beziehung die Tangente $a_1 a_2$ oder $S_1 S_2$ folgendermassen konstruieren.

Man würde auf $r = m_1 n_2$ einen beliebigen Punkt b annehmen, denselben von b_1 aus nach S_1 auf $n_1 n_2$ und von b_2 aus nach S_2 auf $m_1 m_2$ projizieren, um sodann in der Verbindungsgeraden $S_1 S_2$ eine Tangente der Kurve K zu erhalten.

Ein anderer beliebiger Punkt b' von r liefert, wenn man denselben von b_1 und b_2 aus beziehungsweise auf $n_1 n_2$ und $m_1 m_2$ nach S'_1 resp. S'_2 projiziert, wieder zwei Punkte, welche verbunden eine Kurventangente $S'_1 S'_2$ bestimmen.

Setzt man diese Konstruktion nach Belieben fort, so findet man, dass sich auf $n_1 n_2$ und $m_1 m_2$ zwei zur Reihe $r (b\, b'\, b'' \ldots)$ perspektivische, mithin zu einander projektivische Reihen $(S_1 S'_1 S''_1 \ldots.)$ und $(S_2 S'_2 S''_2 \ldots.)$ ergeben, und dass die Tangenten der Kurve K gleichzeitig die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser beiden Reihen sind.

Nachdem aber $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$ selbst zwei ganz beliebige Tangenten von K darstellen, so folgt der Satz:

„Die Punktreihen, welche sich im Schnitte zweier beliebigen Tangenten einer Kurve zweiter Klasse mit allen übrigen Tangenten dieser Kurve ergeben, sind stets projektivisch.“

§ 142.

Nachdem hiermit bewiesen ist, dass sich die Träger der erzeugenden Punktreihen von den übrigen Tangenten der Kurve durchaus nicht unterscheiden, so ist die geometrische Beziehung, welche sich im vorhergehenden Paragraphe zwischen den sechs Geraden r_1, r_2, a_1a_2, b_1b_2, m_1m_2 und n_1n_2 ergeben hat, als eine Beziehung zwischen sechs Tangenten einer Kurve zweiter Klasse überhaupt anzusehen.

Die besagte Beziehung besteht, wie wir gesehen haben, darin, dass die sich ergebenden Schnittpunkte m_1, b, und n_2 in einer und derselben Geraden liegen. Dieser Beziehung kann nun leicht eine in Worten ausdrückbare Form gegeben werden.

Aus den sechs Tangenten r_1, r_2, a_1a_2, b_1b_2, m_1m_2, n_1n_2 lassen sich bei beliebiger Reihenfolge verschiedene Sechsecke bilden. Wählen wir beispielsweise dasjenige Sechseck, in welchem die Seiten die Reihenfolge r_1, b_1b_2, r_2, n_1n_2, a_1a_2, m_1m_2 besitzen. Die aufeinander folgenden Eckpunkte dieses Sechseckes sind daher b_1, b_2, n_2, S_1, S_2, m_1.

Bezeichnet man die Verbindungsgeraden des ersten und vierten, des zweiten und fünften, des dritten und sechsten Eckpunktes eines Sechseckes als die „Hauptdiagonalen“ des letzteren, so findet man im vorliegenden Falle, dass die Geraden S_1b_1, S_2b_2 und m_1n_2 die Hauptdiagonalen sind, und weiter, dass sie sich in einem und demselben Punkte b schneiden. Es gilt demnach der von *Brianchon* herrührende Satz:

„Die Hauptdiagonalen eines einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen Sechseckes schneiden sich in einem und demselben Punkte.“

§ 143.

Die Gleichwertigkeit der Träger der eine Kurve zweiter Klasse erzeugenden Punktreihen mit den übrigen Tangenten der Kurve führt zu verschiedenen Bestimmungsarten der Kurve durch Elemente.

Vor allem ist einleuchtend, dass eine Kurve zweiter Klasse durch fünf Tangenten vollständig gegeben ist, indem man zwei derselben als Träger zweier projektivischen, die Kurve erzeugenden Punktreihen wählt, wobei gleichzeitig drei entsprechende Punktepaare der letzteren im Schnitte mit den drei übrigen Tangenten erhalten werden.

Ferner genügen zur Bestimmung einer solchen Kurve vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 und der Berührungspunkt einer derselben, beispielsweise etwa a_1 auf t_1.

Wählt man diesfalls t_1 und t_2 als Träger der erzeugenden Reihen, so entspricht (Satz in § 140) dem Berührungspunkte a_1 als Element der Reihe t_1 der Trägerschnittpunkt (t_1, t_2) als Element der Reihe t_2. Zwei weitere Paare entsprechender Punkte erhält man im Schnitte der Träger t_1 und t_2 mit den beiden noch übrigen Tangenten t_3 und t_4.

Endlich genügen zur Bestimmung einer Kurve zweiter Klasse auch drei Tangenten, t_1, t_2 und t_3 und die Berührungspunkte von zwei derselben, etwa a_1 auf t_1 und b_2 auf t_2.

In diesem Falle wird man t_1 und t_2 als Träger der erzeugenden Punktreihen annehmen. Dem Punkte a_1 als Element von t_1 entspricht auf t_2 der Trägerschnittpunkt; und dem Punkte b_2 als Element von t_2 entspricht umgekehrt auf t_1 der Trägerschnittpunkt. (Satz in § 140.) Ein drittes Paar entsprechender Punkte ergibt sich im Schnitte der Träger mit der Tangente t_3.

In allen drei Fällen erhält man die erzeugenden projektivischen Reihen durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt, so dass dieselben (nach § 113) anstandslos vervollständigt, und beliebig viele Tangenten der Kurve konstruiert werden können. Es besteht sonach der Satz:

„Eine Kurve zweiter Klasse ist vollständig bestimmt:

a) durch fünf ihrer Tangenten;

b) durch vier ihrer Tangenten und den Berührungspunkt der einen;

c) durch drei ihrer Tangenten und die Berührungspunkte zweier derselben.“

§ 144.

Der Brianchon'sche Satz in seiner Anwendung auf degenerierte umschriebene Sechsecke einer Kurve zweiter Klasse.

Nachdem der *Brianchon*'sche Satz (§ 142) auf rein projektivischen Beziehungen beruht, so ist derselbe von der Grösse der in einem einer Kurve zweiter Klasse umschriebenen Sechsecke vorkommenden Eckenwinkel ganz und gar unabhängig, und wird somit auch für den Grenzfall, dass einer oder mehrere dieser Winkel „gerade“ sind, gelten.

Denken wir uns beispielsweise fünf Tangenten einer Kurve zweiter Klasse, welche in irgend welcher Reihenfolge das der Kurve umschriebene Fünfeck **ABCDE** [Fig. 118, Taf. VII] bilden, und sei **F** der Berührungspunkt der einen Seite, allenfalls von **AE**.

Dem eben Gesagten zufolge kann man das Fünfeck mit Einschluss des Berührungspunktes **F** als ein der Kurve umschriebenes, „degeneriertes“ Sechseck **ABCDEF** auffassen, indem man die beiden im Berührungspunkte **F** zusammentreffenden Stücke **FA** und **FE** der Tangente **AE** als zwei einen „geraden“ Winkel bildende Polygonseiten, und den Berührungspunkt **F** selbst als den zugehörigen Eckpunkt betrachtet. Die drei Hauptdiagonalen **AD**, **BE** und **CF** müssen sich selbstverständlich (nach dem *Brianchon*'schen Satze) in einem und demselben Punkte **o** schneiden.

Hieraus folgt unmittelbar eine einfache Konstruktion des Berührungspunktes einer durch fünf Tangenten gegebenen Kurve zweiter Klasse mit einer dieser Tangenten.

§ 145.

Eine ungleich wichtigere Beziehung ergibt sich, wenn man aus vier Tangenten einer Kurve zweiter Klasse durch Hinzufügung zweier Berührungspunkte ein einer Kurve zweiter Klasse umschriebenes degeneriertes Sechseck bildet.

Seien $\mathbf{t_a}$, $\mathbf{t_b}$, $\mathbf{t_c}$, $\mathbf{t_d}$ [Fig. 119, Taf. VII] irgend vier Tangenten einer Kurve **K** zweiter Klasse und **A**, **B**, **C**, **D** deren Berührungspunkte.

Die Tangentenpaare ($\mathbf{t_a}$, $\mathbf{t_b}$); ($\mathbf{t_c}$, $\mathbf{t_d}$); ($\mathbf{t_a}$, $\mathbf{t_d}$); ($\mathbf{t_b}$, $\mathbf{t_c}$); ($\mathbf{t_b}$, $\mathbf{t_d}$) und ($\mathbf{t_a}$, $\mathbf{t_c}$) schneiden sich in den sechs Punkten **m**, **n**, **o**, **p**, **q**, **r**.

Aus den vier Tangenten können im Sinne der elementaren Geometrie drei verschiedene Vierecke gebildet werden und zwar:

a) Das konvexe Viereck **monp**, dessen Diagonalen **mn** und **op** sind;

b) das überschlagene Viereck **orpq**, dessen Diagonalen **op** und **qr** sind;

c) das Viereck **mqnr**, welches bei **m** einen einspringenden Winkel besitzt, und dessen Diagonalen **mn** und **qr** sind.

Wir wollen nun jedem dieser Vierecke einzeln unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

Fügen wir dem Viereck **monp** die Berührungspunkte zweier seiner Gegenseiten, etwa **A** und **C** zu, so erhalten wir ein dege-

neriertes Sechseck **mAonCp**, in welchem die Eckenwinkel bei **A** und **C** sogenannte „gerade“ Winkel sind.

Die Hauptdiagonalen **mn**, **op** und **AC** dieses degenerierten Sechseckes müssen sich nach dem *Brianchon*'schen Satze in einem und demselben Punkte **X** schneiden.

Ebenso hätte man gefunden, dass die Verbindungsgerade der Berührungspunkte **B** und **D** der beiden anderen Gegenseiten durch **X** geht.

Gleichzeitig finden wir, dass sich die Diagonalen **mn** und **op** des Viereckes **monp** in dem nämlichen Punkte **X** schneiden, wie die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte beider Paare von Gegenseiten des oberwähnten Viereckes.

Betrachten wir das überschlagene Viereck **orpq**, und vervollständigen dasselbe zu einem degenerierten Sechseck **oArpBq** (durch Hinzufügung der Berührungspunkte **A** und **B** zweier Gegenseiten), so werden sich die drei Hauptdiagonalen **op**, **qr** und **AB** in einem und demselben Punkte **Y** schneiden.

Würde man statt **A** und **B** die Berührungspunkte **C** und **D** der beiden anderen Gegenseiten wählen, so hätte man das degenerierte Sechseck **orCpqD**, dessen Hauptdiagonalen **op**, **qr** und **CD** wieder in **Y** zum Schnitte gelangen. In dem Vierecke **orpq** sind aber die Geraden **op** und **qr** die Diagonalen, und wir sehen auch hier, dass sie sich gleichfalls in dem nämlichen Punkte, wie die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte beider Gegenseitenpaare, treffen.

Ein gleiches Resultat erhalten wir endlich auch bezüglich des dritten Viereckes **mqnr**. Wir erhalten auch diesfalls zwei degenerierte Sechsecke **mqDnrA** und **mBqnCr**, je nachdem wir die Berührungspunkte **A**, **D** des einen, oder die Berührungspunkte **B**, **C** des anderen Gegenseitenpaares hinzufügen. Im ersten Falle erhält man die drei Hauptdiagonalen **mn**, **qr**, **AD**, die sich in einem Punkte **Z** schneiden, und im zweiten Falle die drei Hauptdiagonalen **mn**, **qr**, **BC**, deren Schnitt ebenfalls in **Z** erfolgt. Es gilt sonach der Satz:

„Bildet man aus irgend vier Tangenten einer Kurve zweiter Klasse in beliebiger Reihenfolge ein Viereck, so schneiden sich die Diagonalen desselben und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte beider Gegenseitenpaare des Viereckes in einem und demselben Punkte.“

Eine andere Form lässt sich diesem Satze geben, sobald man

die vier Tangenten t_a, t_b, t_c, t_d [Fig. 119, Taf. VII] als Seiten eines vollständigen Vierseites, und ihre vier Berührungspunkte **A**, **B**, **C**, **D** als die Eckpunkte eines vollständigen Viereckes betrachtet. In diesem Falle sind nämlich **m** und **n**, **o** und **p**, **q** und **r** die Gegeneckpunkte des vollständigen Vierseites; die drei Diagonalen **mn**, **op** und **qr** bestimmen das Diagonaldreieck **XYZ**.

Im vollständigen Viereck (**ABCD**) sind **AB** und **CD**; **AC** und **BD**; **AD** und **BC** die Gegenseitenpaare; dieselben bestimmen ebenfalls das Diagonaldreieck **XYZ**. Es besteht demnach der Satz:

„Das von vier beliebigen Tangenten einer Kurve zweiter Klasse gebildete vollständige Vierseit, und das durch die vier Berührungspunkte dieser Tangenten bestimmte vollständige Viereck besitzen ein gemeinschaftliches Diagonaldreieck.“

Zur Orientierung über die Anordnung der einzelnen Teile d Figur dient noch der folgende mit dem vorstehenden Satze im wesentlichen übereinstimmende Satz:

„Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte irgend zweier von vier Tangenten an eine Kurve zweiter Klasse geht stets durch einen Eckpunkt des Diagonaldreieckes des von den vier Tangenten bestimmten vollständigen Vierseites, und zwar durch jenen Diagonaleckpunkt, dessen gegenüberliegende Diagonalseite die Verbindungsgerade der auf den beiden Tangenten liegenden Gegeneckpunkte des Vierseites repräsentiert.“

§ 146.

Ist **abc** [Fig. 120, Taf. VII] ein von drei Tangenten einer Kurve **K** zweiter Klasse gebildetes Dreieck, und sind **A**, **B**, **C** die Berührungspunkte der Seiten **bc**, **ca** und **ab**, so kann man das Gebilde als ein degeneriertes umschriebenes Sechseck **aCbAcB** auffassen, in welchem die drei Eckenwinkel bei **A**, **B** und **C** „gerade“ sind.

Nach dem *Brianchon*'schen Satze schneiden sich auch hier die drei Hauptdiagonalen **aA**, **bB** und **cC** in einem und demselben Punkte **o**; es gilt folglich der Satz:

„Die Verbindungsgeraden der Eckpunkte eines einer Kurve zweiter Klasse umschriebenen Dreieckes mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Dreieckseiten schneiden sich in einem und demselben Punkte.“

§ 147.

Im Verlaufe der angestellten Betrachtungen gelangten wir zu dem merkwürdigen Resultate, dass es gewisse Eigenschaften (siehe Sätze in § 129 und § 145) gäbe, welche in genau gleicher Form sowohl für eine Kurve zweiter Ordnung, als auch für eine Kurve zweiter Klasse gelten.

Diese Übereinstimmung lässt vermuten, dass die beiden Kurvenarten überhaupt voneinander nicht verschieden seien. Dass besagte Vermutung ihre thatsächliche Berechtigung habe, lässt sich auf Grund der angeführten Sätze auch ohne Schwierigkeit beweisen. Zuvor möge jedoch noch eine Hilfseigenschaft abgeleitet werden.

Sei **abc** [Fig. 121, Taf. VII] ein beliebiges Dreieck. Verbinden wir dessen Ecken mit einem willkürlich gewählten Punkte **S**, und bringen die Verbindungsgeraden **aS**, **bS** und **cS** mit den Seiten **bc**, **ca** und **ab** beziehungsweise in **A**, **B** und **C** zum Schnitte, so können (Satz in § 146) die benannten Dreieckseiten als Tangenten einer Kurve zweiter Klasse und die Punkte **A**, **B**, **C** als deren Berührungspunkte betrachtet werden.

Nun haben wir aber zwei Dreiecke **abc** und **ABC**, deren Eckpunkte auf drei durch einen und denselben Punkt **S** gehenden Strahlen liegen. Es müssen sich daher die Dreieckseiten **ab** und **AB**; **bc** und **BC**; **ca** und **CA** (nach dem ersten Fundamentalsatze, § 91) in drei Punkten γ, α und β einer und derselben Geraden **s** schneiden.

Mit Rücksichtnahme auf vorausgeschickte Erörterungen (Satz in § 130) können aber die Dreieckseiten **ab**, **bc**, **ca** auch als Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung, und **C**, **A**, **B** als deren bezügliche Berührungspunkte angesehen werden.

Hiernach werden also stets drei Tangenten einer Kurve zweiter Klasse und die drei Berührungspunkte derselben auch als drei Tangenten mit den betreffenden Berührungspunkten für eine Kurve zweiter Ordnung betrachtet werden können.

Denken wir uns nun auf irgend eine Art eine Kurve **K** [Fig. 122, Taf. VII] der zweiten Klasse konstruiert, und seien $\mathbf{t_a}$, $\mathbf{t_b}$, $\mathbf{t_c}$ drei beliebige Tangenten sowie **A**, **B** und **C** die bezüglichen Berührungspunkte derselben.

Wie soeben gezeigt wurde, können $\mathbf{t_a}$, $\mathbf{t_b}$, $\mathbf{t_c}$ auch als Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung, und **A**, **B**, **C** als die ent-

sprechenden Berührungspunkte derselben betrachtet werden. Diese Kurve, welche wir zum Unterschiede von der früheren mit K' bezeichnen wollen, könnte (nach den in § 127 aufgestellten Satz, alinea c) anstandslos projektivisch entwickelt resp. konstruiert werden; hier jedoch werde folgende Konstruktion durchgeführt.

Wir verbinden zunächst B mit C durch eine Gerade BC, und bezeichnen den Schnitt von t_a und t_b mit S_1; den Schnitt von t_a und t_c mit S_2. Ein beliebiger Punkt x von BC mit S_1 und S_2 verbunden ergibt zwei Geraden, welche t_c und t_b beziehungsweise in x_1 und x_2 schneiden. Weiter verbinden wir x_1 und x_2 durch die Gerade t_x und bringen diese mit der Geraden Ax im Punkte X zum Schnitte.

Offenbar ist nun t_x (Satz 1, in § 145) eine Tangente der Kurve K zweiter Klasse und X der zugehörige Berührungspunkt. Nach dem ersten Satze in § 129 ist aber t_x auch eine Tangente der Kurve K' zweiter Ordnung und X der entsprechende Berührungspunkt derselben.

Derartige Tangenten nebst ihren zugehörigen Berührungspunkten für beide Kurven K und K' können aber, wenn man dem Punkte x nach und nach alle möglichen Lagen x', x" ... auf der Geraden BC gibt, in gleicher Weise wie t_x und X unendlich viele konstruiert werden; woraus folgt, dass die Kurve K' Punkt für Punkt und Tangente für Tangente mit der Kurve K zusammenfällt. Es gilt sonach der Satz:

„Jede Kurve zweiter Klasse ist gleichzeitig eine Kurve zweiter Ordnung und umgekehrt."

Da man allgemein eine Kurve, welche gleichzeitig von der n-ten Ordnung und der n-ten Klasse ist, als Kurve „n-ten Grades" bezeichnet, so werden wir von nun an auch die Erzeugnisse projektivischer Punktreihen und projektivischer Strahlenbüschel *„Kurven zweiten Grades"* nennen.

Die vorhergehenden Betrachtungen liefern noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der Kurven zweiten Grades.

Denkt man sich nämlich in der That einige der vorerwähnten Tangenten t_x, t'_x, t''_x ... [Fig. 122, Taf. VII] der Kurve K durch Annahme verschiedener Punkte x, x', x" ... auf BC bestimmt, so findet man ohne weiteres, dass einerseits die Punktreihe x_1, x'_1, x''_1 ..., welche diese Tangenten auf der festen Tangente t_c bestimmen, mit der Reihe x, x', x" ... auf BC perspektvisch sei (S_1 das zugehörige Projektionscentrum).

Weiter ist aber auch das Strahlenbüschel $A(X X' X'' \ldots)$, welches aus dem Kurvenpunkte A die Berührungspunkte X, X', X'', ... der Tangenten t_x, t'_x, t''_x ... projiziert, mit der Reihe x, x', x'' ... perspektivisch, mithin mit der Reihe x_1, x'_1, x''_1 ... auf t_c projektivisch. Berücksichtigt man schliesslich, dass A ein beliebiger Punkt und t_c eine beliebige Tangente der Kurve K ist, so erhält man den Satz:

„Die Punktreihe, welche eine veränderliche Tangente einer Kurve zweiten Grades auf einer festen Tangente der besagten Kurve bestimmt, und das Strahlenbüschel, welches den Berührungspunkt der veränderlichen Tangente von einem beliebigen Kurvenpunkte aus projiziert, sind stets projektivisch.“

§ 148.

Seien t_1, t_2, t_3 und t_4 [Fig. 123, Taf. VII] vier beliebige Tangenten einer Kurve K zweiten Grades.

Von einem beliebigen Punkte S seien die Strahlen $S\alpha_1$, $S\beta_1$, $S\beta_2$, $S\alpha_2$ nach den Eckpunkten a_1, b_1, a_2, b_2 des von den vier Tangenten gebildeten Viereckes, sowie auch die Tangenten τ_1 und τ_2 an die Kurve gezogen. Die beiden Tangenten t_1 und t_2 werden von den vier Tangenten t_3, t_4, τ_1 und τ_2 in zwei projektivischen Würfen:

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) \quad \text{und} \quad (a_2 b_2 c_2 d_2)$$

(Satz in § 141) geschnitten; es sind mithin auch die diese Würfe von S aus projizierenden Strahlenwürfe:

$$S(a_1 b_1 c_1 d_1) = S(\alpha_1 \beta_1 \tau_1 \tau_2) \text{ und } S(a_2 b_2 c_2 d_2) = S(\beta_2 \alpha_2 \tau_1 \tau_2)$$

zu einander projektivisch. Gleichzeitig ist aber auch der Strahlenwurf $S(\beta_2 \alpha_2 \tau_1 \tau_2)$ mit dem Strahlenwurfe $S(\alpha_2 \beta_2 \tau_2 \tau_1)$ projektivisch (Satz in § 117), woraus folgt, dass:

$$S(\alpha_1 \beta_1 \tau_1 \tau_2) \; \pi \; S(\alpha_2 \beta_2 \tau_2 \tau_1).$$

Betrachtet man also die drei Strahlenpaare α_1, α_2; β_1, β_2 und τ_1, τ_2 als Bestimmungsstrahlen zweier projektivischen konlokalen Strahlenbüschel, so sind die beiden einander entsprechenden Strahlen τ_1 und τ_2 auch nach ihrer Vertauschung entsprechend; die beiden Büschel sind daher (nach § 119) zu einer Involution vereinigt.

Beachtet man weiter, dass die einander entsprechenden Strahlen α_1 und α_2; β_1 und β_2 nach den Gegeneckenpaaren a_1, b_2; b_1, a_2 des von den vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 gebildeten vollständigen Vierseites gehen, so ergibt sich unter gleichzeitiger Berücksich-

tigung des zweiten Satzes in § 122 der nachstehende, dem *Desargues*'schen Satze (§ 133) dual gegenüberstehende Satz:

„Das von einem beliebigen Punkte an eine Kurve zweiten Grades gezogene Tangentenpaar und die drei Paare von Strahlen, welche von demselben Punkte aus nach den drei Gegeneckenpaaren eines durch irgend vier Tangenten der Kurve gebildeten vollständigen Vierseits gehen, sind vier Paare konjugierter Strahlen einer Involution."

§ 149.

Gehört der im Vorhergehenden mit **S** [Fig. 123, Taf. VII] bezeichnete Punkt speziell der Kurve **K** zweiten Grades an, so fallen die von ihm aus an die Kurve gezogenen Tangenten in eine und dieselbe Gerade, d. i. in die ihm als Berührungspunkt entsprechende Kurventangente $\mathbf{t_s}$, zusammen.

Bilden sodann irgend vier weitere Tangenten der Kurve **K** ein vollständiges Vierseit, so sind nach dem vorstehenden Satze die drei Strahlenpaare, welche von **S** nach den drei Gegeneckenpaaren gezogen werden, drei Paare konjugierter Strahlen einer Involution, und die Tangente $\mathbf{t_s}$ ist der eine Doppelstrahl der letzteren.

Sind demnach von einer Kurve zweiten Grades irgend vier Tangenten $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$, $\mathbf{t_4}$ und ein ihr angehörender Punkt **S** bekannt, so kann die Tangente der Kurve im letztbezeichneten Punkte leicht bestimmt werden. Dieselbe wird dem eben Gesagten zufolge durch den einen oder den anderen Doppelstrahl jenes involutorischen Büschels **S** dargestellt erscheinen, von dem man konjugierte Strahlenpaare als solche erhält, welche von **S** nach den Gegeneckenpaaren des vollständigen Vierseites $(\mathbf{t_1 t_2 t_3 t_4})$ gehen.

Die beiden Doppelstrahlen können, wie vorher in § 136 besprochen, leicht konstruiert werden. Jeder derselben bestimmt mit den vier übrigen Tangenten (Satz in § 143, alinea a) eine den gestellten Bedingungen entsprechende Kurve zweiten Grades. Es besteht hiermit der Satz:

„Durch vier Tangenten und einen Punkt sind stets zwei (reelle oder imaginäre) Kurven zweiten Grades bestimmt; die Tangenten derselben in dem gegebenen Punkte sind die Doppelstrahlen jener Involution, welche die von diesem Punkte nach den Gegeneckenpaaren des von den vier gegebenen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseites gezogenen Strahlenpaare bestimmen."

§ 150.

Nachdem der in § 148 angeführte Satz keine besonderen Bedingungen bezüglich des von den vier Tangenten gebildeten Vierseites stellt, so wird er auch für den Fall jenes degenerierten Vierseites gelten, in welchem die vier Tangenten durch zwei Tangenten und deren Berührungspunkte ersetzt sind.

Sind **AC** und **BC** [Fig. 124, Taf. VII] zwei, eine Kurve **K** zweiten Grades beziehungsweise in **A** und **B** berührende und sich in **C** schneidende Tangenten, und zählen wir **C** doppelt, also als **C** und **D**, so ist das Gebilde **CADB** — als Grenzfall eines Viereckes mit einspringendem Winkel, — ein degeneriertes umschriebenes Viereck. In diesem Falle sind **A** und **B** zwei Gegenecken, während **C** und **D** zwei zusammenfallende Gegenecken repräsentieren.

Zieht man von einem beliebigen Punkte **S** aus die Tangenten τ_1 und τ_2 an die Kurve, ferner von dem nämlichen Punkte **S** die Strahlen σ und σ_1 nach **A** und **B**, so bestimmen dieselben als konjugierte Strahlen eine Involution, in welcher auch die nach **C** und **D** gezogenen Strahlen σ_2 und σ_3 (Satz in § 148) konjugiert sind. Da die letzteren Strahlen überdies zusammenfallen, werden dieselben einen Doppelstrahl der Involution vorstellen. Mithin besteht der Satz:

„Der von einem beliebigen Punkte nach dem Schnittpunkte irgend zweier Tangenten einer Kurve zweiten Grades gezogene Strahl ist stets der eine Doppelstrahl jener Involution, welche durch die beiden von dem genannten Punkte nach den Berührungspunkten jener Tangenten gezogenen Strahlen, und durch die von diesem Punkte ausgehenden Kurventangenten, als zwei Paare konjugierter Strahlen, bestimmt ist.“

Ist überdies der Punkt **S** nicht allgemein gegeben, sondern ist derselbe ein Punkt **S'** der Kurve **K** selbst, so sind auch die von ihm ausgehenden Kurventangenten in einer und derselben Tangente **t** vereinigt.

Es sind sodann **S'A** und **S'B** zwei konjugierte Strahlen jener Involution, deren Doppelstrahlen durch **t** und **S'C** $= (\sigma'_2, \sigma'_3)$ dargestellt sind. Berücksichtigt man weiter, dass (nach Satz in § 120) die Strahlen **S'A** $= \sigma'$ und **S'B** $= \sigma'_1$ durch die Strahlen **t** und **S'C** harmonisch getrennt sind, so folgt der Satz:

„Die Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte einer Kurve zweiten Grades nach zwei anderen Kurvenpunkten gezogen werden, sind durch die Tangente des erstgenannten Kurvenpunktes, und durch den vom letzteren nach dem Schnittpunkte der Tangenten der beiden anderen Kurvenpunkte gehenden Strahl harmonisch getrennt.“

§ 151.

Auf Grund des ersten im vorhergehenden Paragraph aufgestellten Satzes kann eine Kurve zweiten Grades auch bestimmt werden, wenn drei Tangenten t_1, t_2 und t_3 und zwei Kurvenpunkte **A** und **B** derselben gegeben sind. Die Bestimmung der besagten Kurve kann dadurch vollzogen werden, dass man die Kurventangenten t_a und t_b in den bezüglichen Punkten **A** und **B** konstruiert.

Zieht man nämlich von dem Schnittpunkte **S** der beiden Tangenten t_1 und t_2 nach **A** und **B** Strahlen, so sind t_1 und t_2, **SA** und **SB** zwei Paare konjugierter Strahlen einer Involution; bestimmt man ferner auf irgend eine Art (etwa wie in § 136) die Doppelstrahlen δ und δ' der letzteren, so ist mit Zugrundelegung des vorher angeführten Satzes sichergestellt, dass der noch unbekannte Schnittpunkt **C** der Tangenten t_a und t_b auf einem dieser Doppelstrahlen liegen müsse.

Ebenso erhält man in der Involution t_1, t_3 und S_1A, S_1B, welche den Punkt $S_1 = (t_1, t_3)$ zum Scheitel hat, zwei Doppelstrahlen δ_1 und δ'_1, welche die nämliche Eigenschaft besitzen. Der gesuchte Punkt **C** kann daher die vier Lagen (δ, δ_1), (δ, δ'_1), (δ', δ_1), (δ', δ'_1) annehmen. Wir erhalten mithin den Satz:

„Durch drei Tangenten und zwei Punkte sind stets vier (reelle oder imaginäre) Kurven zweiten Grades bestimmt.“

§ 152.

Pol und Polare.

Wenn sich von einem Punkte **S** [Fig. 114, Taf. VI] zwei Tangenten T_a und T_b an eine Kurve **K** zweiten Grades ziehen lassen (wir nennen diesfalls den Punkt **S** „ausserhalb“ der Kurve **K** liegend), so trifft jeder durch **S** gezogene Strahl die Kurve **K** in einem Punktepaar m_1, m_2, welches (Satz 2 in § 137) durch den Punkt **S** und durch den Schnittpunkt **n** des Strahles mit der

den beiden Tangenten T_a und T_b entsprechenden Berührungssehne **AB** harmonisch getrennt ist.

Zwei derartige Punkte, wie diesfalls **S** und **n**, welche durch die Punkte m_1 und m_2, in welchen ihr Verbindungsstrahl **Sn** irgend eine Kurve **K** zweiten Grades schneidet, harmonisch getrennt sind, pflegt man *„zwei konjugierte Punkte in bezug auf die Kurve* **K**“ zu nennen.

Der oben angeführte Satz 2 in § 137 sagt daher aus, dass der geometrische Ort aller Punkte, welche mit dem Punkte **S** in bezug auf die Kurve **K** konjugiert sind, durch die Berührungssehne **AB** der von **S** aus an **K** gezogenen Tangenten T_a und T_b repräsentiert werde, also kurz, eine Gerade sei.

Man kann jedoch leicht zeigen, dass auch in dem Falle, in welchem ein Punkt **S** innerhalb einer Kurve **K** zweiten Grades liegt, also von demselben keine reellen Tangenten an die Kurve gezogen werden können, der geometrische Ort der mit diesem Punkte in bezug auf die Kurve **K** konjugierten Punkte eine gerade Linie ist.

Nehmen wir zu diesem Zweck an, es sei **P** [Fig. 125, Taf. VII] der innerhalb der Kurve **K** zweiten Grades liegende Punkt.

Wir ziehen durch **P** zwei beliebige Geraden, von welchen die eine die Kurve in den Punkten **A** und **B**, die andere aber in **C** und **D** treffen möge. Die vier Punkte **A**, **B**, **C**, **D** bestimmen ein vollständiges Viereck. Zwei Gegenseiten **AB** und **CD** schneiden sich in **P**; die beiden Gegenseiten **AD** und **BC** in **m**, und die beiden Gegenseiten **AC** und **BD** in **n**. Die Diagonale **p**, welche die beiden Punkte **m** und **n** verbindet, trifft die Geraden **AB** und **CD** beziehungsweise in den Punkten π und π'. Es sind nun (nach § 96) **A**, **B** durch **P**, π und **C**, **D** durch **P** und π' harmonisch getrennt.

Auf der Geraden **p** liegt aber (Satz 1 in § 129) auch der Schnittpunkt **u** der Tangenten t_a und t_b in den Punkten **A** und **B**, und weiter auch der Schnittpunkt **v** der Tangenten t_c und t_d in den Kurvenpunkten **C** und **D**.

Hieraus ist unmittelbar zu entnehmen, dass zur Konstruktion der Geraden **p** der Strahl **CD** ganz und gar überflüssig sei, und die Annahme des Strahles **AB** vollkommen genüge. Denn einen Punkt von **p** erhält man als denjenigen Punkt π, welcher mit **P** das Punktepaar **A**, **B** harmonisch trennt, und einen zweiten Punkt **u** findet man im Schnitte der Tangenten t_a und t_b in **A** und **B**.

Hieraus folgt weiter, dass, wie auch die zweite Gerade **CD** durch **P** gezogen werden mag, einerseits der Punkt π' derselben, welcher mit **P** das Punktepaar **C**, **D** harmonisch trennt, und anderseits der Schnittpunkt **v** der Tangenten in **C** und **D** nur auf der vorher gefundenen Geraden **p** liegen kann.

Da in dieser Betrachtung der Umstand, ob von **P** aus Tangenten an **K** geführt werden können oder nicht, gar nicht in betracht kam, so ist hiermit ganz allgemein für jeden Punkt **P** nachgewiesen, dass der geometrische Ort aller mit **P** in bezug auf die Kurve **K** konjugierter Punkte eine Gerade (**p**) ist. Es gilt daher der Satz:

„Der geometrische Ort aller mit einem beliebigen festen Punkte in bezug auf eine Kurve zweiten Grades konjugierten Punkte ist stets eine gerade Linie. Liegt der feste Punkt ausserhalb der Kurve, so ist die genannte gerade Linie identisch mit der Berührungssehne der von diesem Punkte aus an die Kurve gezogenen Tangenten.“

Die Gerade **p** wird als die *„Polare“* des Punktes **P**, und der letztere als der *„Pol“* der Geraden **p** *„in bezug auf die Kurve* **K**“ bezeichnet.

Die vorher gefundene Eigenschaft, dass stets auch der Schnittpunkt **v** der in den Punkten **C** und **D** an die Kurve **K** geführten Tangenten auf der Geraden **p** liegen muss, liefert den Satz:

„Die Schnittpunkte der Tangentenpaare in den Endpunkten aller durch einen festen Punkt gezogenen Sehnen einer Kurve zweiten Grades liegen auf der Polare dieses Punktes.“

§ 153.

Aus der Definition von Pol und Polare folgt ohne weiteres, dass, sobald zwei Punkte P_1 und P_2 in bezug auf eine Kurve **K** zweiten Grades konjugiert sind, die Polare des ersten Punktes durch den zweiten, und umgekehrt, gehen müsse.

Hierauf gründen sich einige bemerkenswerte Sätze.

Seien nämlich P_1 und P_2 irgend zwei Punkte, und p_1 und p_2 deren Polaren in bezug auf eine Kurve **K** zweiten Grades. Der Schnittpunkt P_3 von p_1 und p_2 ist konjugiert mit P_1, da er auf der Polare p_1 von P_1 liegt, und konjugiert mit P_2, da er auch der Polare p_2 des Punktes P_2 angehört.

Die Polare p_3 des Punktes P_3 kann daher nur diejenige Gerade sein, welche P_1 mit P_2 verbindet. Mithin besteht der Satz:

„Die Verbindungsgerade zweier Punkte ist stets die Polare des Schnittpunktes der Polaren jener beiden Punkte.“

Aus der Definition von Pol und Polare geht hervor, dass jedem Punkte in der Ebene einer Kurve zweiten Grades eine Polare entspricht, und dem eben bewiesenen Satze ist zu entnehmen, dass umgekehrt auch jeder Geraden der Ebene ein Pol in bezug auf die Kurve zweiten Grades entsprechen muss. Denkt man sich nämlich zu zwei beliebigen Punkten der angenommenen Geraden die Polaren bestimmt, so schneiden sich dieselben thatsächlich in einem Punkte, und dieser ist, dem angeführten Satze zufolge, der Pol jener Geraden.

Dem letztbewiesenen Satze kann auch noch eine andere Form gegeben werden. Da nämlich ein Punkt **P** mit jedem Punkte seiner Polare **p** konjugiert ist, so wird auch die Polare jedes Punktes von **p** durch **P** gehen, oder mit anderen Worten:

„Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich dessen Polare in bezug auf eine Kurve zweiten Grades um den Pol jener Geraden.“

Und umgekehrt.

„Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft ihr Pol die Polare dieses Punktes.“

§ 154.

Da die Polare eines ausserhalb einer Kurve zweiten Grades liegenden Punktes gleichzeitig die Berührungssehne der von dem Punkte aus an die Kurve gezogenen Tangenten vorstellt, so sind auf derselben zwei Stücke zu unterscheiden, nämlich jenes Stück, welches die eigentliche Berührungssehne repräsentiert und dessen Punkte sämtlich innerhalb der Kurve liegen, und jenes Stück, dessen Punkte sämtlich ausserhalb der Kurve liegen.

Verbindet man den Pol mit einem beliebigen Punkte des ersten Teiles, so erhält man einen Strahl, welcher die Kurve stets in zwei reellen Punkten schneidet; verbindet man hingegen den Pol mit einem Punkte des zweiten Teiles, d. h. mit einem ebenfalls ausserhalb der Kurve liegenden Punkte seiner Polare, so erhält man einen Strahl, welcher die Kurve nicht mehr in reellen Punkten schneiden kann. Der betreffende Punkt der Polare und der Pol sind sodann als durch ein imaginäres Punktepaar der Kurve harmonisch getrennt anzusehen.

Liegt hingegen der Pol innerhalb der Kurve, so kann

seine Polare nur ausserhalb der Kurve liegen. Denn würde dieselbe teilweise innerhalb liegen, so müsste sie die Kurve in zwei reellen Punkten schneiden, deren Tangenten im Schnitte, entgegen der gemachten Annahme, einen ausserhalb liegenden Pol der betreffenden Geraden bestimmen würden.

Es erübrigt noch die Diskussion jenes Falles, wenn der Pol **P** weder ausserhalb noch innerhalb der Kurve liegt, also der Kurve selbst angehört.

Es ist leicht einzusehen, dass in diesem Falle seine Polare mit der Tangente **t** in dem Pole identisch ist, da diese Tangente — infolge einer Grenzbetrachtung — gleichzeitig als die Berührungssehne der von **P** aus geführten Kurventangenten betrachtet werden kann. Auch liefert nachstehende Uberlegung dasselbe Resultat.

Nehmen wir auf der Tangente **t** einen beliebigen Punkt an, so wird dessen Polare notwendig durch den Berührungspunkt **P** gehen. Gestützt auf den ersten Satz in § 153 folgt sodann unmittelbar, dass der Berührungspunkt der Pol seiner Tangente **t** ist. Daher besteht der Satz:

„Die Polare eines Punktes einer Kurve zweiten Grades ist identisch mit der ihm entsprechenden Kurventangente.“

Auf Grundlage der Definition der Polare „als Ort der mit dem Pole konjugierten Punkte“, ergibt sich weiter:

„Ein Punkt einer Kurve zweiten Grades ist mit jedem Punkte seiner Tangente und speziell auch mit sich selbst konjugiert.“

§ 155.

Besitzen zwei Strahlen in der Ebene einer Kurve zweiten Grades eine solche Lage, dass sie durch die von ihrem Schnittpunkte aus an die Kurve gezogenen (reellen oder imaginären) Tangenten harmonisch getrennt werden, so bezeichnen wir dieselben als *„konjugierte Strahlen“* oder *„konjugierte Polaren“* in bezug auf diese Kurve.

Ist **K** [Fig. 125, Taf. VII] eine beliebige Kurve zweiten Grades, und **pp** ein in der Ebene der Kurve liegender Strahl, so gibt es unendlich viele Strahlen, welche mit dem Strahle **p** in bezug auf **K** konjugiert sind.

Einen beliebigen derartigen Strahl kann man sofort konstruieren, wenn man auf **p** einen beliebigen Punkt **u** wählt, von

diesem die Kurventangenten t_a und t_b zieht, und jenen Strahl p_1 ermittelt, welcher mit **p** durch t_a und t_b harmonisch getrennt wird.

Berücksichtigt man hierbei, dass (nach dem zweiten Satze des § 152) die Berührungssehne **AB** der beiden Tangenten t_a und t_b durch den Pol **P** des Strahles **p** geht, und dass sie infolgedessen die Polare resp. den Strahl **p** in einen Punkte π schneidet, welcher mit **P** das Punktepaar **A, B** harmonisch trennt, so ist einleuchtend, dass der von **u** nach **P** gezogene Strahl p_1 eben derjenige Strahl sein wird, welcher mit **p** das Tangentenpaar t_a, t_b harmonisch scheidet, also mit **p** konjugiert ist. Die Annahme eines beliebigen anderen Punktes u_1 auf **p** liefert das gleiche Resultat. Man gelangt hiernach zu dem Satze:

„Sämtliche Strahlen, welche mit einem festen Strahle in bezug auf eine Kurve zweiten Grades konjugiert sind, gehen durch den Pol des festen Strahles.“

Diesem Satze gemäss können irgend zwei in bezug auf eine Kurve zweiten Grades konjugierte Strahlen auch in der Weise aufgefasst werden, dass der eine durch den Pol des anderen geht. Ist demnach **t** eine Tangente einer Kurve **K** zweiten Grades, so wird (Satz 1 in § 154) ihr Berührungspunkt **P** gleichzeitig ihr Pol, und mithin jede durch **P** gehende Gerade mit der Tangente **t** konjugiert sein. Es besteht daher der Satz:

„Eine Tangente einer Kurve zweiten Grades ist mit jeder durch ihren Berührungspunkt gehenden Geraden, und speziell auch mit sich selbst konjugiert.“

§ 156.

Sei **K** [Fig. 126] irgend eine beliebige Kurve zweiten Grades und **pp** eine Gerade, welche mit derselben die Punkte **d** und **d'** gemein haben möge. Sind weiter a_1 und a_2 irgend ein Paar auf der Geraden **p** liegender in bezug auf die Kurve **K** konjugierter Punkte, so müssen dieselben (der Definition gemäss) durch die beiden Punkte **d** und **d'** (selbst auch dann, wenn **d** und **d'** imaginär sind) harmonisch getrennt erscheinen. Das Gleiche gilt von jedem anderen Paare konjugierter Punkte auf der Geraden **p**, so dass (nach Satz 3 in § 120) auch der folgende Satz seine Berechtigung hat:

„Sämtliche, auf einer und derselben Geraden liegenden Paare,

in bezug auf eine Kurve zweiten Grades konjugierter Punkte, bilden eine involutorische Punktreihe, deren (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte die Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve sind.“

Diese Involution nennt man die *„Polarinvolution auf der Geraden“* (p) oder kurz eine *„polarinvolutorische Punktreihe.“*

§ 157.

Denken wir uns andererseits (dual) in der Ebene irgend einer Kurve **K** zweiter Ordnung einen beliebigen Punkt **S** [Fig. 126, Taf. VII] angenommen. Die reellen oder imaginären von **S** aus an die Kurve **K** gezogenen Tangenten seien δ und δ'. Sind weiter α_1 und α_2 irgend zwei durch **S** gehende in bezug auf **K** konjugierte Strahlen, so müssen dieselben (nach der in § 155 gegebenen Definition) durch die Tangenten δ und δ' harmonisch getrennt werden. Die gleiche Eigenschaft besitzt selbstverständlich auch jedes andere durch **S** gehende Paar konjugierter Strahlen, so dass (mit Rücksicht auf Satz 2 in § 120) auch der Satz besteht:

„Sämtliche, durch den nämlichen Punkt gehenden Paare, in bezug auf eine Kurve zweiten Grades konjugierter Strahlen, bilden ein involutorisches Strahlenbüschel, dessen (reelle oder imaginäre) Doppelstrahlen die von dem genannten Punkte auslaufenden Kurventangenten sind.“

Ein solches involutorisches Büschel heisst ein *„polarinvolutorisches Strahlenbüschel.“*

§ 158.

Es sei **K** [Fig. 126, Taf. VII] eine beliebige Kurve zweiten Grades, **p** irgend eine Gerade und **S** der Pol der letzteren in bezug auf **K**.

Die Polare α_2 irgend eines Punktes der Geraden **p** geht (Satz 2, § 153) durch den Punkt **S**. Nachdem ferner der Punkt $\mathbf{a}_1$ mit jedem Punkte seiner Polare α_2 konjugiert ist, so folgt, dass auch der Punkt $\mathbf{a}_2$, in welchem α_2 die Gerade **p** trifft, mit $\mathbf{a}_1$ in bezug auf **K** konjugiert sei. Die Polare β_2 irgend eines anderen Punktes $\mathbf{b}_1$ von **p** wird ebenfalls durch **S** und durch jenen Punkt $\mathbf{b}_2$ der Geraden **p** gehen, welcher mit $\mathbf{b}_1$ konjugiert ist.

Denkt man sich dies für alle Punkte $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, ... von **p** fortgesetzt, so erhält man zwei Punktreihen ($\mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{c}_1\,\ldots$) und

($a_2 b_2 c_2 \ldots$.) auf **p**, welche notwendig projektivisch sind, da (Satz, § 156) entsprechende Punkte derselben, wie a_1 und a_2, b_1 und b_2, ... gleichzeitig konjugierte Punkte der Polarinvolution auf **p** sind.

Nachdem aber die eine dieser Punktreihen, ($a_2 b_2 c_2 \ldots$.), den Schnitt der Geraden **p** mit dem Polarenbüschel $S(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots.)$ vorstellt, so ist auch das letztere mit der Reihe ($a_1 b_1 c_1 \ldots$.) projektivisch, und es folgt der Satz:

„Die Polaren aller Punkte einer Punktreihe, in bezug auf eine Kurve zweiten Grades, bilden ein zu dieser Reihe projektivisches Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Pol des Trägers jener Punktreihe ist, und umgekehrt.“

§ 159.

Das Reciprocitätsgesetz in der Ebene.

Denken wir uns in irgend einer Ebene eine beliebige Kurve **D** zweiten Grades angenommen. Diese Kurve vermittelt zwischen den Punkten und Geraden der Ebene eine Verwandtschaft, welche wir die *„polarreciproke Verwandtschaft“* oder kurz die *„Polar-Reciprocität“* nennen.

Jedem Punkte der Ebene entspricht reciprok eine Gerade, d. i. die Polare dieses Punktes in bezug auf die Kurve **D**, und umgekehrt entspricht reciprok jeder Geraden der Ebene der Pol derselben in bezug auf **D**. Die Kurve **D** heisst die *„Directrix der Reciprocität“*.

Die bezüglich *„Pol* und *Polare“* aufgefundenen Eigenschaften lassen noch einen weiteren Zusammenhang zwischen den einander reciprok entsprechenden Elementen und Gebilden erkennen.

Sei **p** eine beliebige Gerade, **P** der ihr reciprok entsprechende Punkt, d. h. der Pol von **p** in bezug auf **D**. Irgend einem Punkte P_1 auf **p** wird sodann (Satz 2, § 153) eine Gerade p_1 (d. i. die Polare des bezeichneten Punktes) entsprechen, welche durch **P** geht.

Sind ferner **p** und p_1 zwei beliebige Geraden, P_1 und P_2 die ihnen reciprok entsprechenden Punkte, so entspricht (Satz 1, § 153) dem Schnittpunkte von **p** und p_1 die Verbindungsgerade der entsprechenden Punkte P_1 und P_2.

Sind weiter **A**, **B**, **C** drei beliebige Punkte, **a**, **b**, **c** die ihnen

entsprechenden Geraden, so entsprechen (infolge des eben citierten Satzes) den Eckpunkten des Dreieckes **ABC** die Seiten des Dreieckes **abc** und umgekehrt.

Von Wichtigkeit sind jene Fälle, in welchen sich die beiden Dreiecke **ABC** und **abc** decken.

Nehmen wir zunächst den Punkt **A** an, und bestimmen die ihm reciproke Gerade **a**; auf **a** wählen wir den zweiten Punkt **B**. Die demselben reciprok entsprechende Gerade **b** geht sodann, wie wir bereits wissen, durch **A**, schneidet aber ausserdem die Gerade **a** in einem Punkte **C**, welchen wir als dritten Eckpunkt wählen. Diesem Punkte **C**, als Schnitt von **a** und **b**, entspricht die Verbindungsgerade **c** = **AB**, woraus hervorgeht, dass die beiden Dreiecke **ABC** und **abc** sich in der That decken.

Jedes solche Dreieck (es gibt deren offenbar unendlich viele) bezeichnet man als ein *„Polardreieck“* oder als ein *„sich selbst konjugiertes“* oder *„reciprokes Dreieck“* in bezug auf die Kurve **D**.

Jede Seite eines derartigen Dreieckes ist die Polare des gegenüberliegenden Eckpunktes; je zwei Eckpunkte und je zwei Seiten sind beziehungsweise konjugierte Punkte oder Strahlen in bezug auf die Kurve **D**.

Ferner entspricht (Satz in § 158) jeder Punktreihe reciprok ein zu derselben projektivisches Strahlenbüschel und umgekehrt. Der Scheitel des Büschels und der Träger der Reihe sind hierbei gleichfalls reciprok entsprechende Elemente.

Hieraus ist weiter unmittelbar zu schliessen, dass harmonischen Punkten harmonische Strahlen, dass einer involutorischen Punktreihe ein involutorisches Strahlenbüschel u. s. w. reciprok entsprechen muss.

Einer Kurve zweiten Grades entspricht reciprok wieder eine Kurve zweiten Grades. Denn, denkt man sich die eine Kurve punktweise durch zwei projektivische Strahlenbüschel erzeugt, so entspricht ihr reciprok der Ort der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte jener beiden projektivischen Reihen, welche reciprok den beiden vorgenannten Büscheln entsprechen.

Auf gleiche Weise findet man ferner, dass, wenn zwei Kurven **K** und **k** zweiten Grades sich reciprok entsprechen, irgend einem Punkte **A** der einen Kurve **K**, eine Tangente **a** der anderen Kurve **k** zugeordnet ist. Die Tangente in **A** und der Berührungspunkt von **a** sind gleichfalls reciprok entsprechende Elemente.

Sind **S** und **s** Pol und Polare von **K**, so wird denselben die Polare und der Pol von **k** reciprok zugeordnet sein u. s. w.

Aus dem hier Angeführten geht hervor, dass jeder beliebigen projektivischen Eigenschaft irgend eines Gebildes durch reciproke Transformation eine andere projektivische Eigenschaft bezüglich eines gewissen anderen Gebildes zur Seite gestellt werden kann, und dass der Zusammenhang zwischen beiden derselbe ist wie jener, den wir bisher als Dualität bezeichnet haben.

Auf diese Weise ist gleichzeitig ein streng geometrischer Beweis für die Richtigkeit des Dualitätsprinzipes erbracht.

Es genügt daher in irgend einem projektivischen Satze die Bezeichnungen Punkt und Gerade; Punktreihe und Strahlenbüschel; Schnittpunkt und Verbindungsgerade; Kurventangente und Kurvenpunkt u. s. w. miteinander zu vertauschen, um sofort den dual oder reciprok gegenüberstehenden Satz zu erhalten. So wird beispielsweise der Satz in § 135 nach seiner reciproken Umgestaltung in den folgenden übergehen:

„Bringt man die Tangentenpaare, welche von den Punkten einer Punktreihe an eine Kurve zweiten Grades gezogen werden, mit einer beliebigen festen Kurventangente zum Schnitte, so erhält man auf der letzteren eine involutorische Punktreihe, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte der festen Tangente mit jenen Kurventangenten sind, welche in den Schnittpunkten der Kurve mit dem Träger der obigen Punktreihe die Kurve berühren.“

§ 160.

Die Einführung metrischer Beziehungen in die projektivische Geometrie.

Die einfachsten massgeometrischen Beziehungen erhält man in projektivischen Gebilden, wenn man unendlich ferne Punkte als Elemente insbesondere berücksichtigt.

Ist beispielsweise **ab** [Fig. 127, Taf. VII] eine centralprojektivisch dargestellte Strecke und **v** der Fluchtpunkt derselben, so kann der Halbierungspunkt **c** dieser Strecke (wie in § 82 gezeigt wurde) durch centralprojektivische Konstruktion eines Parallelogrammes mit seinen Diagonalen ermittelt werden.

Da das hierbei entstehende Gebilde ein vollständiges Viereck repräsentiert, so folgt, dass die Centralprojektionen **a** und **b** zweier Punkte, die Centralprojektion **c** des Halbierungs-

punktes ihrer Strecke, und jene v des unendlich fernen Punktes derselben, stets vier harmonische Punkte sind. Selbstverständlich sind sodann auch (Satz 2, § 100) die vier projizierten Punkte im Raume selbst harmonisch. Es gilt sonach der Satz:

Jede gerade Strecke ist durch ihren Halbierungspunkt und durch den unendlich fernen Punkt ihres Trägers harmonisch getrennt.“

Hierauf stützt sich eine einfache metrische Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen Punkten **a**, **b**, **c** [Fig. 128, Taf. VII]. Stellen wir diesfalls beispielsweise die Bedingung, dass der zu suchende vierte Punkt **d** mit dem mittleren Punkte **b** konjugiert sein soll.

Man wird auf einer beliebig durch einen der drei Punkte, etwa **a**, gezogenen Geraden **r'** von **a** aus zwei gleiche Strecken $\mathbf{a\,b' = b'\,c'}$ auftragen und die Verbindungsstrahlen $\mathbf{b\,b'}$ und $\mathbf{c\,c'}$ in **S** zum Schnitte bringen. Die durch **S** nach dem unendlich fernen Punkte $\mathbf{d'_\infty}$ von **r'** (also $\mathbf{S\,d'_\infty}$ parallel zu **r'**) geführte Gerade trifft **r** bereits in dem gesuchten Punkte **d**. Es sind sodann **a**, **b**, **c**, **d** die Projektionen der vier harmonischen Punkte **a**, $\mathbf{b'}$, $\mathbf{c'}$, $\mathbf{d'_\infty}$.

§ 161.

Setzen wir voraus, es seien unter irgend vier harmonischen Strahlen α, β, γ, δ [Fig. 129, Taf. VII] zwei konjugierte Strahlen, allenfalls α und β, senkrecht zu einander.

Schneiden wir diese vier Strahlen durch eine zu β parallele, also zu α senkrechte Gerade **r**, so erhalten wir auf dieser letzteren vier harmonische Punkte **a**, $\mathbf{b_\infty}$, **c**, **d**, von welchen der eine, $\mathbf{b_\infty}$, als Schnitt der letzterwähnten Geraden mit dem Strahle β in unendliche Ferne fällt. Auf Grund des im vorhergehenden Paragraphe bewiesenen Satzes muss der konjugierte Punkt **a** gleichzeitig der Halbierungspunkt der Strecke **cd** sein. Infolge des rechten Winkels (α, **r**) bei **a** schliessen nun auch die beiden Strahlen γ und δ mit dem Strahle α (also auch mit dem zu α senkrechten Strahle β) gleiche Winkel ein. Hiernach besteht der Satz:

„Bilden unter vier harmonischen Strahlen zwei konjugierte Strahlen einen rechten Winkel, so sind sie gleichzeitig die Winkelhalbierenden der beiden noch übrigen Strahlen.“

§ 162.

Sind **a**, **b**, **c**, **d** [Fig. 130, Taf. VII] irgend vier harmonische Punkte, und beschreiben wir über der Strecke zweier konjugierter Punkte, etwa über **ab** als Durchmesser, einen Kreis **K**, so werden von einem beliebigen Punkte **S** dieses Kreises **K** die vier Punkte **a**, **b**, **c**, **d** durch vier harmonische Strahlen **Sa**, **Sb**, **Sc**, **Sd** projiziert, von welchen zwei konjugierte Strahlen, diesfalls **Sa** und **Sb**, gleichzeitig aufeinander senkrecht stehen.

Dem vorhergehenden Satze gemäss sind sodann **Sa** und **Sb** auch die Winkelhalbierenden des Winkels **cSd**. Nach einem bekannten elementargeometrischen Satze verhält sich aber

$$\mathbf{ca : da = cb : db = Sc : Sd}$$

woraus unmittelbar die nachstehenden Sätze hervorgehen.

„In einem harmonischen Punktwurfe wird die Strecke zweier konjugierten Punkte durch die beiden anderen Punkte innerlich und äusserlich in dem nämlichen Verhältnisse geteilt.“

Und:

„Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältnis besitzen, ist jener Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden der beiden gegebenen Punkte liegt und durch jene zwei Punkte geht, welche die Strecke der letzteren in dem genannten Verhältnisse innerlich und äusserlich teilen.“

§ 163.

Sind auf einer Geraden **r** [Fig. 131, Taf. VII] vier beliebige Punkte **a**, **b**, **c**, **d** gegeben, so lässt sich zwischen den von ihnen gebildeten Strecken (auf verschiedene Weise) ein Zusammenhang herstellen, der für projektivische Beziehungen bemerkenswert ist.

Nehmen wir, um zur Kenntnis des vorerwähnten Zusammenhanges zu gelangen, zunächst zwei Punkte **a** und **b** [Fig. 131, Taf. VII] auf einer Geraden **r** an.

Jeder weitere beliebige dritte Punkt **c** der Geraden **r** teilt sodann die Strecke **ab** entweder innerlich oder äusserlich in einem gewissen Verhältnisse $\mathbf{ac : bc = m}$.

Aus der elementaren Geometrie ist aber bekannt, dass, sobald **a** und **b** gegeben sind, der Punkt **c** durch den Wert **m** des

obigen Verhältnisses bestimmt sei, d. h. konstruiert werden kann, wenn gleichzeitig festgesetzt wird, ob der besagte Punkt innerhalb oder ausserhalb der Strecke **ab** liegen soll.

Da es stets zwei Punkte gibt, welche die Strecke **ab** in einem gegebenen Verhältnisse **m** teilen (einen innerhalb und einen ausserhalb **ab**), so können dieselben dadurch unterschieden werden, dass man das Verhältnis **m** negativ oder positiv nimmt, je nachdem der betreffende Punkt innerhalb oder aber ausserhalb **ab** liegt.

Hiernach wird beispielsweise $\frac{ac}{bc} = -1$ den Halbierungspunkt (**c**) von **ab**, hingegen $\frac{ac}{bc} = +1$ den unendlich fernen Punkt von **ab** bedeuten.

Die beiden Punkte **a** und **b** heissen sodann die *„Fixpunkte“*, **c** der *„Teilpunkt“* und $\pm m$ das *„Teilverhältnis“*.

Liegen auf einer Geraden **r** vier beliebige Punkte **a, b, c, d** [Fig. 131, Taf. VII], so kann man irgend zwei derselben, etwa **a** und **b**, als Fixpunkte und die übrigen, **c** und **d**, als Teilpunkte wählen.

Hierdurch erhält man zwei Teilverhältnisse, $\frac{ac}{bc} = m$ und $\frac{ad}{bd} = n$, aus welchen selbst wieder ein Quotient $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = m : n$ gebildet werden kann.

Diesen Quotienten pflegt man als das *„Doppelverhältnis“* oder als das *„anharmonische Verhältnis“* der vier Punkte **a, b, c, d** zu bezeichnen.

Nachdem unter vier Punkten die Wahl der Fixpunkte, sowie auch die des ersten beziehungsweise des zweiten Teilpunktes freisteht, so wollen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, festsetzen, dass in einem Wurfe, der mit (**abcd**) bezeichnet ist, stets die beiden erstangeführten Punkte die Fixpunkte, der drittgenannte den ersten Teilpunkt und der vierte den zweiten Teilpunkt vorstelle.

Hiernach ist das Doppelverhältnis des Wurfes (**abcd**) durch

$$(abcd) = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{m}{n} = k;$$

das Doppelverhältnis des Wurfes (**bcda**) hingegen durch:

$$\frac{bd}{cd} : \frac{ba}{ca} = \frac{m'}{n'} = k'$$

ausgedrückt.

Liegen beide Teilpunkte innerhalb oder ausserhalb der Fixpunkte, d. h. sind sie durch die letzteren nicht getrennt, so sind ihre Teilverhältnisse, der vorhin getroffenen Annahme entsprechend, entweder beide negativ, oder beide positiv. Diesfalls wird also das entsprechende Doppelverhältnis in beiden Fällen positiv sein.

Werden hingegen die Teilpunkte durch die Fixpunkte getrennt, liegt also der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Strecke der Fixpunkte, so ist das eine Teilverhältnis negativ, das andere aber positiv, das Doppelverhältnis mithin stets negativ. Daher der Satz:

„Das Doppelverhältnis eines Punktwurfes ist stets positiv oder negativ, je nachdem die Teilpunkte durch die Fixpunkte nicht getrennt oder getrennt sind.“

Wenn ein Wurf harmonisch ist, so pflegt man stets zwei konjugierte Punkte als Fixpunkte anzunehmen. Da in diesem Falle (Satz 1, § 162) die beiden Teilverhältnisse einen gleichen Wert, jedoch ungleiche Vorzeichen besitzen, so folgt der Satz:

„Das Doppelverhältnis von vier harmonischen Punkten ist stets der negativen Einheit gleich.“

§ 164.

In gleicher Weise lässt sich auch eine Beziehung zwischen vier durch denselben Punkt gehenden Strahlen aufstellen.

Betrachten wir zwei beliebige Strahlen α und β eines Strahlenbüschels **S** [Fig. 132, Taf. VII] als *„Fixstrahlen“*, einen beliebigen dritten Strahl γ als *„Teilstrahl“*, so definieren wir als *„Teilverhältnis“* den Wert:

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} = m.$$

Auch diesfalls unterscheiden wir wieder positive oder negative Werte des Teilverhältnisses, je nachdem der Teilstrahl γ in dem einen oder in dem anderen der beiden von α und β gebildeten Winkelräumen liegt.

Sind zwei Teilstrahlen γ und δ angenommen, so kann aus deren Teilverhältnissen

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} = \mathsf{m} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)} = \mathsf{n}$$

selbst wieder ein Quotient $\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{n}} = \mathsf{k}$ gebildet werden, welcher das *„Doppelverhältnis“* oder das *„anharmonische Verhältnis“* der vier Strahlen α, β, γ, δ heisst.

Genau so wie im Falle eines Punktwurfes, betrachten wir auch bei einem Strahlenwurfe $(\alpha\beta\gamma\delta)$ stets die beiden erstangeführten Strahlen, diesfalls α und β als Fixstrahlen, den drittgenannten Strahl γ als ersten Teilstrahl und den vierten Strahl δ als zweiten Teilstrahl, so dass beispielsweise dem Wurfe $(\gamma\delta\beta\alpha)$ das Doppelverhältnis:

$$\frac{\sin(\gamma\beta)}{\sin(\delta\beta)} : \frac{\sin(\gamma\alpha)}{\sin(\delta\alpha)}$$

entspricht.

Sind die beiden Teilstrahlen durch die beiden Fixstrahlen nicht getrennt, d. h. liegen dieselben in einem und demselben Winkelraume der letzteren, so sind beide Teilverhältnisse entweder negativ oder positiv, und mithin das Doppelverhältnis stets positiv.

Sind hingegen die Teilstrahlen durch die Fixstrahlen getrennt, d. h. liegen sie in verschiedenen Winkelräumen der letzteren, so haben die Teilverhältnisse ungleiche Vorzeichen, und das Doppelverhältnis ist stets negativ. Es kann daher der Satz aufgestellt werden:

„Das Doppelverhältnis eines Strahlenwurfes ist stets negativ oder positiv, je nachdem die Fixstrahlen durch die Teilstrahlen getrennt oder nicht getrennt sind.“

§ 165.

Ein beliebiger Punktwurf sei **(abcd)** [Fig. 133, Taf. VII], während $\mathsf{S}(\alpha\beta\gamma\delta)$ den denselben aus einem beliebigen Punkte **S** projizierenden Strahlenwurf vorstelle.

Bezeichnen wir der Kürze halber die Winkel, welche die Strahlen α und β mit dem Träger **r** des Wurfes **(abcd)** bilden, beziehungsweise mit φ und ψ, so liefert der bekannte Sinussatz der ebenen Trigonometrie die Beziehungen:

$$\sin(\alpha\gamma) = \frac{ac}{cS} \cdot \sin\varphi; \quad \sin(\beta\gamma) = \frac{bc}{cS} \cdot \sin\psi;$$

$$\sin(\alpha\delta) = \frac{ad}{dS} \cdot \sin\varphi \quad \text{und} \quad \sin(\beta\delta) = \frac{bd}{dS} \cdot \sin\psi.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} = \frac{ac}{bc} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}; \quad \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)} = \frac{ad}{bd} \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

und mithin:

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

oder symbolisch ausgedrückt:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd)$$

d. h. in Worten:

„Ein beliebiger Punktwurf und irgend ein denselben projizierender Strahlenwurf besitzen stets dasselbe Doppelverhältnis.“

Sind daher zwei Punktwürfe perspektivisch, stellen dieselben demgemäss Schnitte eines und desselben Strahlenwurfes vor, so sind deren Doppelverhältnisse dem Doppelverhältnisse des Strahlenwurfes, und mithin auch untereinander gleich.

Ebenso besitzen auch zwei perspektivische Strahlenwürfe gleiche Doppelverhältnisse, da die letzteren dem Doppelverhältnisse des ihnen gemeinschaftlichen Punktwurfes auf dem perspektivischen Durchschnitte gleich sind. Es gilt sonach der Satz:

„Zwei perspektivische Punktwürfe oder Strahlenwürfe besitzen stets ein gleiches Doppelverhältnis.“

Da endlich zwei projektivische Grundgebilde durch eine Kette von Projektionen zusammenhängen, so folgt auch unmittelbar der allgemeine Satz:

„Zwei einander entsprechende Würfe zweier projektivischen Grundgebilde (Punktreihen, Strahlenbüschel) besitzen stets ein gleiches Doppelverhältnis.“

§ 166.

Besondere Grundgebilde (Punktreihen und Strahlenbüschel) und besondere perspektivische und projektivische Beziehungen.

Der Scheitel eines Strahlenbüschels sowohl, als auch der Träger einer Punktreihe wurden bisher stets im Endlichen ange-

nommen. In folgendem mögen nun auch jene Fälle Berücksichtigung finden, in welchen die genannten Stücke in unendlicher Entfernung liegen.

Befindet sich der Scheitel eines Strahlenbüschels in unendlicher Entfernung, so sind sämtliche Strahlen des Büschels untereinander parallel. Aus diesem Grunde bezeichnet man dasselbe als ein *„Parallelstrahlenbüschel."* Bemerkenswert ist hierbei, dass die unendlich ferne Gerade, nachdem sie den Scheitel des Büschels enthält, selbst einen Strahl des letzteren repräsentiert.

Ebenso kann man auch die unendlich ferne Gerade als Träger einer Punktreihe annehmen. Da sich jedoch dieselbe der direkten Bestimmung und Konstruktion entzieht, so denken wir uns die besagte Punktreihe stets als Schnitt irgend eines Strahlenbüschels mit der unendlich fernen Geraden gegeben. Jeder Punkt dieser Reihe ist dann selbstverständlich als der unendlich ferne Punkt eines Strahles des Hilfsbüschels bestimmt.

§ 167.

Ähnliche Punktreihen.

Die Berücksichtigung der unendlich fernen Elemente führt auch zu besonderen perspektivischen und projektivischen Beziehungen.

Der einfachste hierher gehörige Fall ergibt sich durch die Annahme paralleler Träger **r** und **r'** [Fig. 134, Taf. VII] zweier perspektivischer Punktreihen.

Zwei derartige Reihen pflegt man *„centralperspektivisch ähnliche Reihen"* zu nennen, da, wie aus bekannten Sätzen der Elementargeometrie hervorgeht, irgend zwei Strecken **ab** und **cd** der einen Reihe, welche im Verhältnisse $\frac{ab}{cd} = m$ stehen, in der zweiten Reihe ebenfalls zwei Strecken **a' b'** und **c' d'** entsprechen, denen das gleiche Verhältnis $\frac{a'b'}{c'd'} = m$ zukommt.

Die unendlich fernen Punkte der beiden Reihen werden sodann (Satz in § 105), da sie im Schnitte der beiden Träger vereinigt erscheinen, sich selbst entsprechen.

Zwei Reihen können übrigens auch ähnlich sein, wenn ihre Träger nicht parallel sind. Dieser Fall tritt dann ein, wenn dieselben Schnitte zweier Geraden **r** und **r'** [Fig. 135, Taf. VII] mit einem und demselben Parallelstrahlenbüschel $S_\infty(\alpha\beta\gamma\delta\ldots)$

vorstellen. Mit Zugrundelegung bekannter elementargeometrischer Eigenschaften ergibt sich auch hier, dass, wenn (**a b c d**) und (**a' b' c' d'**) zwei beliebige, einander entsprechende Würfe sind, $\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{cd}} = \frac{\mathbf{a'b'}}{\mathbf{c'd'}}$ sein muss.

Nachdem weiter die unendlich ferne Gerade selbst ein Strahl des Büschels $\mathbf{S}_\infty(\alpha\beta\gamma\delta\ldots)$ ist, so sind auch hier wieder die unendlich fernen Punkte der beiden Träger **r** und **r'** entsprechende Punkte der beiden Reihen **r** und **r'**.

Infolge des Umstandes, dass diese beiden ähnlichen Reihen auf eine andere Weise als die vorerwähnten entstehen, werden sie als *„parallelperspektivisch ähnliche Reihen“* bezeichnet.

Indem sowohl centralperspektivisch als auch parallelperspektivisch ähnliche Reihen die Eigenschaft besitzen, dass ein gegenseitiges Entsprechen ihrer unendlich fernen Punkte statthat, so werden auch zwei projektivische Reihen dann als *„ähnliche Reihen“* bezeichnet, wenn ihre unendlich fernen Punkte sich entsprechen. Selbstverständlich ist dann die Beziehung der beiden Reihen durch zwei Paare entsprechender Punkte (Satz in § 111) vollkommen bestimmt, da die beiden sich entsprechenden unendlich fernen Punkte bereits ein drittes Paar von Elementen von vornherein repräsentieren.

Bezeichnen wir in zwei ähnlichen Reihen **r** und **r'** drei sich entsprechende Punktepaare mit **a**, **a'**; **b**, **b'**; **c**, **c'** und seien **u** und **u'** die unendlich fernen Punkte derselben, so haben (Satz 3, § 165) die beiden Würfe (**abcu**) und (**a' b' c' u'**) ein gleiches Doppelverhältnis; es ist also:

$$\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{bc}} : \frac{\mathbf{au}}{\mathbf{bu}} = \frac{\mathbf{a'c'}}{\mathbf{b'c'}} : \frac{\mathbf{a'u'}}{\mathbf{b'u'}}$$

oder weil $\frac{\mathbf{au}}{\mathbf{bu}} = \frac{\mathbf{a'u'}}{\mathbf{b'u'}} = 1$ ist,

$$\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{bc}} = \frac{\mathbf{a'c'}}{\mathbf{h'c'}}.$$

Ebenso würde man, wenn **d** und **d'** ein beliebiges viertes Paar entsprechender Punkte bedeutet, finden, dass:

$$\frac{\mathbf{cb}}{\mathbf{db}} = \frac{\mathbf{c'b'}}{\mathbf{d'b'}},$$

woraus weiter, in Verbindung mit dem vorhergehenden Verhältnisse, folgt, dass auch:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

d. h. auch im Falle projektivisch ähnlicher Reihen ist das Verhältnis zweier beliebigen Strecken der einen Reihe dem Verhältnisse der ihnen entsprechenden Strecken der anderen Reihe gleich. Wir haben sonach den Satz:

„Sind zwei Punktreihen (perspektivisch oder projektivisch) ähnlich, entsprechen sich also in denselben die unendlich fernen Punkte, so ist das Verhältnis zweier beliebigen Strecken der einen Reihe stets gleich dem Verhältnisse der entsprechenden Strecken der zweiten Reihe.“

§ 168.

Kongruente Punktreihen.

Wird ein Parallelstrahlenbüschel $S_\infty(\alpha\beta\gamma\delta\ldots)$ [Fig. 136, Taf. VII] durch zwei parallele Geraden **r** und **r'** geschnitten, so erhält man zwei perspektivische Punktreihen (**abcd** . . .) und (**a' b' c' d'** . . .), in welchen auch die unendlich fernen Punkte sich entsprechen. Infolge der dabei auftretenden Parallelogramme (**a a' b' b**, **b b' c c'** . . .) kommt den besagten Punktreihen die besondere Eigenschaft zu, dass je zwei einander entsprechende Strecken, wie **ab** und **a' b'**; **bc** und **b' c'** u. s. w. gleiche Längen besitzen. Dies der Grund warum man die beiden obgenannten Reihen *„parallelperspektivisch-kongruente Reihen“* zu nennen pflegt.

Zu gleichem Resultat gelangt man auch, wenn man ein Parallelstrahlenbüschel $S_\infty(\alpha\beta\gamma\ldots)$ durch zwei gerade Linien r und r' [Fig. 137, Taf. VII] schneidet, welche, ohne parallel zu sein, mit den Strahlen des Büschels $S_\infty(\alpha\beta\gamma\ldots)$ gleiche Winkel bilden.

Auch in diesem Falle sind, wie aus den gleichschenkligen Dreiecken **daa'**, **dbb'**, . . . [Fig. 137, Taf. VII] unmittelbar hervorgeht, je zwei einander entsprechende Strecken gleich lang; die beiden Reihen (**abc** . . .) und (**a' b' c'** . . .) sind somit gleichfalls *„parallelperspektivisch kongruent“*.

Endlich kann man, wie leicht einzusehen, auch zwei per-

spektivische Reihen, in welchen sich die unendlich fernen Punkte entsprechen, und in welchen je zwei entsprechende Strecken gleiche Länge besitzen, dadurch erhalten, dass man ein beliebiges Strahlenbüschel $S(\alpha\beta\gamma\ldots)$ [Fig. 138, Taf. VII] durch zwei parallele und vom Scheitel **S** gleich weit abstehende Geraden **r** und **r'** schneidet. Die auf diese Weise entstehenden Punktreihen (**abc**...) und (**a' b' c'** ...) nennt man *„centralperspektivisch kongruente Punktreihen."*

Die charakteristische Eigenschaft aller drei Arten perspektivisch-kongruenter Reihen besteht darin, dass je zwei entsprechende Strecken einander gleich sind.

Es fragt sich nun, ob es auch projektivische Reihen gibt, welche die gleiche Eigenschaft besitzen, d. h. ob zwei Reihen in beliebiger allgemeiner Lage, in welchen durchwegs gleiche Strecken einander entsprechend zugeordnet werden, projektivisch sind.

Nehmen wir, um dies festzustellen, zwei beliebige Geraden **r** und $\mathbf{r}_1$ [Fig. 139, Taf. VII] an, und wählen auf einer derselben die Punkte **a**, **b**, **c**, **d**, ... während wir auch auf der zweiten Geraden einen Punkt $\mathbf{a}_1$ gleichfalls willkürlich annehmen. Die Punkte $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{d}_1$ werden sodann in der Weise bestimmt, dass man die sämtlichen, durch gleiche Buchstaben bezeichneten Strecken einander gleich macht, oder mit anderen Worten, dass die beiden Reihen, im elementargeometrischen Sinne, kongruent sind, und durch geeignete Bewegung Punkt für Punkt zur Deckung gebracht werden können.

Werden nun die Punkte **a** und $\mathbf{a}_1$, **b** und $\mathbf{b}_1$, ... als entsprechend betrachtet, so ist leicht zu zeigen, dass die Beziehung der beiden Reihen gleichzeitig eine projektivische sei, d. h. dass die eine Reihe aus der anderen lediglich durch „Projektion" abgeleitet werden kann.

Führen wir zu diesem Zwecke durch $\mathbf{a}_1$ eine Parallele **r'** zu **r** und projizieren die Reihe (**abc**...) vermittels eines Parallelstrahlenbüschels (dessen Strahlen die Richtung der Verbindungsgeraden $\mathbf{a}\mathbf{a}_1$ haben) auf **r'** in die Reihe (**a' b' c' d'** ...). Hierbei fällt einerseits **a'** mit $\mathbf{a}_1$ zusammen, und, da die Reihe (**a' b' c' d'** ...) mit (**a b c d** ...) parallelperspektivisch-kongruent ist, so sind anderseits die sämtlichen Strecken **a' b'**, **b' c'**, **c' d'**, **a' c'** ... gleich den Strecken $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1$, $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_1$ ... und mithin

die Verbindungsgeraden $b' b_1$, $c' c_1$, $d' d_1$ . . . durchwegs parallel, also Strahlen eines zweiten Parallelstrahlenbüschels.

Nachdem somit die Reihe $(a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots)$ ohne weiteres aus der Reihe $(abcd \ldots)$ durch zwei Parallelprojektionen abgeleitet werden kann, sind die beiden Reihen $(a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots)$ und $(abcd \ldots)$ projektivisch. Dies gibt den Satz:

„Zwei kongruente Punktreihen in allgemeiner Lage sind stets projektivisch."

§ 169.

Kongruente Strahlenbüschel.

Ordnet man in zwei Strahlenbüscheln mit beliebigen Scheiteln S und S' [Fig. 140, Taf. VII] solche Strahlen α und α' β und β', . . . als einander entsprechend zu, welche gleichzeitig parallel sind, so werden diese Büschel offenbar perspektivisch sein, da sie Projektionen einer und derselben Reihe auf der unendlich fernen Geraden sind.

Infolge der Parallelität aller Paare entsprechender Strahlen sind je zwei einander entsprechende Winkel von gleicher Grösse. Aus diesem Grunde bezeichnet man die beiden vorgenannten Büschel als *„parallelkongruente Strahlenbüschel"*.

Es gibt übrigens noch eine zweite Art perspektivischer Strahlenbüschel, in welchen entsprechende Winkel gleichfalls eine stets gleiche Grösse besitzen.

Seien nämlich S und S' [Fig. 141, Taf. VII] die Scheitel zweier Büschel und r eine Gerade, welche durch den Halbierungspunkt n von SS' senkrecht zu SS' geführt wird. Betracht man die Reihe $(abc \ldots)$ auf r als den perspektivischen Durchschnitt der beiden Büschel $S(\alpha\beta\gamma \ldots)$ und $S'(\alpha'\beta'\gamma' \ldots)$, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke anS und anS'; bnS und bnS'; cnS und cnS' u. s. w. die Gleichheit je zweier entsprechender Winkel $(\alpha\beta)$ und $(\alpha'\beta')$ u. s. w. Zwei derartige Büschel nennt man *„symmetrisch-kongruente Strahlenbüschel"*.

Diese beiden Arten perspektivisch-kongruenter Strahlenbüschel weisen einen bemerkenswerten Unterschied auf. Lässt man nämlich in dem einen von zwei parallelkongruenten Strahlenbüscheln einen Strahl in irgend einem Drehungssinne sich bewegen, so wird auch der ihm entsprechende Strahl das zweite Büschel in demselben Sinne durchlaufen. Sind jedoch die bei-

den Büschel symmetrisch kongruent, so werden sie von entsprechenden Strahlen stets in entgegengesetztem Drehungssinne beschrieben.

Seien endlich $\mathbf{S}(\alpha\beta\gamma\delta\ldots)$ und $\mathbf{S}_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots)$ [Fig. 142, Taf. VIII] zwei „kongruente“ Strahlenbüschel in allgemeiner Lage, und beziehen wir die Strahlen α und α_1; β und β_1; γ und $\gamma_1\ldots$ so aufeinander, dass stets gleich bezeichnete Winkel, wie beispielsweise $(\beta\delta)$ und $(\beta_1\delta_1)$, gleich gross sind, so kann leicht gezeigt werden, dass diese Büschel projektivisch sind.

Denken wir uns nämlich auf zwei entsprechenden Strahlen, etwa auf γ und γ_1, von den Scheiteln aus zwei gleiche Stücke $\mathbf{Sc}$ und $\mathbf{S}_1\mathbf{c}_1$ aufgetragen, und durch die Punkte $\mathbf{c}$ und $\mathbf{c}_1$ die Geraden $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_1$ beziehungsweise senkrecht zu γ und γ_1 gezogen, so werden diese die beiden Büschel in zwei Punktreihen $(\mathbf{abcd}\ldots)$ und $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1\ldots)$ schneiden, welche infolge der dabei entstehenden rechtwinkligen kongruenten Dreieckspaare $\mathbf{aSc}$ und $\mathbf{a}_1\mathbf{S}_1\mathbf{c}_1$ u. s. w. unmittelbar als kongruente Punktreihen erkennbar sind. Da aber die letzteren (Satz in § 168) stets projektivisch sind, so müssen auch die beiden Strahlenbüschel, deren Schnitte sie sind, projektivisch sein, und es gilt der Satz:

„Zwei kongruente Strahlenbüschel in allgemeiner Lage sind stets projektivisch.“

Wenn zwei projektivisch-kongruente Strahlenbüschel von zwei entsprechenden Strahlen in demselben Drehungssinne durchlaufen werden, so nennt man sie *„gleichsinnig-kongruente Strahlenbüschel“*, im anderen Falle [der in Fig. 142, Taf. VIII dargestellt ist] *„entgegengesetzt kongruente Strahlenbüschel“*.

§ 170.

Metrische Beziehungen an involutorischen Punktreihen.

Wir wissen bereits, dass, sobald zwei projektivische Punktreihen nicht insbesondere „ähnlich“ sind, sich auch deren unendlich fernen Punkte nicht entsprechen, und dass es im allgemeinen zwei im Endlichen befindliche Punkte, — die sogenannten *„Gegenpunkte“* oder *„Fluchtpunkte“* — der beiden Reihen gibt, welche den unendlich fernen Punkten beider Reihen entsprechen.

Beachtenswert ist der Fall, in welchem die Gegenpunkte zweier konlokalen Punktreihen zusammenfallen.

Sei r [Fig. 143a, Taf. VIII] der Träger der beiden projektivischen Reihen $(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ und $(a_2 b_2 c_2 \ldots.)$; die beiden Gegenpunkte v_1 und u_2, welche den unendlich fernen Punkten v_2^∞ und u_1^∞ entsprechen, seien in dem Punkte M vereinigt.

Da, gestützt auf diese Voraussetzung, dem unendlich fernen Punkte, einerlei ob er als Element der einen oder der anderen Reihe betrachtet wird, stets der Punkt M als Element der jeweilig zweiten Reihe entspricht, so folgt (nach § 119), dass die beiden projektivischen Reihen zu einer Involution vereinigt sind.

Der Punkt M, welcher mit dem unendlich fernen Punkte konjugiert ist, wird der *„Centralpunkt“* der Involution genannt.

Die Angabe dieses Centralpunktes ist sonach gleichwertig mit der Angabe zweier konjugierten Punkte. Zum Behufe der Bestimmung obiger Involution wird daher (§ 121) die Angabe eines weiteren Paares konjugierter Punkte a_1, a_2 vollständig genügen.

Diesbezüglich sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die beiden konjugierten Punkte a_1 und a_2 können zu verschiedenen Seiten des Centralpunktes M liegen oder mit anderen Worten, dieselben können durch den Centralpunkt M und den unendlich fernen Punkt $U\,(= v_2^\infty, u_1^\infty)$ getrennt sein. Ist dann b_1, b_2 irgend ein weiteres Paar konjugierter Punkte, so werden, da die Involution dem Wesen nach aus zwei projektivischen Reihen besteht, die beiden Würfe:

$$(a_1 b_1 v_1 u_1^\infty) \quad \text{oder} \quad (a_1 b_1 M U)$$

und

$$(a_2 b_2 v_2^\infty u_1) \quad \text{oder} \quad (a_2 b_2 U M)$$

projektivisch sein.

Die beiden Punkte a_1 und b_1 werden (Satz in § 107) durch M und U getrennt oder nicht getrennt erscheinen, je nachdem a_2 und b_2 durch M und U getrennt oder nicht getrennt sind. Man kann sich nun leicht die Überzeugung verschaffen, dass welcher der beiden Fälle auch immer eintreten mag, die besagten Punkte b_1 und b_2 durch M und U stets getrennt werden, indem der Voraussetzung gemäss auch a_1 und a_2 durch M und U getrennt sind.

Ist also eine involutorische Reihe derart beschaffen, dass irgend zwei konjugierte Punkte zu verschiedenen Seiten des Centralpunktes liegen, so besitzen alle Paare konjugierter Punkte dieselbe Eigenschaft. Weiter folgt hieraus auch, dass die Involution keine reellen Doppelpunkte haben kann.

b) Nehmen wir den zweiten Fall an, d. h. setzen wir zwei konjugierte Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ [Fig. 143b, Taf. VIII] als durch $\mathbf{M}$ und $\mathbf{U}$ nicht getrennt voraus.

Wäre etwa $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ wieder ein zweites beliebiges Paar konjugierter Punkte, so hat man die Projektivität $(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{M}\mathbf{U})$ und $(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{U}\mathbf{M})$, auf Grund welcher $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{b}_1$ durch $\mathbf{M}$ und $\mathbf{U}$ getrennt oder nicht getrennt erscheinen, je nachdem $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_2$ durch $\mathbf{M}$ und $\mathbf{U}$ getrennt oder nicht getrennt sind. In jedem dieser beiden Fälle sind aber $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ durch $\mathbf{M}$ und $\mathbf{U}$ nicht getrennt, da, der gemachten Voraussetzung gemäss, auch $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ durch $\mathbf{M}$ und $\mathbf{U}$ nicht getrennt werden.

Liegen also in einer involutorischen Reihe irgend zwei konjugierte Punkte auf derselben Seite des Centralpunktes, so kommt die gleiche Eigenschaft auch allen anderen Paaren konjugierter Punkte zu. Eine derartige Involution besitzt, wie sofort gezeigt werden wird, stets zwei reelle Doppelpunkte.

Seien wieder $\mathbf{M}$ der Centralpunkt einer involutorischen Reihe und $\mathbf{U}$ deren unendlich ferner Punkt; weiter mögen $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ zwei beliebige Paare konjugierter Punkte derselben vorstellen. Vorläufig wollen wir keine Rücksicht darauf nehmen, ob sie zu verschiedenen Seiten oder zur selben Seite des Centralpunktes $\mathbf{M}$ liegen.

Unter den obwaltenden Umständen besteht sodann (Satz 3 in § 165) für die beiden projektivischen Würfe:

$$\mathbf{M}(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{M}\mathbf{U}) \quad \text{und} \quad (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{U}\mathbf{M})$$

die Gleichheit der Doppelverhältnisse, es wird also:

$$\frac{\mathbf{a}_1\mathbf{M}}{\mathbf{b}_2\mathbf{M}} : \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{U}}{\mathbf{b}_1\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{a}_2\mathbf{U}}{\mathbf{b}_2\mathbf{U}} : \frac{\mathbf{a}_2\mathbf{M}}{\mathbf{b}_2\mathbf{M}}$$

oder, da $\dfrac{\mathbf{a}_1\mathbf{U}}{\mathbf{b}_1\mathbf{U}} = \dfrac{\mathbf{a}_2\mathbf{U}}{\mathbf{b}_2\mathbf{U}} = 1$ ist, wird:

$$\frac{\mathbf{a}_1\mathbf{M}}{\mathbf{b}_1\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{b}_2\mathbf{M}}{\mathbf{a}_2\mathbf{M}} \quad \text{oder}$$

$$\mathbf{a}_1\mathbf{M} \,.\, \mathbf{a}_2\mathbf{M} = \mathbf{b}_1\mathbf{M} \,.\, \mathbf{b}_2\mathbf{M}.$$

Berücksichtigen wir hierbei, dass $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ zwei beliebige Paare konjugierter Punkte vorstellen, so ergibt sich sofort allgemein:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{M} \,.\, \mathbf{a}_2\mathbf{M} = \mathbf{b}_1\mathbf{M} \,.\, \mathbf{b}_2\mathbf{M} = \mathbf{c}_1\mathbf{M} \,.\, \mathbf{c}_2\mathbf{M} \,.\,.\,.\,.\, = \mathbf{K}^2 \,(\text{const})$$

d. h. das Rechteck aus den Entfernungen konjugierter Punkte vom Centralpunkte ist unveränderlich.

Die Grösse **K** bezeichnet man als den *„Modul“* und $\mathbf{K}^2$ als die *„Potenz“* der Involution.

Liegen konjugierte Punkte auf derselben Seite des Centralpunktes, so besitzt die Involution zwei reelle Doppelpunkte zu beiden Seiten des Centralpunktes in einer dem Modul **K** gleichen Entfernung. Es ergibt sich mithin der Satz:

„Die Rechtecke aus den Entfernungen konjugierter Punkte einer involutorischen Reihe vom Centralpunkte der letzteren haben sämtlich gleichen Inhalt. Liegen konjugierte Punkte auf derselben Seite des Centralpunktes, so besitzt die Involution zwei reelle Doppelpunkte zu beiden Seiten des Centralpunktes in einer Entfernung, deren Quadrat mit den genannten Rechtecken inhaltsgleich ist; liegen jedoch konjugierte Punkte zu verschiedenen Seiten des Centralpunktes, so sind keine reellen Doppelpunkte vorhanden.“

§ 171.

Der eben bewiesene Satz bildet die Grundlage für gewisse einfache, metrische Konstruktionen involutorischer Punktreihen.

Sei beispielsweise **r** [Fig. 144, Taf. VIII] der Träger und **M** der Centralpunkt einer *„elliptischen Involution“*. So wollen wir aus an späterer Stelle anzuführenden Gründen jede Involution nennen, welche keine reellen Doppelelemente besitzt.

Tragen wir auf der durch **M** senkrecht zu **r** gezogenen Geraden den Modul der Involution **MZ** auf, so ist einleuchtend, dass jeder rechte Winkel, wie etwa $\mathbf{a_1 Z a_2}$, der seinen Scheitel in **Z** hat, oder mit anderen Worten, dass jeder durch **Z** gehende Kreis **K**, dessen Mittelpunkt auf **r** liegt, die Gerade **r** in zwei konjugierten Punkte $\mathbf{a_1}$ und $\mathbf{a_2}$ u. s. w. der gegebenen Involution treffen wird, da infolge dieser Konstruktion stets:

$$\mathbf{a_1 M \,.\, a_2 M = \overline{MZ}^2}.$$

Ist die Involution durch zwei Paare konjugierter Punkte, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$; $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ gegeben, so kann man im Schnitte der über $\mathbf{a_1 a_2}$ und $\mathbf{b_1 b_2}$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreise **K** und **K'** den Punkt **Z**, und in der Senkrechten von **Z** auf **r** die Potenz **ZM** sowohl als auch den Centralpunkt **M** erhalten. Jeder andere durch **Z** gehende Kreis **K"**, der seinen Mittelpunkt auf **r** hat, liefert sodann auf **r** zwei weitere konjugierte Punkte $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$; .. der Involution.

Auf Grund dieser Beziehungen ist es auch leicht, das ge-

meinschaftliche konjugierte Punktepaar a_1, a_2 zweier auf derselben Geraden **r** [Fig. 145, Taf. VIII] liegenden elliptischen Involutionen zu konstruieren.

Sind nämlich M_1 und M_2 die Centralpunkte dieser Involutionen und M_1Z_1 resp. M_2Z_2 (senkrecht zu **r**) deren Module, so wird man bloss jenen Kreis **K** konstruieren, welcher seinen Mittelpunkt **o** auf **r** hat und durch die Punkte Z_1 und Z_2 geht. Im Schnitte dieses Kreises **K** mit **r** erhält man das gesuchte Punktepaar, denn es ist:

$$a_1M_1 \,.\, a_2M_1 = \overline{M_1Z_1^2} \quad \text{und} \quad a_1M_2 \,.\, a_2M_2 = \overline{M_2Z_2^2}.$$

Eine ähnliche Konstruktion führt zur Ermittelung des gemeinschaftlichen konjugierten Punktepaares einer elliptischen und einer hyperbolischen Involution. Unter der letzteren wird eine solche mit reellen Doppelelementen verstanden.

Seien **M** [Fig. 146, Taf. VIII] der Centralpunkt und **MZ** der Modul der hyperbolischen Involution, während M_1 resp. M_1Z_1 beziehungsweise den Centralpunkt und den Modul der elliptischen Involution vorstellen mögen.

Wir zeichnen zunächst über MM_1 als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck MZM_1 in welchem die Kathete **MZ** dem Modul der hyperbolischen Involution gleich ist, führen hierauf durch M_1 eine Parallele M_1Z_1 zu der Kathete **MZ** und tragen auf derselben den Modul M_1Z_1 der elliptischen Involution auf. Legt man durch **Z** und Z_1 einen Kreis **K**, welcher seinen Mittelpunkt o_1 auf ZM_1 hat, so trifft derselbe den Träger **r** bereits in dem gesuchten Punktepaar a_1, a_2. Es ist nämlich einerseits $M_1a_1 \,.\, M_1a_2 = \overline{M_1Z_1^2}$, und anderseits, da der Kreis **K** von **MZ** in **Z** berührt wird, $Ma_1 \,.\, Ma_2 = \overline{MZ^2}$.

Weiter kann das gemeinschaftliche Punktepaar a_1, a_2 [Fig. 147, Taf. VIII] zweier hyperbolischen Involutionen auf derselben Geraden **r** folgendermassen konstruiert werden.

Man beschreibt aus den Centralpunkten **M** und M_1 mit den bezüglichen Moduln **MZ** und M_1Z_1 die Kreise γ und γ_1 und zieht an die letzteren eine gemeinschaftliche Tangente **t**. Der über der Strecke ZZ_1 der beiden Berührungspunkte **Z** und Z_1 als Durchmesser beschriebene Kreis **K** bestimmt auf **r** das verlangte Punktepaar a_1a_2; denn, da der Kreis **K** beziehungsweise in **Z** und Z_1 von **MZ** resp. M_1Z_1 berührt wird, ist:

$$Ma_1 \,.\, Ma_2 = \overline{MZ^2} \quad \text{und} \quad M_1a_1 \,.\, M_1a_2 = \overline{M_1Z_1^2}.$$

Für diesen letztbesprochenen Fall haben wir übrigens auch schon in § 136 (wie aus der zum Schlusse dieses Paragraphen hingestellten Bemerkung ersichtlich ist) eine andere Konstruktion kennen gelernt.

§ 172.

Besondere involutorische Gebilde.

Berücksichtigt man gleichzeitig die beiden in den §§ 120 und 160 angeführten Sätze, so wird man unmittelbar finden, dass alle Paare von Punkten einer Geraden, welche gegen einen festen Punkt der letzteren symmetrisch liegen, eine Involution bilden, deren Doppelpunkte der genannte feste Punkt und der unendlich ferne Punkt sind. Eine solche Involution bezeichnet man als eine *„symmetrisch-involutorische Punktreihe“*.

Weiter bilden (Satz in § 161, und § 120) alle durch einen und denselben Punkt gehenden Strahlenpaare, welche gegen einen festen Strahl symmetrisch sind, eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen der besagte feste Strahl und der zu ihm senkrechte Strahl sind. Eine derartige Involution pflegt man ein *„symmetrisch-involutorisches Strahlenbüschel“* zu nennen.

Wie leicht zu erkennen, wird ein derartiges involutorisches Strahlenbüschel von einer zu dem einen oder anderen Doppelstrahle parallelen (oder, was diesfalls gleichbedeutend ist, senkrechten) Geraden in einer symmetrisch-involutorischen Punktreihe geschnitten.

Stellen wir uns endlich vor, dass die beiden Doppelpunkte einer involutorischen Reihe, oder die beiden Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels in einen und denselben Punkt resp. Strahl zusammenfallen.

Da jedes Paar konjugierter Elemente einer Involution durch die Doppelelemente harmonisch getrennt ist, so folgt, dass in dem besonderen, eben erwähnten Falle das eine Element eines Paares stets mit den Doppelelementen zusammenfällt.

Eine solche Involution kann man sich daher stets als ein einfaches Grundgebilde (Punktreihe oder Strahlenbüschel) vorstellen, in welchem jedes Element mit einem und demselben festen Elemente konjugiert ist. Eine derartige Involution heisst eine *„degenerierte“* oder, aus später zu erklärenden Gründen, eine *„parabolische Involution“*.

§ 173.

Die Rechtwinkelinvolution oder das orthogonal-involutorische Strahlenbüschel.

Denken wir uns zwei Strahlenbüschel mit einem gemeinschaftlichen Scheitel derart aufeinander bezogen, dass jedem Strahle des einen Büschels der zu ihm senkrechte Strahl des anderen Büschels entspricht, so ist einleuchtend, dass je zwei einander entsprechende Winkel gleich gross, die beiden Strahlenbüschel also (Satz in § 169) kongruent und projektivisch sind.

Da ferner einem beliebigen Strahle stets der zu ihm senkrechte Strahl entspricht, gleichgültig welchem der beiden Büschel der erstere angehört, so sind je zwei entsprechende Strahlen vertauschbar, die beiden Strahlenbüschel mithin zu einer Involution vereinigt. Es gilt daher der Satz:

„Alle Paare aufeinander senkrecht stehender, durch einen festen Punkt gehenden Strahlen, sind konjugierte Strahlenpaare einer und derselben Involution“.

Eine derartige Involution wird eine *„Rechtwinkelinvolution“* oder ein *„orthogonal-involutorisches Strahlenbüschel“* genannt.

Besagte Involution besitzt zwei imaginäre Doppelstrahlen, da selbstverständlich zwei reelle Strahlen nicht aufeinander senkrecht stehen und gleichzeitig zusammenfallen können.

Vorher wurde bereits (§ 171) gefunden, dass jede elliptisch-involutorische Reihe $\mathbf{r}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \ldots)$ [Fig. 144, Taf. VIII] durch eine Rechtwinkelinvolution projiziert werden kann. Den Scheitel $\mathbf{Z}$ der letzteren fand man im Schnitte zweier Kreise $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$, welche beziehungsweise über den Strecken zweier Paare konjugierter Punkte $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ als Durchmesser beschrieben wurden.

Denken wir uns nun die obgenannte elliptische Reihe $\mathbf{r}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \ldots)$ als Schnitt eines beliebigen elliptisch-involutorischen Strahlenbüschels $\mathbf{S}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2, \ldots)$.

Durch die beiden Punkte $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Z}$ lässt sich stets ein, aber auch nur ein Kreis $\mathbf{K}_x$ legen, der seinen Mittelpunkt auf $\mathbf{r}$ hat. Dieser letztbezeichnete Kreis $\mathbf{K}_x$ bestimmt auf dem Träger $\mathbf{r}$ zwei konjugierte Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$. Es sind daher $\mathbf{Sx}_1$ und $\mathbf{Sx}_2$ zwei konjugierte Strahlen des involutorischen Büschels $\mathbf{S}$, welche nebstbei aufeinander senkrecht stehen, da der Kreis $\mathbf{K}_x$ auch durch $\mathbf{S}$ geht.

Hieraus ist sofort zu entnehmen, dass ein elliptisch-involutorisches Strahlenbüschel stets ein Paar konjugierter aufeinander senkrecht stehender Strahlen, aber auch nur ein solches Paar besitzt. Ebenso kommt einem hyperbolisch-involutorischen Strahlenbüschel nur ein Paar konjugierter aufeinander senkrecht stehender Strahlen zu. Letztere sind die beiden Winkelhalbierenden der Doppelstrahlen, da sie das einzige Rechtwinkelpaar repräsentieren, welches gleichzeitig die Doppelstrahlen harmonisch trennt.

Besitzt sonach irgend ein involutorisches Büschel mehr als ein Rechtwinkelpaar, so muss besagtes Büschel notwendig eine Rechtwinkelinvolution darstellen. Es besteht hiermit der Satz:

„Besitzt ein involutorisches Strahlenbüschel mehr als ein Paar rechtwinkliger konjugierter Strahlen, so sind alle konjugierten Strahlenpaare rechtwinklig, und die Involution ist eine Rechtwinkelinvolution.“

Denken wir uns in einer Ebene zwei beliebige Rechtwinkelinvolutionen und weiter zu irgend einem konjugierten (also rechtwinkligen) Strahlenpaare der einen Rechtwinkel-Involution die parallelen Strahlen der anderen gezogen, so sind diese, weil auch rechtwinklig, ebenfalls konjugiert. Nachdem dasselbe von irgend zwei anderen Rechtwinkelpaaren und weiter für alle möglichen Rechtwinkelinvolutionen gilt, so ist einleuchtend, dass alle diese Rechtwinkelinvolutionen die unendlich ferne Gerade in einer und derselben involutorischen Punktreihe treffen. Es kann daher der Satz aufgestellt werden:

„Alle Rechtwinkelinvolutionen einer Ebene bestimmen auf der unendlich fernen Geraden dieser Ebene eine und dieselbe involutorische Reihe.“

Diese Punktinvolution ist elliptisch, besitzt sonach keine reellen Doppelpunkte. Wir wollen dieselbe als die *„unendlich ferne Orthogonal-Involution“* der betreffenden Ebene bezeichnen.

§ 174.

Metrische Eigenschaften der Kurven zweiten Grades.

Eine Kurve zweiten Grades kann ein dreifaches Verhalten gegen die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene zeigen, und zwar:

a) Die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der obbezeichneten Geraden sind nicht reell. Die Kurve ist diesfalls im Endlichen geschlossen und heisst *„Ellipse“*.

b) Die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden sind reell und verschieden voneinander. In diesem Falle besteht die Kurve aus zwei ins Unendliche verlaufenden und in den letztgenannten zwei Punkten zusammentreffenden Zweigen. Besagte Kurve wird eine *„Hyperbel“* genannt. Den unendlich fernen Punkten entsprechen dann auch zwei reelle im Endlichen liegende Tangenten, die *„Asymptoten“*.

c) Die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden sind reell und fallen überdies zusammen oder, mit anderen Worten, fallen unendlich nahe aneinander. Diesfalls repräsentiert die unendlich ferne Gerade gleichzeitig eine Tangente der Kurve. Diese Kurve, welche aus einem einzigen, im Unendlichen sich schliessenden Aste besteht, wird eine *„Parabel“* genannt.

Wird eine Kurve zweiten Grades durch zwei projektivische Strahlenbüschel $\mathbf{S}_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $\mathbf{S}_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ erzeugt, und wird weiter ein mit dem Büschel $\mathbf{S}_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ parallel-kongruentes Büschel $\mathbf{S}_1(\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\ldots)$ angenommen, das seinen Scheitel in $\mathbf{S}_1$ hat, so werden die beiden Büschel $\mathbf{S}_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ und $\mathbf{S}_1(\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\ldots)$ entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Doppelstrahlen besitzen.

Hieraus folgt unmittelbar, dass in den beiden erzeugenden Büschel $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ entweder zwei relle oder zwei imaginäre Paare entsprechender, und gleichzeitig paralleler Strahlen vorkommen. Im ersteren Falle ergeben die beiden Strahlenpaare zwei reelle unendlich ferne Kurvenpunkte, und ihre Richtungen bestimmen zugleich die Richtungen der entsprechenden Asymptoten; im zweiten Falle hingegen hat die Kurve keine reellen unendlich fernen Punkte, ist mithin eine Ellipse.

Wird demnach eine Hyperbel durch projektivische Strahlenbüschel erzeugt, so ist die Angabe einer Asymptotenrichtung gleichwertig mit der Angabe zweier entsprechender Strahlen. Es kann somit der Satz aufgestellt werden:

„Eine Hyperbel ist durch drei Punkte und die Richtungen ihrer Asymptoten vollständig gegeben.“

Bezeichnen wir allenfalls die drei gegebenen Punkte mit **A**, **B**, **C** und die Geraden, welche die Asymptotenrichtungen vorstellen, mit **d** und **e**, so sind die unendlich fernen Punkte $\mathbf{D}_\infty$ und $\mathbf{E}_\infty$ zwei weitere Kurvenpunkte; die Kurve ist daher durch fünf Punkte gegeben. Wählt man **A** und **B** als Scheitel zweier die

Kurve erzeugenden projektivischen Büschel, so gehen durch **C** zwei entsprechende Strahlen; ein zweites Paar entsprechender Strahlen erhält man als die Parallelen durch **A** und **B** zu **d**, und ein drittes Paar als die Parallelen durch **A** und **B** zu **e**, womit die Projektivität festgestellt ist.

In gleicher Weise gelten die folgenden Sätze, welche durch blosse Spezialisierung der in § 127 und § 143 angeführten Sätze gewonnen werden.

„Eine Hyperbel ist eindeutig gegeben: a) durch eine Asymptote und drei Punkte oder Tangenten und b) durch die beiden Asymptoten und einen Punkt oder eine Tangente.“

Da ferner eine Asymptote nichts anderes als eine Tangente einer Kurve zweiten Grades ist, welche einen unendlich fernen Berührungspunkt besitzt, so werden selbstverständlich alle früher bewiesenen projektivischen Sätze über „Tangenten einer Kurve zweiten Grades und ihre Berührungspunkte“ auch für die Asymptoten einer Hyperbel ihre volle Gültigkeit beibehalten.

§ 175.

Die projektivische Erzeugung einer Parabel.

In § 141 wurde nachgewiesen, dass sämtliche Tangenten einer Kurve zweiten Grades auf zwei festen Tangenten stets projektivische Punktreihen bestimmen.

Ist diese Kurve insbesondere eine Parabel, d. h. ist die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Kurve, so wird dieselbe ebenfalls zwei einander entsprechende, gleichzeitig aber unendlich ferne Punkte der vorgenannten Reihen bestimmen; die letzteren werden also (Satz in § 167) projektivisch ähnlich sein und es kann behauptet werden:

„Sämtliche Tangenten einer Parabel bestimmen auf zwei festen Tangenten dieser Kurve zweiten Grades stets zwei projektivisch-ähnliche Reihen.“

Und umgekehrt:

„Das Erzeugnis zweier projektivisch-ähnlichen Reihen ist immer eine Parabel.“

Berücksichtigt man ferner, dass die Träger der eine Kurve zweiten Grades erzeugenden Punktreihen Tangenten der Kurve sind, so wird man im Falle einer Parabel auch die unendlich

ferne Tangente als Träger der einen Reihe annehmen können. Mit Bezug auf die vorher (in § 166) erwähnte Darstellungsweise einer Punktreihe auf der unendlich fernen Geraden ergibt sich sonach der folgende Satz:

„Die durch die einzelnen Punkte irgend einer Reihe zu den entsprechenden Strahlen eines mit jener Reihe projektivischen Strahlenbüschels geführten Parallelen umhüllen eine Parabel, welche auch von dem Träger der Reihe berührt wird.“

Nachdem für jede Parabel die unendlich ferne Gerade von vornherein eine Tangente, also ein einfaches Bestimmungsstück repräsentiert, so ist klar, dass zur Bestimmung einer Parabel vier weitere einfache Stücke (Punkte oder Tangenten) genügen.

Eine Parabel wird somit (Satz in § 143) durch vier Tangenten eindeutig bestimmt erscheinen. Ferner ergibt sich als Folgerung aus dem Satze in § 136 sofort der Spezialsatz:

„Durch vier gegebene Punkte gehen stets zwei Parabeln.“

Überdies haben die sämtlichen für „Tangenten einer Kurve zweiten Grades“ bewiesenen projektivischen Sätze (wenn auch in spezieller Form) ihre volle Gültigkeit für die unendlich ferne Gerade als Parabeltangente.

§ 176.

Durchmesser, Mittelpunkt, Achsen der Kurven zweiten Grades.

Zu den wichtigsten metrischen Eigenschaften der Kurven zweiten Grades kann man durch Anwendung der vorausgeschickten, allgemein bewiesenen polaren Eigenschaften auf unendlich ferne Elemente gelangen.

Sei **K** [Fig. 148, Taf. VIII] eine beliebige Kurve zweiten Grades; ferner sei $\mathbf{P}_\infty$ ein (durch die Richtung beliebiger paralleler Strahlen gegebener) unendlich ferner Punkt.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche mit $\mathbf{P}_\infty$ in bezug auf die Kurve **K** konjugiert sind, ist (Satz 1 in § 152) eine Gerade **d**, d. i. die Polare des Punktes $\mathbf{P}_\infty$. Infolge der unendlich fernen Lage des Punktes $\mathbf{P}_\infty$ wird dieser Geraden **d** eine besondere metrische Eigenschaft zukommen.

Ein beliebiger Strahl des Parallelbüschels $\mathbf{P}_\infty$ trifft nämlich die Kurve **K** in zwei Punkten $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{b}_1$ und die Gerade **d** in

einem Punkte n_1. Nachdem aber n_1 und P_∞ durch a_1 und b_1 harmonisch getrennt sind, folgt (Satz in § 160), dass n_1 der Mittelpunkt der Strecke $a_1 b_1$ ist. Ebenso wird jeder andere Strahl des Parallelbüschels P_∞ die Kurve in zwei Punkten und die Gerade **d** in dem Mittelpunkte der durch diese Punkte bestimmten Kurvensehne treffen.

Sind ferner von P_∞ aus zwei Tangenten an die Kurve **K** möglich, so geht die Gerade **d** (Satz 1, § 152) auch durch die Berührungspunkte **r** und **s** derselben. Es besteht mithin der spezielle Satz:

„Der geometrische Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Kurve zweiten Grades ist eine Gerade, welche auch durch die Berührungspunkte der beiden zu jenen Sehnen parallelen Tangenten geht.“

Die Gerade **d** wird ein *„Durchmesser“* der Kurve **K** genannt, und da derselbe nach der in § 155 aufgestellten Definition mit jeder durch P_∞ gehenden Geraden konjugiert ist, bezeichnet man die besagte Gerade **d** als den jener Parallelsehnenschar, welche durch **d** gleichzeitig halbiert wird, konjugierten Durchmesser.

Im Falle die Kurve **K** eine Ellipse ist, liegt die unendlich ferne Gerade ganz ausserhalb der Kurve, und es können daher durch jeden unendlich fernen Punkt, also in jeder Richtung zwei reelle zu einander parallele Tangenten an **K** gezogen werden, d. h. jeder Durchmesser trifft die Kurve in zwei reellen Punkten, welche seine *„Endpunkte“* genannt werden.

Ist die Kurve **K** eine Hyperbel, welche bekanntlich die unendlich ferne Gerade in zwei reellen Punkten schneidet, so liegt ein Teil der besagten Geraden ausserhalb der Kurve, und es können daher von den Punkten dieses Teils reelle Tangenten an die Kurve geführt werden; der andere Teil der unendlich fernen Geraden jedoch fällt innerhalb der Kurve. Dass von den Punkten des letztgenannten Teils keine reellen Tangenten möglich sind, ist selbstverständlich. Infolge dessen entsprechen allen Punkten des ersten Teiles Durchmesser mit reellen Endpunkten, allen Punkten des zweiten Teiles dagegen Durchmesser mit imaginären Endpunkten. Aus diesem Grunde pflegt man (allerdings nicht mit voller Berechtigung) die erstgenannten Durchmesser als *„reelle Durchmesser“*, die letzteren hingegen als *„imaginäre“* oder *„ideelle Durchmesser“* der Hyperbel zu bezeichnen.

Ist die Kurve **K** eine Parabel, so treten besondere Verhältnisse ein.

Da nämlich diesfalls die unendlich ferne Gerade selbst eine Tangente von **K** ist, so repräsentiert sie stets die eine von den beiden durch einen beliebigen unendlich fernen Punkt möglicherweise zu führenden Kurventangenten. Es gibt somit nur eine im Endlichen liegende, durch einen unendlich fernen Punkt gehende (d. i. zu einer beliebigen Richtung parallele) Tangente.

Die Durchmesser der Parabel als Polaren der unendlich fernen Punkte müssen sodann sämtlich durch den Berührungspunkt der unendlich fernen Tangente gehen, sind also durchwegs zu einander parallel. Es gilt sonach der Satz:

„An eine Parabel kann in jeder Richtung nur eine im Endlichen liegende Tangente gezogen werden.“

Und:

„Sämtliche Durchmesser einer Parabel sind untereinander parallel und gehen durch den Berührungspunkt der Parabel mit der unendlich fernen Geraden.“

§ 177.

Der unendlich fernen Geraden entspricht ebenso, wie jeder beliebigen anderen Geraden in der Ebene einer Kurve **K** zweiten Grades, ein Pol **M** [Fig. 148, Taf. VIII] in bezug auf diese Kurve.

Auf Grundlage vorausgeschickter Erörterungen (Satz 2, § 153) müssen sämtliche Durchmesser **d**, **d'** , . . . von **K**, als Polaren von Punkten der unendlich fernen Geraden, durch den Pol **M** derselben gehen. Nachdem ferner der Punkt **M** mit jedem unendlich fernen Punkte in bezug auf die Kurve **K** konjugiert ist, d. h. da auf jedem Durchmesser **d** der Punkt **M** und der unendlich ferne Punkt $\mathbf{P'_\infty}$ die Endpunkte **r** und **s** dieses Durchmessers harmonisch trennen, folgt (Satz in § 160), dass jeder Durchmesser einer Kurve **K** zweiten Grades durch den Pol **M** der unendlich fernen Geraden halbiert wird. Dies der Grund, weshalb **M** als der *„Mittelpunkt der Kurve“* bezeichnet wird. Es kann somit der Satz aufgestellt werden:

„Jede Kurve zweiten Grades besitzt einen Mittelpunkt, welcher der Pol der unendlich fernen Geraden ist, durch welchen alle Durchmesser gehen, und welcher alle Durchmesser halbiert.“

Ist die Kurve K eine Ellipse, so liegen alle Punkte der unendlich fernen Geraden ausserhalb derselben, der Mittelpunkt der Ellipse mithin innerhalb der Kurve, und gehen durch den letzteren keine reellen Tangenten der Kurve.

In dem Falle jedoch als K eine Hyperbel ist, also K mit der unendlich fernen Geraden zwei reelle Punkte gemein hat, entsprechen den letzteren zwei reelle Tangenten d. s. die Asymptoten der Hyperbel. Diesfalls ist die unendlich ferne Gerade, als die dem Schnittpunkte der Asymptoten entsprechende Berührungssehne (Satz in § 152), gleichzeitig die Polare dieses Schnittpunktes; der letztere muss mithin mit dem Mittelpunkte der Hyperbel identisch sein. Aus diesem Ergebnisse folgt der Satz:

„Die beiden Asymptoten einer Hyperbel gehen stets durch den Mittelpunkt der letzteren.“

Wenn schliesslich die Kurve K eine Parabel ist, so ist die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Kurve; ihr Berührungspunkt muss folglich (Satz 1, § 154) gleichzeitig ihr Pol, also der Mittelpunkt der Parabel sein.

Der erste Teil des vorher bewiesenen Satzes (Satz 1, § 177, Satz 2, § 176) hat auch hier seine Gültigkeit; der zweite Teil (Halbierung der Durchmesser durch den Mittelpunkt) wird bedeutungslos, da der Mittelpunkt der Parabel in unendlicher Entfernung liegt und nebstbei ein Punkt der Kurve selbst ist.

§ 178.

Aus Früherem wissen wir, dass jeder Punkt in der Ebene einer Kurve K zweiten Grades (§ 157) der Scheitel eines polarinvolutorischen Strahlenbüschels in bezug auf diese Kurve ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist jenes polarinvolutorische Büschel, dessen Scheitel der Mittelpunkt der Kurve K ist.

So wie im allgemeinen Falle zwei Strahlen, von welchen der eine durch den Pol des anderen (und selbstverständlich auch umgekehrt) geht, als konjugierte Strahlen in bezug auf die Kurve K definiert wurden, ebenso definieren wir nun im besonderen Falle zwei *„konjugierte Durchmesser“* der Kurve als solche, von welchen der eine durch den Pol des andern geht, oder was (auf Grund der in § 176 angestellten Betrachtungen) dasselbe

ist, deren jeder das zum anderen Durchmesser parallele Sehnensystem halbiert.

Alle Paare konjugierter Durchmesser einer Kurve zweiten Grades bilden (nach § 157) ein involutorisches Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Mittelpunkt der Kurve ist, und dessen Doppelstrahlen die durch den Mittelpunkt gehenden Kurventangenten sind. Dieses involutorische Büschel heisst die *„Durchmesserinvolution“* der Kurve zweiten Grades.

Ist die Kurve eine Ellipse, so sind deren unendlich ferne Punkte, sowie auch die vom Mittelpunkte ausgehenden Kurventangenten imaginär. Die Durchmesserinvolution hat daher keine reellen Doppelstrahlen. Dies ist auch der Grund, warum man allgemein jede Involution, welche imaginäre Doppelelemente besitzt, als eine *„elliptische Involution“* bezeichnet.

Ist die Kurve zweiten Grades eine Hyperbel, so gehen durch den Mittelpunkt derselben zwei reelle Tangenten, die Asymptoten der Kurve. Diese Asymptoten repräsentieren die reellen Doppelstrahlen der Durchmesserinvolution. Man pflegt daher jede Involution, welche reelle Doppelelemente besitzt, eine *„hyperbolische Involution“* zu nennen.

Jede Asymptote, als Doppelstrahl der Durchmesserinvolution, stellt zwei vereinigte konjugierte Durchmesser oder einen mit sich selbst konjugierten Durchmesser vor. Der in § 120 bewiesene erste Satz nimmt demnach, im Falle der Anwendung desselben auf die Durchmesserinvolution einer Hyperbel, folgende Form an:

„Jedes Paar konjugierter Durchmesser einer Hyperbel ist durch die Asymptoten harmonisch getrennt.“

Aus diesem Satze kann anstandslos ein weiterer Satz abgeleitet werden. Ist nämlich **K** [Fig. 149, Taf. VIII] eine Hyperbel, sind σ_1, σ_2 deren Asymptoten, und ist **g** eine beliebige Gerade in der Ebene der Kurve, so wird diese die Hyperbel in den Punkten $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ und die Asymptoten in den Punkten α_1 und α_2 schneiden.

Denken wir uns den zur Geraden **g** parallelen Durchmesser **d'** der Hyperbel, und den mit **d'** und **g** konjugierten Durchmesser **d** gezogen, so wird der letztere (Satz 1 in § 176) die Gerade **g** in dem Halbierungspunkte **o** der Sehne $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ treffen, und weiter werden, wie vorher bewiesen wurde, σ_1, σ_2, **d** und **d'** vier harmonische Strahlen bilden. Infolge des in § 160 aufgestellten Satzes ist **o** nun auch der Mittelpunkt der Strecke $\alpha_1\alpha_2$ und sind folg-

lich die Stücke $\alpha_1 a_1$ und $\alpha_2 a_2$ einander gleich. Es besteht demnach der Satz:

„Die zwischen einer Hyperbel und deren Asymptoten liegenden Stücke einer beliebigen Geraden sind stets gleich lang.“

§ 179.

Es wurde nachgewiesen (§ 173), dass jedes involutorische Strahlenbüschel ein aber auch nur ein Paar aufeinander senkrecht stehender konjugierter Strahlen besitze, vorausgesetzt, dass man es nicht speziell mit einer Rechtwinkelinvolution zu thun hat.

Wenden wir diese Eigenschaft auf die Durchmesserinvolution einer Kurve zweiten Grades an, so finden wir, dass die letztere stets zwei aufeinander senkrecht stehende konjugierte Durchmesser besitze. Da jeder dieser beiden Durchmesser die zu ihm senkrechten (also die zum zweiten Durchmesser parallelen) Sehnen der Kurve halbiert, die letztere folglich symmetrisch teilt, so bezeichnet man diese Durchmesser als die *„Symmetrieachsen“* oder kurz als die *„Achsen“* der Kurve zweiten Grades. Mithin gilt der Satz:

„Jede Kurve zweiten Grades besitzt zwei konjugierte aufeinander senkrecht stehende Durchmesser, d. i. zwei Achsen orthogonaler Symmetrie.“

Ist die Kurve eine Ellipse, so hat jede der beiden Achsen zwei reelle Endpunkte, welche die *„Scheitel“* der Kurve heissen. Die Tangenten in den Scheiteln einer Axe sind stets senkrecht zu der letzteren.

Im Falle einer Hyperbel sind die beiden Achsen, als das einzige rechtwinklige, konjugierte Durchmesserpaar (Satz in § 161 und Satz 1 in § 178), gleichzeitig die Winkelhalbierenden der Asymptoten. Wie weiter den in § 176 angestellten Betrachtungen zu entnehmen ist, hat die eine Achse mit der Hyperbel zwei reelle Punkte, die andere hingegen zwei imaginäre Punkte gemein. Aus diesem Grunde bezeichnet man die erstere als die *„reelle“* die letztere dagegen als die *„ideelle Achse“* der Hyperbel.

Eine Parabel besitzt (in dem Sinne, wie bei der Ellipse und Hyperbel aufgefasst) keine Paare konjugierter Durchmesser, da (Satz 2, § 155) diesfalls die unendlich ferne Gerade den mit jedem Durchmesser konjugierten Durchmesser repräsentiert. Es

fällt mithin auch die eine Achse mit der unendlich fernen Geraden zusammen. Hiernach existiert bloss eine im Endlichen liegende Achse, und zwar ist dieselbe jene Gerade, welche das zu dem Parallelbüschel der Durchmesser senkrechte Sehnensystem halbiert.

§ 180.

Der Kreis als Kurve zweiten Grades und die imaginären unendlich fernen Kreispunkte einer Ebene.

Nehmen wir auf irgend einem beliebigen Kreise **K** [Fig. 150, Taf. VIII] zwei willkürliche Punkte S_1 und S_2 als Scheitel zweier Strahlenbüschel an, und ordnen wir solche Strahlen dieser beiden Büschel einander als entsprechend zu, welche durch dieselben Punkte **A**, **B**, **C** ... des Kreises **K** gehen, so wird die Beziehung dieser Strahlenbüschel eine projektivische sein.

Sind nämlich S_1A und S_1B irgend zwei Strahlen des einen Büschels, S_2A und S_2B die ihnen entsprechenden Strahlen des anderen Büschels, so sind die beiden einander entsprechenden Winkel (S_1A, S_1B) und (S_2A, S_2B) als Peripheriewinkel über einem und demselben Kreisbogen **AB** stets einander gleich. Hieraus folgt unmittelbar, dass die beiden Büschel kongruent und mithin (Satz in § 169) gleichzeitig projektivisch sind. Daher besteht der Satz:

„Jeder Kreis kann auf unendlich viele Arten durch projektivisch-kongruente Strahlenbüschel erzeugt werden und ist daher eine Kurve zweiten Grades.“

Da, wie aus der Elementargeometrie bekannt, jeder Kreisdurchmesser die zu ihm senkrechte Sehnenschar halbiert, also mit dem zu ihm senkrechten Kreisdurchmesser konjugiert ist, so ist die Durchmesserinvolution eines jeden Kreises eine *„Rechtwinkelinvolution“*, und je zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser können gleichzeitig als Achsen des Kreises betrachtet werden.

Umgekehrt kann jede beliebige Rechtwinkelinvolution als Durchmesserinvolution aller jener Kreise betrachtet werden, deren Mittelpunkte mit dem Scheitel dieser Involution zusammenfallen.

Wird nun in Berücksichtigung gezogen, dass die unendlich fernen Punkte zweier konjugierter Durchmesser einer Kurve zweiten Grades stets zwei in bezug auf diese Kurve konjugierte

Punkte sind, dass mithin die Polarinvolution einer beliebigen Kurve zweiten Grades auf der unendlich fernen Geraden der Schnitt der letzteren mit der Durchmesserinvolution dieser Kurve sein muss, und wird ferner berücksichtigt, dass alle Rechtwinkelinvolutionen infolge ihrer gegenseitigen Parallelität auf der unendlich fernen Geraden eine und dieselbe involutorische Punktreihe bestimmen, so folgt unmittelbar, dass die letztgenannte involutorische Reihe die gemeinschaftliche Polarinvolution aller in der Ebene liegenden Kreise vorstellt.

Nachdem aber (Satz in § 156) die imaginären Doppelpunkte dieser Involution, d. h. die unendlich fernen Punkte der imaginären Doppelstrahlen aller Rechtwinkelinvolutionen allen Kreisen der Ebene gemeinschaftlich sind, so besteht der Satz:

„Alle Kreise einer Ebene gehen durch zwei feste imaginäre Punkte der unendlich fernen Geraden dieser Ebene, und zwar durch die (gemeinschaftlichen) unendlich fernen Punkte der imaginären Doppelstrahlen aller Rechtwinkelinvolutionen der genannten Ebene.“

Aus vorliegendem Grunde bezeichnet man diese beiden Punkte als die *„imaginären unendlich fernen Kreispunkte“* oder kurz als die *„Kreispunkte“* der betreffenden Ebene.

Der aufgestellten Definition entsprechend kann demnach jede imaginäre, durch einen der Kreispunkte gehende Gerade als „Doppelstrahl“ irgend einer Rechtwinkelinvolution, oder mit Rücksicht auf den Begriff der letzteren, als die Vereinigung zweier imaginären aufeinander senkrecht stehenden Strahlen aufgefasst werden.

§ 181.

Die Brennpunkte einer Kurve zweiten Grades.

In § 157 wurde nachgewiesen, dass jeder Punkt in der Ebene einer Kurve zweiten Grades der Scheitel eines polarinvolutorischen Strahlenbüschels ist, dessen (reelle oder imaginäre) Doppelstrahlen die beiden (reellen oder imaginären) von jenem Punkte ausgehenden Kurventangenten sind.

Es fragt sich nun, ob es in der besagten Ebene der Kurve solche Punkte gebe, für welche die bezeichnete Polarinvolution gleichzeitig eine Rechtwinkelinvolution wird.

Vor allem ist einleuchtend, dass die imaginären Doppel-

strahlen einer derartigen Rechtwinkelinvolution einerseits Tangenten der betreffenden Kurve seien, und dass dieselben anderseits, wie aus der Schlussbemerkung des vorhergehenden Paragraphs erklärlich, durch die beiden Kreispunkte der Ebene gehen.

Wenn also derartige Punkte existieren, so müssen es die vier Schnittpunkte jener beiden imaginären Tangentenpaare sein, die von den beiden Kreispunkten der Ebene der Kurve zweiten Grades an die letztere gezogen werden können.

Bevor wir darauf übergehen, zu untersuchen, ob diese Punkte alle reell oder alle imaginär, oder teilweise (paarweise) reell und imaginär sind, wollen wir noch einige Betrachtungen über ihre allgemeine Lage anstellen.

Zunächst ist klar, dass ein Punkt, dessen Polarinvolution bezüglich einer Kurve zweiten Grades eine Rechtwinkelinvolution sein soll, nicht ausserhalb der Kurve liegen kann, da in diesem Falle die Doppelstrahlen der Polarinvolution, als die durch den bezeichneten Punkt gezogenen Tangenten, stets reell sind.

Ferner ist unschwer zu erkennen, dass ein derartiger Punkt nur auf einer Achse der Kurve liegen kann, indem, wenn dies nicht der Fall wäre, der durch den besagten Punkt gehende Durchmesser, sowie auch die durch ihn gehende mit diesem Durchmesser konjugierte Sehne der Kurve, ein Paar nicht aufeinander senkrecht stehender konjugierter Strahlen vorstellen würden, was bei einer Rechtwinkelinvolution unmöglich ist.

Wird nun auf einer der Achsen wirklich ein reeller Punkt gefunden, welcher den Scheitel einer rechtwinkligen Polarinvolution vorstellt, so existiert, infolge der Symmetrie der Kurve gegen ihre beiden Achsen, notwendig noch ein zweiter reeller Punkt gleicher Eigenschaft auf derselben Achse, welcher selbstverständlich mit dem ersteren symmetrisch gegen den Kurvenmittelpunkt liegen wird.

§ 182.

Sei **K** [Fig. 151, Taf. VIII] eine beliebige Kurve zweiten Grades, **M** ihr Mittelpunkt; **XX** und **YY** seien ihre beiden Achsen.

Wir wählen zunächst einen beliebigen Durchmesser **d** der Kurve und auf diesem irgend einen Punkt **P**. Die Polare **p** des Punktes **P** ist bekanntlich parallel zu dem mit **d** konjugierten Durchmesser und möge allenfalls die Achse **XX** in $\mathbf{a}_1$, die Achse **YY** dagegen in $\mathbf{b}_1$ treffen. Weiter führen wir durch den Pol **P** die

Senkrechte **s** zu der ihm zugehörigen Polare **p**, wodurch als Schnittpunkte von **s** mit den beiden Achsen **XX** und **YY** die bezüglichen Punkte $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_2$ erhalten werden.

Die beiden Geraden **p** und **s** repräsentieren (Definition in § 155) zwei konjugierte Polaren in bezug auf die Kurve **K**, welche Polaren gleichzeitig aufeinander senkrecht stehen; ihr Schnittpunkt **m** wird im allgemeinen auf keiner der beiden Achsen liegen.

Denken wir uns den Punkt **P** auf dem Durchmesser **d** beweglich, so wird man, allen möglichen Lagen desselben entsprechend, auf gleiche Weise wie vorher, unendlich viele Paare konjugierter und gleichzeitig aufeinander senkrecht stehender Geraden **p** und **s** erhalten.

Hierbei werden alle Geraden **p**, als parallel zu dem mit **d** konjugierten Durchmesser (Satz in § 158), ein mit der Punktreihe **P**... auf **d** projektivisches Parallelstrahlenbüschel bilden, und weiter werden alle Geraden **s**, als senkrecht zu den Geraden **p**, ein zweites Parallelstrahlenbüschel erzeugen, welches die Reihe **P**... projiziert, also mit dem Büschel der Geraden **p** gleichfalls projektivisch sein wird. Hieraus folgt aber, dass auch die sämtlichen Reihen, welche von den Punkten $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ auf **XX** resp. **YY** beschrieben werden, als Schnitte von **XX** und **YY** mit den beiden projektivischen Parallelstrahlenbüscheln (**p** . . .) und (**s** . . .) untereinander projektivisch sind.

Es ist leicht zu zeigen, dass einerseits die beiden Reihen ($\mathbf{a}_1$ . . .) und ($\mathbf{a}_2$ . . .) eine Involution auf **XX**, und anderseits die beiden Reihen ($\mathbf{b}_1$ . . .) und ($\mathbf{b}_2$ . . .) eine Involution auf **YY** bilden; denn lässt man **P** mit dem Mittelpunkte **M** der Kurve zusammenfallen, so gelangt $\mathbf{a}_1$ auf **XX** in unendliche Entfernung, während $\mathbf{a}_2$ mit **M** zusammenfällt. Wählt man hingegen für **P** den unendlich fernen Punkt $\mathbf{P}_\infty$ von **d**, so tritt an die Stelle von $\mathbf{a}_1$ der Mittelpunkt $\mathbf{M}_1$ und an die Stelle von $\mathbf{a}_2$ der unendlich ferne Punkt von **XX**.

Nachdem also **M** und der unendlich ferne Punkt von **XX** zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen ($\mathbf{a}_1$ . . .) und ($\mathbf{a}_2$ . . .) sind, und es auch dann bleiben, wenn man sie vertauscht, so sind (§ 119) die genannten beiden Reihen auf **XX** zu einer Involution vereinigt, deren Centralpunkt (§ 170) der Kurvenmittelpunkt **M** ist. In gleicher Weise findet man, dass auch die beiden Reihen ($\mathbf{b}_1$ . . .) und ($\mathbf{b}_2$ . . .) auf **YY** eine Involution

bilden, deren Centralpunkt gleichfalls durch den Kurvenmittelpunkt **M** vertreten erscheint.

Man kann sich nun sofort durch unmittelbare Anschauung die Uberzeugung verschaffen, dass, welches auch immer die Lage der beiden rechtwinkligen Geraden **p** und **s** sein mag, ihre Schnittpunkte mit der einen Axe (in Fig. 151, Taf. VIII die Schnittpunkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ mit **XX**) stets auf derselben Seite von **M**, und ihre Schnittpunkte mit der anderen Achse (also $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ auf **YY**) immer zu verschiedenen Seiten von **M** liegen müssen, dass also die eine Involution [in Fig. 151 $(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots)$] stets eine hyperbolische mit reellen Doppelpunkten, die andere dagegen [in Fig. 151 $(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots)$] stets eine elliptische mit imaginären Doppelpunkten sei.

Weiter liefern die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\mathbf{Ma}_1\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{Ma}_2\mathbf{b}_2$ die Beziehung:

$$\mathbf{Ma}_1 : \mathbf{Mb}_1 = \mathbf{Mb}_2 : \mathbf{Ma}_2 \text{ oder}$$
$$\mathbf{Ma}_1 \cdot \mathbf{Ma}_2 = \mathbf{Mb}_1 \cdot \mathbf{Mb}_2,$$

welche aussagt, dass (Satz in § 170) die beiden Involutionen $(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots)$ und $(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots)$ den gleichen Modul besitzen.

Beschreibt man endlich über $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ als Durchmesser den Kreis γ, so scheidet derselbe die Gerade **XX** in den Doppelpunkten $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ der Involution $(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 \ldots)$; denn (Satz in § 170) es ist:

$$\overline{\mathbf{MF}_1^2} = \overline{\mathbf{MF}_2^2} = \mathbf{Mb}_1 \cdot \mathbf{Mb}_2 = \mathbf{Ma}_1 \cdot \mathbf{Ma}_2.$$

Da der Doppelpunkt $\mathbf{F}_1$ zwei konjugierte Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ der Involution $(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots)$ auf **XX** vereinigt, so gehen durch denselben zwei zu **p** und **s** parallele, also aufeinander senkrecht stehende konjugierte Geraden der Kurve **K**. Ein zweites Paar solcher Geraden ist aber offenbar durch die Achse **XX** selbst und durch die zu ihr senkrechte durch $\mathbf{F}_1$ gehende Gerade repräsentiert. Der Punkt $\mathbf{F}_1$ ist mithin (Satz 2, § 173) der Scheitel einer rechtwinkligen Polarinvolution. Dasselbe gilt auch von dem zweiten Doppelpunkte $\mathbf{F}_2$ und ebenso auch von den beiden imaginären Doppelpunkten $\mathbf{F}_i^1$ und $\mathbf{F}_i^2$ der Involution $(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots)$ auf **YY**.

Nachdem wir aber in Vorhergegangenem, von den Kreispunkten ausgehend, gezeigt haben, dass überhaupt nicht mehr als vier derartige Punkte vorhanden sein können, so müssen die besagten Kreispunkte eben die vorgenannten vier Punkte $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_i^1$ und $\mathbf{F}_i^2$ sein. Man würde daher zu den nämlichen vier

Punkten (also auch zu denselben Involutionen ($\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,..$) und ($\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2\,...$) auf **XX** und **YY**) auch dann gelangen, wenn man dem ursprünglich gewählten Durchmesser **d** jede beliebige andere Lage gegeben hätte. Die vorbezeichneten vier Punkte heissen die *„Brennpunkte“* der Kurve **K** zweiten Grades. Es besteht sonach der Satz:

„In der Ebene einer jeden Kurve zweiten Grades gibt es vier Brennpunkte, das sind Punkte, welche Scheitel rechtwinkliger Polarinvolutionen für diese Kurve sind. Zwei dieser Punkte sind reell und liegen auf der einen Achse der Kurve symmetrisch gegen den Mittelpunkt, während die beiden anderen imaginär sind und auf der zweiten Achse der besagten Kurve liegen.“

Die Achse, welche die reellen Brennpunkte enthält, pflegt man daher auch die *„Brennpunktsachse“*, die andere hingegen die *„Nebenachse“* der Kurve zweiten Grades zu nennen.

§ 183.

Aus der beliebigen Annahme des Durchmessers **d** und des Punktes **P** auf demselben ist zu entnehmen, dass auch die beiden Geraden **p** und **s** zwei beliebige zu einander senkrechte und in bezug auf **K** konjugierte Strahlen vorstellen. Es folgen somit aus den vorstehenden Betrachtungen noch folgende zwei Sätze:

„Legt man durch die beiden Punkte, in welchen irgend zwei zu einander rechtwinklige in bezug auf eine Kurve zweiten Grades konjugierte Geraden die Nebenachse dieser Kurve treffen, und durch den Schnitt der beiden letztgenannten Geraden einen Kreis, so geht dieser stets durch die beiden reellen Brennpunkte der Kurve.“

Und umgekehrt:

„Verbindet man die beiden Punkte, in welchen ein beliebig durch die Brennpunkte einer Kurve zweiten Grades gelegter Kreis die Nebenachse der Kurve schneidet, mit einem beliebigen Punkte der Kreisperipherie, so erhält man stets zwei rechtwinklige konjugierte Polaren der Kurve.“

§ 184.

Aus den eben bewiesenen Sätzen lassen sich auch mit Leichtigkeit die aus der Elementargeometrie bekannten Eigenschaften der Brennpunkte ableiten.

Sei wieder **K** [Fig. 152, Taf. VIII] eine Kurve zweiten Grades und **P** ein beliebiger Punkt in ihrer Ebene. Wird durch **P** und

durch die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 ein Kreis γ gelegt, so wird dieser die Nebenachse in zwei Punkten b_1 und b_2 schneiden, welche, den vorstehenden Sätzen gemäss, mit P verbunden zwei rechtwinklig konjugierte Polaren ergeben, oder mit anderen Worten, die beiden Geraden Pb_1 und Pb_2 repräsentieren das konjugierte Rechtwinkelpaar jener Polarinvolution, welche ihren Scheitel in P hat.

Nach den Ausführungen in § 173 sind sodann diese beiden Geraden auch die Winkelhalbierenden der Doppelstrahlen dieser Polarinvolution, d. h. die Winkelhalbierenden der von P aus gezogenen Kurventangenten τ_1 und τ_2. Verbindet man weiter P mit den Brennpunkten F_1 und F_2, so sind, infolge der gleichen Bögen F_1b_2 und F_2b_2, die Peripheriewinkel F_1Pb_2 und F_2Pb_2 einander gleich; die beiden Geraden Pb_1 und Pb_2 sind somit auch die Halbierenden des Winkels F_1PF_2. Daher gilt der Satz:

„Das von einem Punkte an eine Kurve zweiten Grades gezogene Tangentenpaar und das von demselben Punkte nach den beiden Brennpunkten geführte Strahlenpaar besitzen dieselben Winkelhalbierenden, oder mit anderen Worten, die eine Tangente bildet mit dem nach dem einen Brennpunkte gezogenen Strahle denselben Winkel, wie die zweite Tangente mit dem nach dem anderen Brennpunkte gehenden Strahle.“

Liegt der Punkt P insbesondere auf der Kurve K selbst, so ist seine Tangente und seine Normale das einzige Paar der durch ihn gehenden rechtwinklig-konjugierten Polaren.

Die von den Brennpunkten nach dem Kurvenpunkte geführten Strahlen heissen diesfalls die *„Brennstrahlen“* oder die *„Vectoren“* des Kurvenpunktes; der eben bewiesene Satz erhält daher nachstehende besondere und bekannte Form:

„Die Brennstrahlen eines Punktes einer Kurve zweiten Grades bilden gleiche Winkel mit der diesem Punkte entsprechenden Tangente, sowie auch mit der zugehörigen Normalen.“

§ 185.

Bezeichnen wir die Berührungspunkte von τ_1 und τ_2 [Fig. 152, Taf. VIII] beziehungsweise mit p_1 und p_2, so sind, dem eben ausgesprochenen Satze gemäss, die Brennstrahlen F_1p_1 und F_2p_1 gegen τ_1 gleich geneigt. Trägt man ferner auf der Verlängerung von F_2p_1 die Strecke $p_1\alpha_1 = p_1F_1$ auf, so ist $F_1\alpha_1p_1$ ein gleichschenk-

liches Dreieck, es steht also die Gerade $F_1\alpha_1$ senkrecht zu τ_1 und wird durch τ_1 in β_1 halbiert. Zieht man weiter die Gerade $P\alpha_1$, so ist auch $\measuredangle \alpha_1 P p_1 = \measuredangle p_1 P F_1$, und $\alpha_1 P = F_1 P$. Wird in gleicher Weise auf der Verlängerung von $F_1 p_2$ die Strecke $p_2\alpha_2 = p_2 F_2$ aufgetragen und α_2 mit P verbunden, so wird aus gleichen Gründen $\measuredangle \alpha_2 P p_2 = \measuredangle p_2 P F_2$ und $\alpha_2 P = F_2 P$ sein.

Nachdem weiter (Satz 1 in § 184) die Winkel $p_1 P F_1$ und $p_2 P F_2$ einander gleich sind, folgt auch die Gleichheit der (doppelt so grossen) Winkel $\alpha_1 P F_1$ und $\alpha_2 P F_2$, sowie die Gleichheit der Winkel $\alpha_1 P F_2$ und $\alpha_2 P F_1$.

Diese Betrachtungen führen zu dem Schlusse, dass die beiden Dreiecke $\alpha_1 P F_2$ und $\alpha_2 P F_1$ kongruent, mithin die Strecken $F_1\alpha_2$ und $F_2\alpha_1$ gleichlang sind. Der durchgeführten Konstruktion gemäss repräsentieren aber diese Strecken nichts anderes als die Summe der den Punkten p_1 und p_2 entsprechenden Brennstrahlen.

Berücksichtigt man nun, dass die beiden Punkte p_1 und p_2 zwei ganz beliebige Kurvenpunkte repräsentieren, so folgt aus der Gleichheit der Brennstrahlensummen der besagten Punkte ganz allgemein die Gleichheit oder Konstanz der Brennstrahlensummen aller Kurvenpunkte. Wählt man statt p_2 beispielsweise den einen Endpunkt A der Brennachse, so wird auch für diesen Punkt $F_1 A + F_2 A = F_1 p_1 + F_2 p_1$ sein.

Ist B der zweite Endpunkt der Brennpunktsachse, so ist $F_1 A = F_2 B$ und mithin $F_1 A + F_2 A = F_2 B + F_2 A = AB$. Hieraus folgt der bekannte Satz:

„Die (algebraische) Brennstrahlensumme eines beliebigen Punktes einer Kurve zweiten Grades ist stets der Länge der Brennpunktsachse gleich.“

Ohne uns hier in eine nahezu gleichlautende Wiederholung des Beweises einzulassen mag nur kurz erwähnt werden, dass im Falle einer Hyperbel an die Stelle der Brennstrahlensumme die Brennstrahlendifferenz tritt.

§ 186.

Aus den beiden kongruenten Dreiecken $\alpha_1 P F_2$ und $\alpha_2 P F_1$ [Fig. 152, Taf. VIII] folgt weiter auch die Gleichheit der Winkel $P\alpha_1 F_2$ und $P F_1 \alpha_2$. Ferner sind die Winkel $P\alpha_1 F_2$ und $P F_1 p_1$ einander gleich, es wird mithin dasselbe auch von den Winkeln $p_1 F_1 P$ und $p_2 F_1 P$ gelten, und daher der Satz bestehen:

„Die von einem Brennpunkte einer Kurve zweiten Grades nach zwei beliebigen Kurvenpunkten gezogenen Strahlen schliessen einen Winkel ein, dessen eine Winkelhalbierende stets durch den Schnittpunkt der beiden, jenen Kurvenpunkten entsprechenden Tangenten geht.“

§ 187.

Sind t_1 und t_2 [Fig. 153, Taf. VIII] zwei beliebige Tangenten einer Kurve **K** zweiten Grades, a_1 und a_2 deren Berührungspunkte, **F** der eine Brennpunkt der Kurve, und schneidet eine beliebige dritte (bewegliche) Tangente t_x mit dem Berührungspunkte **x** die festen Tangenten t_1 und t_2 in α_1 resp. α_2, so ist nach dem eben bewiesenen Satze $F\alpha_1$ die eine Winkelhalbierende des Winkels a_1Fx, und $F\alpha_2$ die eine Halbierende des Winkels a_2Fx, mithin $\sphericalangle \alpha_1F\alpha_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle a_1Fa_2$. Nachdem aber a_1 und a_2 als fest gedacht werden, muss $\sphericalangle \alpha_1F\alpha_2$ eine konstante Grösse besitzen, welches auch die Lage der Tangente t_x sein mag; es gilt daher der Satz:

„Die Stücke sämtlicher Tangenten einer Kurve zweiten Grades, welche von zwei festen Kurventangenten begrenzt sind, erscheinen von einem Brennpunkte der Kurve aus gesehen unter einem und demselben Winkel.“

§ 188.

Verbindet man den Mittelpunkt **M** [Fig. 152, Taf. VIII] der Kurve zweiten Grades mit dem Fusspunkte β_1 des vom Brennpunkte F_1 auf die Tangente τ_1 gefällten Perpendikels, so wird, da $F_1M = F_2M$ und $F_1\beta_1 = \alpha_1\beta_1$ ist, notwendig $M\beta_1 = \frac{1}{2} F_2\alpha_1 = \frac{1}{2} AB$, d. i. gleich der halben Brennpunktsachse sein. Hiernach besteht der Satz:

„Der Fusspunkt des von einem Brennpunkte einer Kurve zweiten Grades auf eine beliebige Tangente gefällten Perpendikels liegt stets auf dem über der Brennpunktsachse als Durchmesser beschriebenen Kreise.“

Ist die Kurve speziell eine Parabel, die Brennpunktsachse also unendlich gross, so tritt an die Stelle des eben genannten Kreises die Tangente der Parabel in dem im Endlichen liegenden Scheitel, und man erhält demnach folgenden Spezialsatz:

„Der Fusspunkt des vom Brennpunkte einer Parabel auf eine

Tangente der letzteren gefällten Perpendikels liegt stets in der Scheiteltangente.“

Auf Grund des vorhergehenden allgemeineren Satzes lässt sich leicht die Achsenbestimmung einer durch einen Brennpunkt und drei Tangenten gegebenen Kurve zweiten Grades vollziehen. Man wird nämlich durch die Fusspunkte der vom Brennpunkte aus auf die drei Tangenten gefällten Perpendikel einen Kreis legen, und die Brennpunktsachse der Lage und Grösse nach als den durch den Brennpunkt gezogenen Durchmesser dieses Kreises erhalten.

§ 189.

Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten zweier Kurven zweiten Grades.

Nachdem eine Kurve zweiten Grades durch fünf Punkte vollständig und eindeutig gegeben ist, so kann man durch vier beliebig angenommene Punkte **a**, **b**, **c**, **d** unendlich viele derartige Kurven legen, indem man dem zu wählenden fünften Punkte beliebige Lagen erteilt.

Hieraus folgt unmittelbar, dass zwei Kurven zweiten Grades nicht mehr als vier Punkte gemein haben können, ohne zusammen zu fallen.

Aus der Kontinuität zweier projektivischen Strahlenbüschel ergibt sich auch die Kontinuität einer Kurve zweiten Grades (als das Erzeugnis zweier solcher Büschel), d. h. jede Kurve zweiten Grades zeigt eine stetige in sich zurückkehrende Aufeinanderfolge von Punkten, gleichgültig, ob dabei, wie bei der Hyperbel und der Parabel, ein Durchgang durch das Unendliche stattfindet, oder ob das letztere, wie bei der Ellipse, nicht der Fall ist.

Haben nun irgend zwei geschlossene Kurven einen reellen Punkt gemein, so entnehmen wir schon der blossen Anschauung, dass dieselben mindestens noch einen zweiten reellen Punkt gemeinschaftlich besitzen müssen, jedoch auch jede beliebige weitere gerade Anzahl reeller Punkte gemein haben können.

Es können mithin zwei Kurven zweiten Grades entweder keine, zwei, oder vier reelle Punkte, nie aber einen oder drei Punkte gemein haben.

Setzen wir nun voraus, zwei Kurven K_1 und K_2 [Fig. 154,

Taf. VIII] zweiten Grades mögen in der That durch die beiden reellen Punkte S_1 und S_2 gehen, so ist die Möglichkeit vorhanden, dass sie entweder noch weitere zwei reelle Schnittpunkte oder aber auch keinen mehr besitzen. Es fragt sich daher, wie das Eintreten des letzteren Falles aufzufassen sei. Um dies zu konstatieren, denken wir uns die beiden Kurven K_1 und K_2 auf folgende Weise erzeugt.

Ein beliebiger durch S_1 geführter Strahl α_1 hat mit den beiden Kurven K_1 und K_2 ausser dem Punkte S_1 noch je einen zweiten Punkt, und zwar mit K_1 den Punkt A_1 und mit K_2 den Punkt A_2 gemein. Diese beiden Punkte verbinden wir mit S_2 durch die Strahlen α_2 und α'_2. Erteilt man dem Strahle durch S_1 eine andere Lage, etwa jene β_1, so ergeben sich in gleicher Weise zwei Punkte B_1 und B_2, und ebenso zwei durch diese letzteren Punkte gehende Strahlen β_2 und β'_2, so dass, wenn nach und nach alle möglichen Strahlen herangezogen werden, man zwei Strahlenbüschel $S_2(\alpha_2\beta_2\ldots)$ und $S_2(\alpha'_2\beta'_2\ldots)$ erhält, welche beide mit dem Strahlenbüschel $S_1(\alpha_1\beta_1\ldots)$, also auch untereinander projektivisch sind, und mithin zwei reelle oder zwei imaginäre Doppelstrahlen besitzen müssen.

Sind diese Doppelstrahlen reell, so geht jeder von ihnen durch einen von S_1 und S_2 verschiedenen reellen gemeinschaftlichen Punkt, nämlich durch jenen Punkt, in welchen dieser Doppelstrahl von dem ihm im Büschel $S_1(\alpha_1\beta_1\ldots)$ entsprechenden Strahle geschnitten wird. In diesem Falle haben beide Kurven K_1 und K_2 vier reelle gemeinschaftliche Punkte.

Sind hingegen die vorgenannten Doppelstrahlen imaginär, so existieren ausser S_1 und S_2 keine weiteren reellen Schnittpunkte von K_1 und K_2. Da wir jedoch die Existenz imaginärer Doppelstrahlen annehmen, folgt hieraus auch die Existenz zweier imaginärer Schnittpunkte von K_1 und K_2, so dass auch in diesem Falle die beiden Kurven K_1 und K_2 vier gemeinsame Punkte besitzen, von welchen jedoch zwei reell und zwei imaginär sind.

Dieser Anschauungsweise gemäss nimmt man endlich auch an, dass zwei Kurven zweiten Grades, welche keinen einzigen reellen Punkt gemein haben, sich in vier imaginären Punkten schneiden.

Betrachtungen, welche den eben angestellten dual entsprechen, führen bezüglich der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kurven zweiten Grades zu gleichen Resultaten. Man findet

auch hier wieder, dass zwei solche Kurven stets vier gemeinschaftliche Tangenten besitzen, welche entweder alle reell oder alle imaginär, oder aber paarweise reell und paarweise imaginär sein können.

§ 190.

Gemeinschaftliche Poldreiecke zweier Kurven zweiten Grades; Berührung zweier Kurven zweiten Grades.

Wenn zwei Kurven K_1 und K_2 [Fig. 155, Taf. VIII] zweiten Grades vier relle gemeinschaftliche Punkte **a**, **b**, **c**, **d** besitzen, so ist das Diagonaldreieck **MNR** jenes vollständigen Viereckes, dessen Eckpunkte **a**, **b**, **c**, **d** sind, offenbar ein Poldreieck oder ein sich selbst konjugiertes Dreieck beider Kurven K_1 und K_2.

Auch in dem Falle, als zwei Kurven zweiten Grades vier reelle gemeinschaftliche Tangenten besitzen, existiert ein gemeinsames Polardreieck, und zwar ist dieses wieder das Diagonaldreieck jenes vollständigen Vierseites, dessen Seiten die genannten vier Tangenten sind; denn das besagte Diagonaldreieck ist (nach Satz 2, § 129) gleichzeitig auch ein Diagonaldreieck zweier Vierecke, von welchen das eine der Kurve K_1, das andere dagegen der Kurve K_2 eingeschrieben ist.

Die Existenz gemeinschaftlicher Pole und Polaren, resp. gemeinschaftlicher Poldreiecke zweier Kurven zweiten Grades lässt sich jedoch auch ganz allgemein, ohne Rücksicht auf die Realität gemeinschaftlicher Punkte und Tangenten dieser Kurven, nachweisen.

Denken wir uns zum Behuf dieses Nachweises in der Ebene der beiden Kurven K_1 und K_2 [Fig. 155, Taf. VIII] eine beliebige Gerade **g** angenommen, und seien beziehungsweise G_1 und G_2 deren Pole für die genannten Kurven.

Bestimmen wir zunächst den Ort jener Punkte, welche mit den Punkten der Geraden **g** in bezug auf beide Kurven K_1 und K_2 gleichzeitig konjugiert sind.

Wählen wir auf **g** einen beliebigen Punkt **P**, so ist der geometrische Ort aller mit **P** konjugierten Punkte in bezug auf K_1 die Polare p_1 von **P** für diese Kurve. Dieselbe geht bekanntlich durch den Pol G_1.

In gleicher Weise repräsentiert die durch G_2 gehende Polare p_2 des Punktes **P** in bezug auf K_2 den geometrischen Ort aller mit **P** bezüglich dieser Kurve K_2 konjugierten Punkte.

Die beiden Geraden p_1 und p_2 schneiden sich in einem Punkte P', welch letzterer mit P sowohl in bezug auf die Kurve K_1, als auch in bezug auf die Kurve K_2 konjugiert ist. In gleicher Weise ergibt sich zu jedem beliebigen anderen Punkte P von g ein konjugierter Punkt P', und der Ort aller Punkte P' ist, wie sich leicht zeigen lässt, eine Kurve Σ_g zweiten Grades.

Während nämlich der Punkt P die Gerade g durchläuft, beschreiben (Satz in § 158) die beiden Polaren p_1 und p_2 zwei mit der Reihe $P \ldots$ auf g, also auch untereinander projektivische Büschel, welche die Punkte G_1 und G_2 als Scheitel besitzen.

Das Erzeugnis dieser beiden Büschel, d. i. der geometrische Ort der Punkte P', ist mithin eine durch G_1 und G_2 gehende Kurve Σ_g zweiten Grades.

Denken wir uns irgend eine zweite beliebige Gerade h angenommen, deren Pole in bezug auf die Kurve K_1 und K_2 beziehungsweise H_1 und H_2 heissen mögen. Der geometrische Ort aller Punkte, welche mit den Punkten der Geraden h in bezug auf beide Kurven K_1 und K_2 zugleich konjugiert sind, ist offenbar wieder eine Kurve Σ_h zweiten Grades, welche durch die Punkte H_1 und H_2 gehen wird.

Die beiden gefundenen Kurven Σ_g und Σ_h schneiden sich in vier Punkten, von welchen, wie unschwer nachzuweisen, mindestens das eine Paar reell sein muss, die aber auch alle reell sein können.

Da nämlich die beiden Geraden g und h stets einen reellen gemeinschaftlichen Punkt S besitzen, so müssen notwendig auch die beiden Kurven Σ_g und Σ_h jenen reellen Punkt S' gemein haben, welcher mit S in bezug auf K_1 und K_2 konjugiert ist, welcher also den Schnitt der Polaren von S in bezug auf K_1 und K_2 repräsentiert.

In diesem Falle haben aber (nach § 189) die beiden Kurven Σ_g und Σ_h notwendig noch einen zweiten reellen Schnittpunkt, oder es können ausser dem erstgenannten noch drei reelle Schnittpunkte vorhanden sein.

Sei M ein derartiger reeller gemeinschaftlicher Punkt von Σ_g und Σ_h. Gemäss der Entstehung der letztbezeichneten Kurven muss M mit einem gewissen Punkte M_g von g und mit einem gewissen Punkte M_h von h in bezug auf die beiden gegebenen Kurven K_1 und K_2 konjugiert sein.

Daraus folgt aber, dass die Gerade $M_g M_h$ die Polare des Punktes **M** sowohl in bezug auf die Kurve K_1, als auch in bezug auf die Kurve K_2 ist, oder mit anderen Worten, dass **M** einen gemeinschaftlichen Pol, und die Gerade $M_g M_h$ eine gemeinschaftliche Polare von K_1 und K_2 vorstellt. Sind auch die beiden übrigen Schnittpunkte **N** und **R** der beiden Kurven Σ_g und Σ_h reell, so repräsentieren dieselben zwei weitere reelle gemeinschaftliche Pole. Wären jedoch **R** und **N** imaginär, so existieren auch zwei imaginäre gemeinschaftliche Pole. Dieselben werden selbstverständlich auf der vorgefundenen gemeinschaftlichen Polare $M_g M_h$ liegen.

Wir wissen nämlich, dass alle Paare konjugierter Punkte von $M_g M_h$ in bezug auf die Kurve K_1 eine Involution J_1 (Satz, § 156), und desgleichen sämtliche Paare konjugierter Punkte von $M_g M_h$ in bezug auf K_2 eine Involution J_2 bilden. Diese beiden Involutionen besitzen (§ 171) ein Paar gemeinschaftlicher konjugierter Punkte **N** und **R** (reell oder imaginär). Dann ist aber die Polare von **N** in bezug auf K_1 und K_2 die Gerade **MR**, und die Polare von **R** in bezug auf K_1 und K_2 die Gerade **NM**, d. h. **N** und **R** sind zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Pole der Kurven K_1 und K_2.

Nachdem die beiden Hilfskurven Σ_g und Σ_h zweiten Grades ausser dem Punkte **S'** überhaupt nur drei weitere Punkte gemein haben können, ohne zusammen zu fallen, so folgt aus den vorstehenden Betrachtungen, dass zwei Kurven zweiten Grades K_1 und K_2 im allgemeinen nur drei „gemeinschaftliche Pole und Polaren“ besitzen, welche stets ein „gemeinschaftliches Polardreieck“ dieser Kurven bestimmen.

Einer der drei gemeinschaftlichen Pole und selbstverständlich auch die entsprechende gemeinschaftliche Polare sind stets reell, die beiden anderen gemeinschaftlichen Pole und Polaren können reell oder imaginär sein.

Im Falle die beiden Kurven K_1 und K_2 zweiten Grades vier reelle gemeinschaftliche Punkte oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten besitzen, kann ihr gemeinschaftliches Poldreieck kein anderes sein, als das Diagonaldreieck des vollständigen Viereckes resp. Vierseites, welches von den genannten vier Punkten oder Tangenten gebildet wird.

Es gibt jedoch einen Ausnahmsfall, entsprechend einer besonderen gegenseitigen Lage zweier Kurven zweiten Grades,

in welchem es unendlich viele gemeinschaftliche Pole und Polaren gibt. Wir werden diesen Fall in der Folge kennen lernen.

§ 191.

Besitzen zwei Kurven zweiten Grades zwei reelle gemeinschaftliche Punkte **a** und **b**, welche gleichzeitig unendlich nahe aneinander liegen, so ist die Verbindungsgerade **t** dieser beiden Punkte eine Tangente beider Kurven, und die Vereinigung (**ab**) derselben ihr „gemeinschaftlicher Berührungspunkt“. Man sagt, dass sich diesfalls die Kurven selbst in einem Punkte (**ab**) *„berühren“*.

Ausser den Punkten **a** und **b**, welche zum „Berührungspunkte“ vereinigt sind, können beide Kurven noch zwei weitere reelle Punkte **c** und **d** gemein haben. Fallen auch diese unendlich nahe aneinander, so gibt es noch eine zweite gemeinschaftliche Tangente **t'** mit dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte (**cd**).

Zwei Kurven zweiten Grades, welche die letztgenannte besondere Lage besitzen, heissen *„Kurven zweiten Grades mit doppelter Berührung“* oder *„sich doppelt-berührende Kurven zweiten Grades.“*

Setzen wir voraus, K_1 und K_2 [Fig. 156, Taf. VIII] seien zwei sich doppelt berührende Kurven zweiten Grades; **A** und **B** seien ihre gemeinschaftlichen Berührungspunkte und t_a, t_b die zugehörigen gemeinschaftlichen Tangenten.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass der Schnittpunkt **S** von t_a und t_b ein gemeinschaftlicher Pol, und die Berührungssehne $s = AB$ die ihm entsprechende gemeinschaftliche Polare beider Kurven K_1 und K_2 sei. Weiter ist aber auch jeder Punkt **P** dieser Berührungssehne **s** ein gemeinschaftlicher Pol beider Kurven. Denn bestimmt man jenen Punkt **P'**, welcher mit **P** das Punktepaar **AB** harmonisch trennt, so repräsentiert die Verbindungsgerade **p** der beiden Punkte **S** und **P'** die Polare von **P** sowohl in bezug auf K_1, als auch in bezug auf K_2. Ein Gleiches gilt offenbar von jedem anderen Punkte der Geraden **AB**. Durch die eben angestellten Betrachtungen und jener der vorhergehenden zwei Artikel gelangen wir demnach zu dem Satze:

„Zwei in derselben Ebene liegende Kurven zweiten Grades besitzen stets vier gemeinschaftliche Punkte und vier gemeinschaftliche

Tangenten. Sowohl die ersteren als auch die letzteren können entweder alle vier reell, oder zwei reell, zwei imaginär, oder endlich alle vier imaginär sein. Weiter besitzen beide Kurven stets drei gemeinschaftliche Pole, wovon der eine immer reell sein muss, die beiden anderen aber reell oder imaginär sein können. Die drei gemeinschaftlichen Pole bilden ein gemeinschaftliches Polardreieck beider Kurven. Im Falle die vier gemeinschaftlichen Punkte oder Tangenten beider Kurven sämtlich reell sind, ist das gemeinschaftliche Polardreieck gleichzeitig das Diagonaldreieck des von jenen vier Pnnkten resp. vier Tangenten gebildeten vollständigen Viereckes oder Vierseites.“

„Berühren sich die beiden Kurven zweiten Grades doppelt, so ist nicht nur der Schnittpunkt ihrer gemeinschaftlichen Tangenten ein gemeinschaftlicher Pol, sondern es gibt ausserdem noch unendlich viele gemeinschaftliche Pole, d. s. die Punkte ihrer gemeinschaftlichen Berührungssehne.“

VI. Kapitel.

Die kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Systeme, und die speziellen Formen derselben.

§ 192.

Den im ersten und zweiten Kapitel gepflogenen Erörterungen entnehmen wir, dass die Centralprojektion eines beliebigen ebenen Gebildes, sobald die Lage des letzteren gegen die Bildebene und das Projektionscentrum bekannt ist, vollständig in der Weise bestimmt sei, dass jedem Punkte des Originales nur ein einziger Punkt der Centralprojektion und umgekehrt entspreche, und dass weiter ebenso jeder Geraden des Originales nur eine einzige Gerade der Centralprojektion und umgekehrt, u. s. w. entspricht. Ferner fanden wir, dass je zwei entsprechende Geraden, d. h. Originalgerade und deren Centralprojektion, einen Punkt der Bildflächtrace der Ebene jenes Gebildes gemein haben, welcher als mit seiner Centralprojektion zusammenfallend anzusehen ist.

Es ist selbstverständlich, dass diese Beziehung zwischen einem ebenen Gebilde und seiner Centralprojektion ohne weiteres eine

vertauschbare sei, indem man ebenso gut das als Centralprojektion erhaltene Gebilde als „Originalgebilde“ und das ursprüngliche Originalgebilde als dessen Centralprojektion auffassen kann.

In dieser allgemeineren Auffassung von der Bedeutung als „Centralprojektion“ abgesehen, haben wir eine „gegenseitige Verwandtschaft“ zweier ebenen Gebilde, oder noch allgemeiner, zweier „ebenen Systeme“ vor uns, welche durch folgende Merkmale charakterisiert erscheint.

Es liegen zwei Ebenen E_1 und E_2 in gegebener gegenseitiger Lage vor. Diese Ebenen werden als „Trägerebenen“ zweier „ebenen Systeme“, d. i. als Inbegriff aller in ihnen liegenden Punkte, Geraden, Polygone, Kurven u. s. w. gedacht. Besagte Systeme sind genau so aufeinander bezogen wie dieses in der Centralprojektion durch Zuhilfenahme eines festen ausserhalb der Ebenen E_1 und E_2 liegenden Punktes C geschah.

Jedem Punkte a_1 des Systems S_1 in der Ebene E_1 entspricht sodann ein, aber auch nur ein einziger Punkt a_2 des Systems S_2 in der Ebene E_2 d. i. der Schnittpunkt der letzteren mit dem Strahle Ca_1, und umgekehrt. Jeder Geraden g_1 des Systems S_1 entspricht im Systeme S_2 eine, aber auch nur eine einzige Gerade g_2, d. i. der Schnitt der Ebene E_2 mit der (projizierenden) Ebene (C, g_1) und umgekehrt, so zwar, dass je zwei entsprechende Punkte von S_1 und S_2 stets auf einem durch C gehenden Strahle, und je zwei entsprechende Geraden von S_1 und S_2 stets in einer durch C gehenden Ebene liegen.

Was speziell die Schnittgerade A der beiden Trägerebenen E_1 und E_2 betrifft, so ist jeder Punkt derselben „sich selbstentsprechend“, denn in ihm fallen immer die Schnittpunkte von E_1 und E_2 mit einem durch C gehenden Strahle zusammen. Ebenso ist auch die Gerade A eine „sich selbstentsprechende“ Gerade der Systeme S_1 und S_2; denn sie vereinigt in sich die Schnitte der Trägerebenen mit der durch C gehenden Ebene (C, A).

Die auf diese Weise hergestellte Beziehung der beiden Systeme S_1 und S_2 wird eine *„perspektivisch-kollineare Verwandtschaft“* dieser Systeme genannt. Der Punkt C, welcher die Rolle des vermittelnden Projektionscentrums spielt, heisst das *„Kollineationscentrum“*, und die Gerade A, in welcher sich die Trägerebenen E_1 und E_2 schneiden, wird als die sich *„selbstentsprechende Gerade“* oder als die *„Kollineationsachse“* bezeichnet.

Ferner sind noch besonders zu erwähnen: die *„Kollineations-*

strahlen“ d. s. alle durch das Kollineationscentrum gehenden Strahlen, und weiter *„kollineare Elemente* und *Gebilde“* d. h. „sich entsprechende“ Elemente (Punkte und Geraden) und Gebilde der beiden Systeme S_1 und S_2. Diese letzteren selbst pflegt man *„perspektivisch-kollineare Systeme“* zu nennen.

§ 193.

Die weiteren wesentlichen Eigenschaften der perspektivischen Kollineation zweier ebenen Systeme ergeben sich aus der soeben aufgestellten Definition und aus elementaren stereometrischen Eigenschaften, sowie auch aus der Centralprojektion, indem man die bereits bekannten Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen unmittelbar verwertet.

So ergibt sich ohne weiteres, dass einem Punkte und einer durch ihn gehenden Geraden des einen Systems stets wieder ein Punkt und eine durch den letzteren gehende Gerade des zweiten Systems entspricht; dass der Verbindungsgeraden zweier beliebigen Punkte des einen Systems die Verbindungsgerade der entsprechenden Punkte des zweiten Systems; dass ferner dem Schnittpunkte irgend zweier Geraden des einen Systems der Schnittpunkt der entsprechenden zwei Geraden im anderen Systeme; dass weiter einem Dreiecke wieder ein Dreieck, einem vollständigen Viereck oder Vierseit mit seinem Diagonaldreieck beziehungsweise wieder ein vollständiges Viereck oder Vierseit mit seinem Diagonaldreieck; einem n-eck wieder ein n-eck u. s. w. entspricht.

Man kann dies kurz durch folgende Sätze zum Ausdrucke bringen.

„Zwei einander perspektivisch-kollinear entsprechende Gebilde sind stets gleichartig, d. h. dieselben sind aus einer gleichen Anzahl von gleichartigen Elementen auf genau übereinstimmende Weise zusammengesetzt.“

Und (nach der in § 104 gegebenen Erklärung):

„Sind zwei Elemente irgend eines ebenen Systemes in incidenter Lage, so befinden sich auch die ihnen entsprechenden Elemente eines mit dem genannten Systeme kollinearen ebenen Systems in incidenter Lage.“

§ 194.

Aus dem letztangeführten Satze kann sofort eine weitere wichtige Eigenschaft, die projektivischen Gebilde betreffend, abgeleitet werden.

Bezeichnet in dem einen von zwei perspektivisch-kollinearen Systemen S_1 und S_2, beispielsweise in S_1, die Gerade r_1 den Träger einer Punktreihe $a_1 b_1 c_1 \ldots$, so werden den Elementen a_1, b_1, $c_1 \ldots$ der letzteren im Systeme S_2 wieder die Elemente a_2, b_2, $c_2 \ldots$ einer Punktreihe entsprechen, deren Träger die der vorgenannten Geraden r_1 kollinear entsprechende Gerade r_2 ist.

Nachdem die beiden einander kollinear entsprechenden Punktreihen $(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ und $(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ Schnitte der Geraden r_1 und r_2 mit einem und demselben Strahlenbüschel (welches seinen Scheitel im Kollineationscentrum hat, also von Kollineationsstrahlen gebildet ist) vorstellen, so sind dieselben gleichzeitig perspektivisch.

Denken wir uns ferner in einem von zwei kollinearen ebenen Systemen S_1 und S_2, etwa in S_1, ein Strahlenbüschel $M_1(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots)$, welches seinen Scheitel in dem Punkte M_1 haben möge.

Wie vorher nachgewiesen wurde, wird diesem Strahlenbüschel im Systeme S_2 ein gleichartiges Gebilde, d. i. wieder ein Strahlenbüschel $M_2(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots)$ entsprechen, und weiter werden (nach dem letztausgesprochenen Satze) auch die Scheitel M_1 und M_2 beider Strahlenbüschel kollinear entsprechende Punkte sein.

Berücksichtigen wir ferner, dass je zwei entsprechende Strahlen α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und $\gamma_2 \ldots$ stets einen Punkt $a, b, c \ldots$ der selbstentsprechenden Geraden oder Kollineationsachse A gemein haben, so folgt, dass beide zu der Punktreihe $(abc \ldots)$ von A perspektivisch sind.

Lassen wir die früher (in § 106) aufgestellte Definition zweier perspektivischen Strahlenbüschel, als „Scheine oder Projektionen einer und derselben Punktreihe“, auch in dem Falle gelten, wenn die besagten zwei Büschel in verschiedenen Ebenen liegen, so können wir nun auch behaupten, dass irgend zwei einander kollinear entsprechende Strahlenbüschel stets perspektivisch sind, und dass ihr „perspektivischer Durchschnitt“ in der Kollineationsachse liege.

Der in § 100 aufgestellte Satz liefert ohne weiteres die Eigenschaft, dass vier harmonischen Punkten kollinear stets wieder vier harmonische Punkte und vier harmonischen Strahlen kollinear stets wieder vier harmonische Strahlen entsprechen.

Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen, die wir jedoch an dieser Stelle, ihrer grossen Einfachheit halber, unterdrücken wollen, gelangt man ganz allgemein zu dem Resultate, dass, so-

bald zwei ebene Systeme S_1 und S_2 perspektivisch kollinear sind, irgend zwei perspektivischen oder projektivischen Grundgebilden von S_1 stets wieder zwei untereinander perspektivische oder projektivische Grundgebilde im Systeme S_2 kollinear entsprechen und umgekehrt; dass weiter einem involutorischen Gebilde wieder ein solches, und dass einer Kurve zweiten Grades ebenfalls eine solche entspreche; dass ferner, wenn K_1 und K_2 zwei sich kollinear entsprechende Kurven zweiten Grades repräsentieren, und P_1 und p_1 beziehungsweise der Pol und die Polare in bezug auf K_1 sind, auch die kollinear entsprechenden Elemente P_2 und p_2 den Pol und die Polare bezüglich K_2 darstellen u. s. w. Alles dies lässt sich mit wenigen Worten in nachstehendem Satze resümieren:

„Sind zwei ebene Systeme perspektivisch kollinear aufeinander bezogen, und besitzen irgend welche Gebilde in dem einen Systeme einen beliebigen rein projektivischen Zusammenhang, so stehen auch die denselben im zweiten Systeme kollinear entsprechenden Gebilde in derselben projektivischen Beziehung.“

§ 195.

Sind E_1 und E_2 die Trägerebenen zweier perspektivisch kollinearen Systeme S_1 und S_2; C das Kollineationscentrum, und führt man durch letzteres die beiden Ebenen P_u^1 und P_u^2 parallel zu E_1 resp. E_2, so schneiden dieselben die Trägerebenen E_2 resp. E_1 in den zur Kollineationsachse A parallelen Geraden G_2 resp. H_1.

Der Kollineationsstrahl, welcher nach einem beliebigen Punkte u_2 der Geraden G_2 geführt wird, ist stets parallel zur Trägerebene E_1, schneidet dieselbe mithin in einem unendlich fernen Punkte u_1, welcher dem Punkte u_2 entspricht. Hieraus folgt, dass die Gerade G_2 der Ort aller jener Punkte des Systems S_2 ist, welche den unendlich fernen Punkten von S_1 entsprechen, oder mit anderen Worten: die Gerade G_2 des Systems S_2 entspricht der unendlich fernen Geraden des Systems S_1.

In gleicher Weise findet man, dass die Gerade H_1 des Systems S_1 der unendlich fernen Geraden des Systems S_2 kollinear entspricht.

In anderer, spezieller Bedeutung haben wir diese beiden Geraden gelegentlich der centralprojektivischen Darstellung einer Ebene (§ 7 und § 11) als „Fluchttrace“ und „Spurgerade“

kennen gelernt. Mit Rücksicht auf die in § 166 gewählten Bezeichnungen nennen wir die beiden Geraden G_2 und H_1 die *„Gegenachsen“* der kollinearen Systeme S_1 und S_2.

Die Bedeutung der beiden Gegenachsen für metrisch-projektivische Beziehungen ist leicht erkenntlich. So findet man beispielsweise unmittelbar durch Anwendung des Incidenzsatzes (Satz 2, § 193), dass jene Punkte, in welchen die Träger zweier kollinearen Punktreihen die beiden Gegenachsen treffen, die „Gegenpunkte“ dieser Reihen sind.

Stellen ferner K_1 und K_2 zwei einander kollinear entsprechende Kurven zweiten Grades vor, und ist M_1 der Pol von H_1 in bezug auf K_1, so wird (Satz in § 194) der entsprechende Punkt M_2 der Pol der unendlich fernen Geraden in bezug auf K_2, d. h. der Mittelpunkt von K_2 sein. Zwei durch M_1 gehenden in bezug auf K_1 konjugierten Geraden werden sodann kollinear zwei durch M_2 gehende in bezug auf K_2 konjugierte Geraden, d. i. zwei konjugierte Durchmesser von K_2 entsprechen, u. s. w.

§ 196.

Besondere Formen der perspektivischen Kollineation. Perspektivische Ähnlichkeit, Affinität und Kongruenz.

Wenn die Trägerebenen E_1 und E_2 zweier perspektivisch kollinearen Systeme insbesondere parallel sind, so liegen deren Schnitt, d. h. die Kollineationsachse A und die beiden Gegenachsen, als Schnitte der Ebenen E_1 und E_2 mit den zu ihnen durch das Kollineationscentrum parallel gelegten Ebenen, im Unendlichen, oder mit anderen Worten: die (gemeinschaftliche) unendlich ferne Gerade der beiden kollinearen Systeme ist sich selbstentsprechend.

Je zwei einander kollinear entsprechende Geraden sind untereinander parallel, da sie die Schnitte der parallelen Trägerebenen E_1 und E_2 mit einer und derselben durch das Kollineationscentrum gehenden Ebene repräsentieren.

Eine weitere Folge hiervon ist, dass je zwei einander kollinear entsprechende Winkel, d. h. Winkel, welche von Paaren entsprechender Geraden gebildet werden, gleich gross, und mithin je zwei einander entsprechende Gebilde der beiden Systeme „ähnlich“ sind.

Diese besondere kollineare Beziehung wird daher auch als

„*perspektivische Ähnlichkeit*“ bezeichnet; hierbei tritt also an die Stelle des Kollineationscentrums das „*Ähnlichkeitscentrum*“.

Eine andere besondere Form perspektivischer Kollineation ergibt sich aus der Voraussetzung, dass zwar die Trägerebenen E_1 und E_2 der beiden Systeme nicht zu einander parallel sind, dass jedoch das Kollineationscentrum in unendlicher Ferne liegt und daher sämtliche Kollineationsstrahlen dieselbe — sonst beliebige — Richtung besitzen.

In diesem Falle liegen die beiden unendlich fernen Geraden der Trägerebenen E_1 und E_2 in einer und derselben durch das (unendlich ferne) Kollineationscentrum gehenden Ebene, d. i. in der unendlich fernen Ebene selbst, stellen somit zwei einander entsprechende Geraden vor. Hieraus folgt einerseits, dass keine (im Endlichen liegenden) Gegenachsen vorhanden sind, und anderseits, dass jedem unendlich fernen Punkte des einen Systems wieder ein unendlich ferner Punkt des anderen Systems zugeordnet ist, oder was dasselbe bedeutet, dass irgend zwei parallelen Geraden des einen Systems zwei parallele Geraden des anderen Systems entsprechen.

Diese Verwandtschaft (welcher in der darstellenden Geometrie die Parallelprojektion entspricht) heisst die „*Affinität*“ oder die „*affinperspektivische Beziehung*“ zweier ebenen Systeme. Die Schnittgerade der Trägerebenen wird diesfalls die „*Affinitätsachse*“ und die parallelen Strahlen, welche entsprechende Punkte verbinden, werden die „*Affinitätsstrahlen*“ genannt.

Endlich ergibt sich noch eine dritte besondere Form kollinearer Beziehung, wenn man die bezüglich der Ähnlichkeit und der Affinität gemachten speziellen Annahmen gleichzeitig gelten lässt, d. h. wenn man zwei parallele Trägerebenen und überdies ein unendlich fernes Kollineationscentrum voraussetzt. Dass in diesem Falle je zwei einander kollinear entsprechende Gebilde „kongruent“ sind, bedarf nicht erst eines besonderen Nachweises. Zwei derart aufeinander bezogene ebene Systeme pflegt man als „*affin-kongruent*“ zu bezeichnen.

§ 197.

Konlokale kollineare Systeme oder ebene perspektivische Kollineation.

Denkt man sich die Trägerebenen zweier kollinearen Systeme in einer und derselben Ebene E vereinigt, und setzt man

ein ausserhalb **E** liegendes Kollineationscentrum **C** voraus, so ist die kollineare Beziehung einfach dadurch charakterisiert, dass jeder Punkt mit seinem zugeordneten Punkte unmittelbar zusammenfällt, oder dass die beiden Systeme vollkommen identisch sind.

Anders gestaltet sich die Sache dann, wenn überdies auch noch das Kollineationscentrum **C** in die beiden vereinigten Trägerebenen verlegt wird. Es fragt sich diesfalls, ob unter der gemachten Voraussetzung wirklich eine Kollineation denkbar sei, d. h. ob, mit Rücksicht auf die in den vorhergehenden Artikeln gegebenen Definitionen, zwei in einer und derselben Ebene liegende ebene Systeme derart aufeinander bezogen werden können, dass:

a) gleichartigen Elementen und Gebilden wieder gleichartige Elemente und Gebilde entsprechen;

b) dass je zwei entsprechende Punkte auf einem durch einen festen Punkt gehenden Strahle liegen, und

c) dass sich je zwei entsprechende Geraden in irgend einem Punkte einer festen Geraden schneiden.

Wie ohne weiteres einzusehen, hat man bloss zwei perspektivisch kollineare ebene Systeme im Raume auf eine Ebene zu projizieren, um in der letzteren die in Rede stehende Verwandtschaft zu erhalten.

Die beiden aufeinander bezogenen Systeme sind nämlich diesfalls die Projektionen der beiden ebenen Systeme im Raume; der feste Punkt, durch welchen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte gehen, ist die Projektion des Kollineationscentrums, und die feste Gerade, in welcher sich entsprechende Geraden schneiden, ist die Projektion der Kollineationsachse, d. h. der Schnittgeraden der beiden Trägerebenen im Raume. Dies genügt, um die Möglichkeit der vorangeführten Beziehung zweier in derselben Trägerebene vereinigten Systeme darzuthun.

Diese Verwandtschaft bezeichnet man als *„ebene perspektivische Kollineation“* oder kurz als *„Kollineation“* der beiden Systeme im engeren Sinne. Dieselbe ist für projektivische Konstruktionen und Untersuchungen von grösster Wichtigkeit, daher wir uns mit derselben näher beschäftigen wollen.

Sei **C** [Fig. 157, Taf. VIII] das Kollineationscentrum, **AA** die Kollineationsachse, und seien a_1 und a_2 zwei einander entsprechende Punkte der beiden Systeme S_1 und S_2.

Mit Hilfe dieser Elemente kann zu jedem beliebigen Punkte

$\mathbf{b_1}$ von $\mathbf{S_1}$ der kollinear entsprechende Punkt $\mathbf{b_2}$ von $\mathbf{S_2}$ gefunden werden und umgekehrt. Durch die genannten Elemente ($\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$) ist sonach die kollineare Beziehung vollkommen festgestellt; denn verbindet man $\mathbf{a_1}$ mit $\mathbf{b_1}$ durch die Gerade $\mathbf{l_1}$, welche die Kollineationsachse $\mathbf{A}$ in $\mathbf{d}$ schneiden möge, so wird dieser Geraden $\mathbf{l_1}$ im Systeme $\mathbf{S_2}$ die Verbindungsgerade $\mathbf{l_2}$ von $\mathbf{a_2}$ mit dem zu bestimmenden Punkte $\mathbf{b_2}$ entsprechen. Nachdem aber die Gerade $\mathbf{l_2}$ auch durch $\mathbf{d}$ gehen muss, wird dieselbe als die Verbindungsgerade von $\mathbf{a_2}$ und $\mathbf{d}$ bestimmt erscheinen. Da endlich je zwei entsprechende Punkte stets auf einem durch das Kollineationscentrum $\mathbf{C}$ gehenden Strahle liegen, so erhält man $\mathbf{b_2}$ im Schnitte von $\mathbf{l_2} = \mathbf{a_2 d}$ mit dem Strahle $\mathbf{C b_1}$. In gleicher Weise kann zu jedem anderen Punkte von $\mathbf{S_1}$ der entsprechende Punkt in $\mathbf{S_2}$, und ebenso umgekehrt, zu jedem Punkte von $\mathbf{S_2}$ der entsprechende Punkt von $\mathbf{S_1}$ konstruiert werden.

Wenn von zwei kollinearen Systemen $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ drei Paare entsprechender Punkte $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$; $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}$ und $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$, welche selbstverständlich auf drei durch einen und denselben Punkt $\mathbf{C}$ (das Kollineationscentrum) gehenden Strahlen liegen müssen, als bekannt vorliegen, so ist hierdurch die kollineare Beziehung zwischen $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ ebenfalls vollständig festgestellt; denn im Schnitte der einander entsprechenden Verbindungsgeraden $\mathbf{a_1 b_1}$ und $\mathbf{a_2 b_2}$ erhält man einen, und im Schnitte der einander entsprechenden Verbindungsgeraden $\mathbf{a_1 c_1}$ und $\mathbf{a_2 c_2}$ einen zweiten Punkt der Kollineationsachse. Dass sich auch die Geraden $\mathbf{b_1 c_1}$ und $\mathbf{b_2 c_2}$ in einem Punkte dieser Kollineationsachse schneiden müssen, wurde bereits anderweitig bewiesen (1. Fundamentalsatz, § 91).

Ebenso leicht überzeugt man sich, dass drei Paare entsprechender Geraden (deren Schnittpunkte selbstverständlich auf einer und derselben festen Geraden, d. i. der Kollineationsachse liegen müssen) die kollineare Verwandtschaft vollkommen bestimmen, indem das Kollineationscentrum im Schnitte jener Strahlen erhalten wird, welche die Schnittpunkte entsprechender Geradenpaare verbinden. (Man vergleiche diesbezüglich den 2. Fundamentalsatz, § 92.)

Sind $\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}$ [Fig. 157, Taf. VIII] wieder beziehungsweise das Kollineationscentrum und die Kollineationsachse; sind ferner $\mathbf{l_1}$ und $\mathbf{l_2}$ irgend zwei einander entsprechende Geraden, und zieht man durch das Kollineationscentrum $\mathbf{C}$ einen zu $\mathbf{l_2}$ parallelen Strahl, so trifft dieser die beiden Geraden $\mathbf{l_1}$ und $\mathbf{l_2}$ in zwei

einander entsprechenden Punkten, und zwar die Gerade l_1 in dem Punkte v_1, die Gerade l_2 dagegen in deren unendlich fernen Punkt v_2^∞.

Da zwei Geraden, wovon die eine durch v_1 die andere durch v_2^∞ geht, sich stets entsprechen werden, wenn sie sich in einem Punkte der Kollineationsachse **A** schneiden, so werden auch jene Geraden kollinear sein, welche v_1 und v_2^∞ mit dem unendlich fernen Punkte der Kollineationsachse verbinden.

Die eine dieser Geraden ist die durch v_1 zur Kollineationsachse **A** Parallele H_1, während die andere, als Verbindungsgerade des unendlich fernen Punktes v_2^∞ mit dem unendlich fernen Punkte von **A**, durch die unendlich ferne Gerade der Trägerebene selbst dargestellt erscheint. Die Gerade H_1 (des Systems S_1) entspricht somit kollinear der unendlich fernen Geraden der Trägerebene (aufgefasst als Gerade des Systems S_2), oder H_1 ist (§ 195) die „Gegenachse“ im System S_1.

Wenn man umgekehrt durch das Kollineationscentrum **C** den zu l_1 parallelen Strahl führt, so trifft derselbe die entsprechende Gerade l_2 in dem Punkte u_2, welcher dem unendlich fernen Punkte u_1^∞ von l_1 entspricht. Die durch u_2 zur Kollineationsachse **A** Parallele G_2 wird hiernach wieder jene Gerade des Systems S_2 repräsentieren, welche der unendlich fernen Geraden des Systems S_1 entspricht. Die Gerade G_2 ist folglich die „Gegenachse“ im Systeme S_2.

Berücksichtigt man weiter, dass die beiden Strecken Cv_1 und u_2d parallel und gleich lang sind, so werden auch ihre bezüglichen (orthogonalen) Projektionen **Cn** und **pm** auf die durch **C** senkrecht zur Kollineationsachse **A** gezogene Gerade einander gleich sein müssen, oder mit anderen Worten: die eine Gegenachse hat von dem Kollineationscentrum dieselbe Entfernung, wie die Kollineationsachse von der zweiten Gegenachse; weiter folgt die letztere auf die Kollineationsachse in demselben Fortschreitungssinne, wie das Kollineationscentrum auf die erste Gegenachse.

Durch Angabe des Kollineationscentrums, der Kollineationsachse und einer der Gegenachsen ist die kollineare Beziehung zweier ebenen Systeme vollständig bestimmt. Ein beliebig gezogener Kollineationsstrahl liefert stets zwei entsprechende Punkte, d. i. seinen unendlich fernen Punkt und seinen Schnittpunkt mit der Gegenachse, so dass die Bestimmung der Kollinea-

tion mit der bereits eingangs dieses Paragraphen angegebenen Bestimmungsweise identisch ist. Diese Resultate zusammengefasst, erhält man den Satz:

„Zwei (in derselben Ebene liegende) ebene perspektivisch-kollineare Systeme besitzen stets zwei Gegenachsen, d. h. Geraden, welche den unendlich fernen Geraden dieser Systeme entsprechen. Besagte Gegenachsen sind parallel zur Kollineationsachse; die eine Gegenachse hat vom Kollineationscentrum den nämlichen Abstand und dieselbe Folge, wie die Kollineationsachse von der zweiten Gegenachse.“

„Zwei (in derselben Ebene liegende) kollineare Systeme sind vollständig bestimmt:

a) durch das Kollineationscentrum, die Kollineationsachse und ein Paar entsprechender Punkte oder Geraden;

b) durch drei Paare entsprechender Punkte oder Geraden;

c) durch das Kollineationscentrum, die Kollineationsachse und eine der beiden Gegenachsen.“

§ 198.

Seien wieder **C** und **A** [Fig. 157, Taf. VIII] das Kollineationscentrum und die Kollineationsachse; ferner seien $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ sowie auch $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ je ein Paar entsprechender Punkte.

Da sich die beiden Verbindungsgeraden $\mathbf{l}_1 = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{l}_2 = \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2$ kollinear entsprechen, so müssen sie notwendig einen Punkt **d** der Kollineationsachse gemein haben.

Bezeichnen wir die Punkte, in welchen die Kollineationsstrahlen $\mathbf{Ca}_1\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{Cb}_1\mathbf{b}_2$ die Kollineationsachse **A** schneiden, mit α und β, so findet man, dass die beiden Würfe $(\mathbf{C}\alpha\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)$ und $(\mathbf{C}\beta\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2)$ perspektivisch liegen, da der eine die Projektion des anderen vom Punkte **d** aus vorstellt. Diese beiden Würfe besitzen mithin Doppelverhältnisse von gleichem Werte **k**.

Das entsprechende Punktepaar $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ kann aber weiter auch durch ein beliebig anderes Paar $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ ersetzt werden, und man wird wieder $(\mathbf{C}\gamma\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2) = (\mathbf{C}\alpha\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) = \mathbf{k}$ finden.

Hieraus folgt, dass das Doppelverhältnis, welches das Kollineationscentrum — als ersten Fixpunkt —, irgend ein Paar entsprechender Punkte — als Teilpunkte —, und der Schnittpunkt ihres Kollineationsstrahles mit der Kollineationsachse — als zweiten Fixpunkt — ergibt, für alle Paare entsprechender Punkte das gleiche ist, und folglich auch für eine und dieselbe kollineare Beziehung einen konstanten Wert besitzt.

Dieses Doppelverhältnis wird, da es für eine bestimmte, vorliegende kollineare Beziehung charakteristisch ist, die *„Charakteristik“* oder der *„Modul“* dieser Beziehung genannt.

§ 199.

Bisher wurde dargethan, dass die wesentlichen durch die Definition bedingten Eigenschaften für zwei perspektivisch kollineare ebene Systeme stets volle Geltung haben, einerlei ob diese Systeme in verschiedenen Trägerebenen liegen, oder aber in derselben Trägerebene vereinigt sind. Es werden somit auch für den letzteren Fall die früher (in den §§ 193, 194) bewiesenen Sätze ihre Gültigkeit beibehalten, und werden ebenso die (in § 196) bezüglich besonderer Formen kollinearer Beziehung gefundenen Resultate in dem Falle ihre Anwendung finden können, wenn die Systeme in derselben Trägerebene vereinigt sind.

Nehmen wir an, es sei **C** [Fig. 158, Taf. VIII] das Kollineationscentrum, und setzen wir die Kollineationsachse als unendlich ferne voraus, so wird sich eine besondere kollineare Beziehung herausstellen, die wir (so wie in § 196) als *„kollineare Ähnlichkeit“* bezeichnen wollen.

Liegen nun auf irgend einem Kollineations- oder Ahnlichkeitsstrahle zwei beliebige entsprechende („ähnlich gelegene“) Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, und soll beispielsweise zu einem gegebenen Punkte $\mathbf{b}_1$ der entsprechende Punkt $\mathbf{b}_2$ gefunden werden, so kann folgendermassen vorgegangen werden. Man führt zunächst die Verbindungsgerade $\mathbf{h}_1 = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$. Dieser Geraden muss offenbar eine zweite, $\mathbf{h}_2$, entsprechen, welche die Verbindungsgerade des Punktes $\mathbf{a}_2$ mit dem zu bestimmenden Punkte $\mathbf{b}_2$ repräsentieren wird. Nachdem aber je zwei entsprechende Geraden sich in einem Punkte der Kollineationsachse schneiden müssen, so werden dieselben unter der oben gemachten Voraussetzung insbesondere zu einander parallel sein. Man erhält mithin $\mathbf{h}_2$ als die Parallele durch $\mathbf{a}_2$ zu $\mathbf{h}_1$ und endlich auf $\mathbf{h}_2$ den gesuchten Punkt $\mathbf{b}_2$ im Schnitte mit dem Ahnlichkeitsstrahle $\mathbf{Cb}_1$.

Denken wir uns wieder aus dem Kollineations- (Ahnlichkeits-) Centrum **C**, aus dem in diesem Falle unendlich fernen Punkte α des Kollineations- oder Ähnlichkeitsstrahles und dem Punktepaar $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ (nach der Definition in § 198) den

„*Modul*“ gebildet, so erhalten wir

$$\frac{\mathbf{C}a_1}{\alpha a_1} : \frac{\mathbf{C}a_2}{\alpha a_2} = \frac{\mathbf{C}a_1}{\mathbf{C}a_2} : \frac{\alpha a_1}{\alpha a_2}$$

als Wert desselben. Nachdem aber die beiden Strecken $\alpha\mathbf{a}_1$ und $\alpha\mathbf{a}_2$ unendlich gross sind, ihr Verhältnis also durch die Einheit ausgedrückt erscheint, so tritt an die Stelle des Doppelverhältnisses ($\mathbf{C}\alpha\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$) das einfache Verhältnis: $\frac{\mathbf{C}a_1}{\mathbf{C}a_2}$ und es besteht sonach der Satz:

„In zwei kollinear-ähnlichen ebenen Systemen besitzen die Entfernungen entsprechender Punkte von dem Ähnlichkeitscentrum ein konstantes Verhältnis.“

Nehmen wir anderseits an, die Kollineationsachse **A** [Fig. 159, Taf. VIII] liege in endlicher, das Kollineationscentrum $\mathbf{C}_\infty$ jedoch in unendlicher Entfernung, setzen wir also die (in § 196) als *„Affinität“* bezeichnete besondere kollineare Verwandtschaft voraus, und wählen wir auf einem beliebigen Affinitätsstrahle irgend zwei einander entsprechende Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$.

Die Konstruktion eines anderweitigen Paares entsprechender Punkte, beispielsweise $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$, ist wieder dieselbe wie im allgemeinen Falle, d. h. man wird die Verbindungsgerade $\mathbf{h}_1 = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$ ziehen, den Punkt $\mathbf{d}_1$, in welchem $\mathbf{h}_1$ die Affinitätsachse **A** schneidet, mit $\mathbf{a}_2$ durch die entsprechende Gerade $\mathbf{h}_2$ verbinden und auf der letzteren mit dem durch $\mathbf{b}_1$ (parallel zu $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$) geführten Affinitätsstrahle den gesuchten Punkt $\mathbf{b}_2$ finden.

Um den *„Modul“* der affinen Beziehung zu erhalten, haben wir (§ 198) das Doppelverhältnis ($\mathbf{C}_\infty\,\alpha\,\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2$) zu bilden. Dieses ergibt:

$$\frac{\mathbf{C}_\infty a_1}{\alpha a_1} : \frac{\mathbf{C}_\infty a_2}{\alpha a_2} = \frac{a_2\alpha}{a_1\alpha} : \frac{\mathbf{C}_\infty a_2}{\mathbf{C}_\infty a_1}.$$

Das Verhältnis $\frac{\mathbf{C}_\infty a_2}{\mathbf{C}_\infty a_1}$ ist infolge der unendlichen Entfernung von $\mathbf{C}_\infty$ gleich der Einheit, und der Modul erscheint diesfalls durch das einfache Verhältnis: $\frac{a_2\alpha}{a_1\alpha}$ ausgedrückt. Mithin besteht der Satz:

„Im Falle zweier affin-kollinearer ebener Systeme ist das Verhältnis der Abstände je zweier entsprechenden Punkte von dem Schnittpunkte ihres Affinitätsstrahles mit der Affinitätsachse konstant.“

Nebenbei erwähnt, findet man auch (durch Anwendung des Satzes 1 in § 197) ohne Schwierigkeit, dass sowohl im Falle zweier kollinear-ähnlichen, als auch im Falle zweier kollinear-affinen Systeme keine eigentlichen Gegenachsen vorhanden sind, oder mit anderen Worten, dass sie beide in die unendlich ferne Gerade fallen.

§ 200.

Involutorische Kollineation.

Zwei in einer und derselben Trägerebene vereinigte Systeme S_1 und S_2 können noch in einer weiteren besonderen kollinearen Beziehung stehen, welche bei kollinearen ebenen Systemen in verschiedenen Ebenen nicht auftreten kann.

Dieser Fall findet dann statt, wenn die beiden Gegenachsen H_1 und G_2 [Fig. 160, Taf. VIII] in einer und derselben Geraden vereinigt sind.

Hierbei ist es (nach Satz 1, § 197) unumgänglich notwendig, dass die genannte Gerade den Abstand des Kollineationscentrums **C** von der Kollineationsachse **A** halbiert.

Nehmen wir unter dieser Voraussetzung eine beliebige Gerade l_1 im Systeme S_1 an, welche die Kollineationsachse **A** in **d** und die Gegenachse H_1 in u_1 treffen möge.

Da dem Punkte u_1 der unendlich ferne Punkt des durch ihn gehenden Kollineationsstrahles Cu_1 entspricht, so erhält man die entsprechende Gerade l_2 des Systems S_2 einfach als die Parallele durch **d** zu Cu_1.

Betrachten wir nun die gefundene Gerade l_2 als ein Element des Systems S_1 und bezeichnen wir sie in dieser Eigenschaft mit l'_1. Die ihr entsprechende Gerade l'_2 des Systems S_2 wird durch **d** gehen müssen. Führen wir weiter den zu l'_1 parallelen Kollineationsstrahl (der diesfalls schon als Strahl Cu_1 vorhanden ist), so wird derselbe die Gegenachse G_2 in einem Punkte v'_2 treffen, welcher dem unendlich fernen Punkte v'_1 von l'_1 entspricht. Besagter Punkt v'_2 mit **d** verbunden gibt sonach die gesuchte Gerade l'_2. Berücksichtigt man aber, dass der Punkt v'_2 infolge der vereinigten Gegenachsen G_2 und H_1 mit dem bereits früher benützten Punkte u_1 zusammenfällt, so findet man, dass sich selbstverständlich auch die Gerade l'_2 mit der ursprünglichen Geraden l_1 decken müsse. Nachdem weiter l_1 von vornherein ganz beliebig angenommen wurde, so wird sich überhaupt bezüglich irgend

zweier entsprechenden Geraden immer das gleiche merkwürdige Resultat ergeben, dass zwei entsprechende Geraden auch dann entsprechend bleiben, wenn dieselben gegenseitig vertauscht werden, d. h. wenn man die Gerade, welche ursprünglich dem Systeme $\mathbf{S}_1$ angehörte, als Element des Systems $\mathbf{S}_2$ auffasst und umgekehrt.

Zieht man einen beliebigen Kollineationsstrahl, welcher die beiden entsprechenden Geraden $\mathbf{l}_1$ und $\mathbf{l}_2$ in zwei entsprechenden Punkten $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ schneidet, so trifft derselbe auch die beiden entsprechenden Geraden $\mathbf{l}'_1$ und $\mathbf{l}'_2$ in zwei entsprechenden Punkten $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$, so zwar, dass $\mathbf{b}_1$ mit $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b}_2$ mit $\mathbf{a}_1$ zusammenfällt. Es sind mithin auch je zwei entsprechende Punkte vertauschbar.

Was endlich den Modul der in Rede stehenden Kollineation betrifft, so kann derselbe sowohl durch das Punktepaar $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, als auch durch das Punktepaar $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ ausgedrückt werden. Bezeichnet also α den Schnitt des Kollineationsstrahles $\mathbf{C}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ mit der Kollineationsachse $\mathbf{A}$, so ist:

$$(\mathbf{C}\alpha\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) = (\mathbf{C}\alpha\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2).$$

Gleichzeitig ist hierbei (Satz in § 118) ersichtlich, dass die Punkte $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ das Punktepaar $\mathbf{C}$, α harmonisch trennen.

In anbetracht dieser Eigenschaft sowie infolge der Analogie mit den früher (§ 119) in bezug auf die Vertauschbarkeit entsprechender Elemente gepflogenen Erörterungen wird diese besondere Kollineation als *„harmonische“* oder *„involutorische Kollineation“* bezeichnet. Man gelangt sonach zu dem Satze:

„Fallen die Gegenachsen zweier kollinearen Systeme in eine und dieselbe Gerade, so sind je zwei entsprechende Punkte oder Geraden auch dann entsprechend, wenn sie die Plätze wechseln; ferner wird jedes Paar entsprechender Punkte durch den Schnittpunkt ihres Kollineationsstrahles mit der Kollineationsachse und durch das Kollineationscentrum harmonisch getrennt, d. h. der Modul der Kollineation ist in diesem Falle (§ 163, Satz 2) *der negativen Einheit gleich.“*

§ 201.

Die kollineare Beziehung zweier in derselben Ebene vereinigten ebenen Systeme ist namentlich für die Konstruktionen der Kurven zweiten Grades von besonderer Wichtigkeit, daher ein diesfallsiges näheres Eingehen gerechtfertigt erscheinen dürfte.

Seien **C** [Fig. 161, Taf. IX] das Kollineationscentrum, **A** die Kollineationsachse, seien ferner $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{G}_2$ die beiden Gegenachsen, von welchen selbstverständlich nur die eine beliebig angenommen werden kann, während dann die zweite (nach Satz 1, § 197) ihrer Lage nach bereits bestimmt ist. Irgend eine dem Systeme $\mathbf{S}_1$ angehörende Kurve zweiten Grades sei $\mathbf{K}_1$.

Wenn man auf irgend eine Art zu allen Punkten $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1 \ldots$ von $\mathbf{K}_1$ die entsprechenden Punkte $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2 \ldots$ des Systems $\mathbf{S}_2$ ermittelt, so wird der geometrische Ort der letzteren das der Kurve $\mathbf{K}_1$ kollinear entsprechende Gebilde $\mathbf{K}_2$ repräsentieren.

So können beispielsweise zu den beiden Punkten $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{c}_1$ von $\mathbf{K}_1$ die entsprechenden Punkte $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{c}_2$ von $\mathbf{K}_2$ leicht folgendermassen konstruiert werden. Man zieht zunächst die Verbindungsgerade $\mathbf{l}_1 = \mathbf{b}_1\mathbf{c}_1$, welche die Kollineationsachse **A** in einem Punkte **d** trifft. Den dem unendlich fernen Punkte von $\mathbf{l}_1$ kollinear entsprechenden Punkt $\mathbf{u}_2$ erhält man im Schnitte der Gegenachse $\mathbf{G}_2$ mit dem zu $\mathbf{l}_1$ parallelen Kollineationsstrahle und mithin die der Geraden $\mathbf{l}_1$ entsprechende Gerade $\mathbf{l}_2$ durch Verbindung der Punkte **d** und $\mathbf{u}_2$. Die zu bestimmenden Punkte $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{c}_2$ auf $\mathbf{l}_2$ ergeben sich sodann mittels der Kollineationsstrahlen $\mathbf{C}\,\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{C}\,\mathbf{c}_1$.

Auf gleiche Weise können beliebig viele Punkte des Gebildes $\mathbf{K}_2$ ermittelt werden. Als geometrischer Ort aller den Punkten von $\mathbf{K}_1$ entsprechenden Punkte wird $\mathbf{K}_2$ selbst wieder eine einfach unendliche und stetige Folge von Punkten vorstellen, d. i. eine Kurve repräsentieren. Dass die besagte Kurve ebenfalls vom zweiten Grade sein muss, ist leicht einzusehen, wenn berücksichtigt wird, dass dieselbe von einer beliebigen Geraden $\mathbf{l}_2$ nur in zwei (reellen oder imaginären) Punkten $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{c}_2$, d. i. in jenen Punkten geschnitten wird, welche den Schnittpunkten $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{c}_1$ von $\mathbf{K}_1$ mit der kollinearen Geraden $\mathbf{l}_1$ entsprechen. Zu dem gleichen Resultate gelangt man übrigens auch durch unmittelbare Anwendung des in § 194 angeführten Satzes.

Die beiden kollinearen Kurven $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_2$ weisen besondere gegenseitige Beziehungen auf.

Zunächst bemerkt man, dass die beiden (reellen oder imaginären) Punkte **m** und **n**, welche die Kurve $\mathbf{K}_1$ mit der Kollineationsachse **A** gemein hat, selbstentsprechend sind, also auch der Kurve $\mathbf{K}_2$ angehören müssen, oder mit anderen Worten, dass

die Kollineationsachse stets eine (eigentliche oder eine ideelle) gemeinschaftliche Sekante der beiden Kurven K_1 und K_2 ist.

Zieht man ferner vom Kollineationscentrum **C** eine Tangente τ an die Kurve K_1, so ist dieselbe einerseits ein Kollineationsstrahl und anderseits eine Gerade, welche mit der Kurve K_1 zwei unendlich nahe, im Berührungspunkte p_1 vereinigte Punkte gemein hat. Diesen zwei Punkten entsprechen kollinear wieder zwei unendlich nahe Punkte der Kurve K_2, welche in dem dem Punkte p_1 entsprechenden Punkte p_2, der ebenfalls auf dem Kollineationsstrahle τ liegen muss, vereinigt sind, oder was dasselbe aussagt, die Gerade τ ist auch eine Tangente der Kurve K_2, und zwar in jenem Punkte p_2, welcher dem Berührungspunkte p_1 kollinear entspricht. Das Gleiche gilt von der zweiten Tangente τ', welche vom Kollineationscentrum **C** an die Kurve K_1 geführt werden kann. Durch das Kollineationscentrum gehen also stets zwei gemeinschaftliche Tangenten der beiden kollinearen Kurven K_1 und K_2, wobei die beiden Berührungspunkte auf jeder dieser Tangenten gleichzeitig entsprechende Punkte sind.

Dass die genannten gemeinschaftlichen Tangenten auch imaginär sein können, ist selbstredend; diesfalls liegt das Kollineationscentrum innerhalb der beiden Kurven K_1 und K_2.

Beachtenswert ist ferner die Beziehung der beiden Kurven K_1 und K_2 zu den Gegenachsen H_1 und G_2 ihrer Systeme.

Hat nämlich die Kurve K_1 mit der ihrem Systeme S_1 angehörenden Gegenachse H_1 keine reellen Punkte gemein (wie in Fig. 161, Taf. IX), so hat auch die kollineare Kurve K_2 mit der der Gegenachse H_1 entsprechenden unendlich fernen Geraden keine reellen Punkte gemeinsam, ist also eine Ellipse.

Sind die vorgenannten gemeinschaftlichen Punkte von K_1 und H_1 reell, so sind es auch die unendlich fernen Punkte der Kurve K_2; letztere wird mithin eine Hyperbel sein. Werden in diesem Falle die Tangenten der Kurve K_1 in den der Gegenachse H_1 angehörenden Punkten kollinear transformiert, so erhält man die Tangenten von K_2 in deren unendlich fernen Punkten, d. h. die Asymptoten von K_2.

Berührt endlich die Kurve K_1 die Gegenachse H_1, so ist auch die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Kurve K_2; die letztere stellt demnach eine Parabel dar.

Ebenso ist offenbar auch die Art der Kurve K_1 von dem Verhalten der kollinearen Kurve K_2 zu der Gegenachse G_1 abhängig.

Sind mithin zwei Kurven zweiten Grades kollinear, so ist die eine von ihnen eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem die andere die Gegenachse ihres Systems beziehungsweise nicht reell trifft, reell schneidet, oder bloss berührt.

Ist weiter $\mathbf{O}_1$ der Pol der Gegenachse $\mathbf{H}_1$ in bezug auf die Kurve $\mathbf{K}_1$, so wird der ihm im Systeme $\mathbf{S}_2$ entsprechende Punkt $\mathbf{O}_2$ (Satz, § 194) der Pol der unendlich fernen Geraden bezüglich der Kurve $\mathbf{K}_2$, d. i. der Mittelpunkt der letzteren sein. Umgekehrt wird derjenige Punkt $\mathbf{M}_1$ des Systems $\mathbf{S}_1$, welcher kollinear dem Pole $\mathbf{M}_2$ der Gegenachse $\mathbf{G}_2$ in bezug auf die Kurve $\mathbf{K}_2$ entspricht, den Pol der unendlich fernen Geraden bezüglich der Kurve $\mathbf{K}_1$, d. i. den Mittelpunkt der letzteren darstellen. Es gilt sonach der Satz:

„Sind zwei Kurven zweiten Grades in perspektivisch kollinearer Beziehung, so repräsentiert die Kollineationsachse gleichzeitig eine (eigentliche oder eine ideelle) gemeinschaftliche Sekante beider Kurven, und das Kollineationscentrum den Schnittpunkt zweier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten. Die eine Kurve ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem die andere Kurve von der Gegenachse ihres Systems in zwei imaginären, oder in zwei reellen Punkten geschnitten, oder endlich von derselben berührt wird. Den Polen der Gegenachsen in bezug auf die ihren Systemen angehörenden Kurven entsprechen im jeweilig anderen Systeme die Mittelpunkte der betreffenden Kurven.“

§ 202.

Der vorstehende Satz lässt sich unmittelbar für die besonderen Formen der kollinearen Beziehung, d. i. für die Ähnlichkeit und für die Affinität spezialisieren.

Zwei Kurven zweiten Grades, welche ähnlich-kollinear aufeinander bezogen sind, nennt man *„ähnlich liegende Kurven zweiten Grades“*.

Da in diesem Falle die Kollineationsachse sowohl, als auch die beiden Gegenachsen mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, so gelangen wir mit Berufung auf den vorhergehenden Satz ohne weiteres zu den folgenden besonderen Resultaten.

Die unendlich ferne Gerade ist als Kollineationsachse eine gemeinschaftliche Sekante beider Kurven.

Da beide Gegenachsen im Unendlichen liegen, oder mit anderen Worten, da die unendlich ferne Gerade in beiden Systemen sich selbst entspricht, so entsprechen sich auch die Pole derselben in bezug auf beide Kurven, d. h. die Mittelpunkte der letzteren.

Nachdem ferner, wie soeben gezeigt wurde, die (reellen oder imaginären) unendlich fernen Punkte beider Kurven dieselben sind, so müssen beide von der nämlichen Art, also beide entweder Ellipsen, oder Hyperbeln oder Parabeln sein. Mithin besteht der Satz:

„Zwei ähnlich liegende Kurven zweiten Grades haben zwei gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) unendlich ferne Punkte, und sind deshalb stets von derselben Art. Die Mittelpunkte beider Kurven sind ähnlich gelegen, bilden also ein Paar ähnlich-kollinearer Punkte.“

§ 203.

Sind zwei Kurven zweiten Grades affin-kollinear aufeinander bezogen, d. h. liegt das Kollineationscentrum in unendlicher Entfernung, sind daher alle Kollineationsstrahlen untereinander parallel, so gibt es (Satz in § 201) zwei unter ihnen, welche gemeinschaftliche Tangenten beider Kurven repräsentieren.

Infolge der unendlich fernen Lage des Kollineationscentrums ist die unendlich ferne Gerade selbst ein Kollineations- oder Affinitätsstrahl, und wird jedem unendlich fernen Punkte wieder ein unendlich ferner Punkt entsprechen.

Hieraus folgt unmittelbar, dass, sobald die eine Kurve reelle unendlich ferne Punkte besitzt, auch die zweite eben solche haben muss, oder mit anderen Worten, dass zwei affin aufeinander bezogene Kurven stets von gleicher Art sein müssen.

Da weiter die unendlich ferne Gerade als Affinitätsstrahl sich selbst entspricht (wobei sie jedoch als ungeteiltes Element zu betrachten ist, und das „Selbstentsprechen“ sich nicht auch gleichzeitig auf ihre einzelnen Punkte bezieht), so müssen sich auch ihre Pole in bezug auf die beiden Kurven, d. h. die Mittelpunkte der letzteren, entsprechen. Es besteht daher der Satz:

„Sind zwei Kurven zweiten Grades affin aufeinander bezogen, so besitzen dieselben zwei zu den Affinitätsstrahlen parallele gemein-

schaftliche Tangenten. Die beiden Kurven sind stets von derselben Art, und ihre Mittelpunkte sind zwei sich affin entsprechende Punkte.“

§ 204.

Werden zwei Kurven zweiten Grades kollinear aufeinander bezogen, und fällt das Kollineationscentrum mit einem Brennpunkte der einen von ihnen zusammen, so ist dasselbe gleichzeitig auch ein Brennpunkt der zweiten Kurve. Der Beweis hierfür ist unschwer zu liefern.

Die Tangenten, welche von dem Kollineationscentrum resp. von dem Brennpunkte der Kure K_1 an diese gezogen gedacht werden, sind (Satz in § 182) die imaginären Doppelstrahlen der Rechtwinkelinvolution, welche das Kollineationscentrum zum Scheitel hat. Dieselben sind aber (Satz in § 201) auch Tangenten der zweiten Kurve. Nachdem überdies die genannte Rechtwinkelinvolution, als Büschel aller Kollineationsstrahlen, für beide Kurven dieselbe Bedeutung hat, so gilt das Gleiche auch von deren Scheitel; es wird somit das Kollineationscentrum auch ein Brennpunkt der zweiten Kurve sein müssen.

Ist die eine der beiden Kurven insbesondere ein Kreis, so sind bekanntlich dessen Brennpunkte im Mittelpunkte vereinigt. Einem Kreise, dessen Mittelpunkt mit dem Kollineationscentrum zusammenfällt, entspricht mithin unter beliebigen anderweitigen Voraussetzungen stets eine Kurve zweiten Grades, welche einen Brennpunkt im Kollineationscentrum hat.

§ 205.

Die kollineare Verwandtschaft zweier Kurven zweiten Grades und ihre besonderen Formen (Ähnlichkeit und Affinität) können mit Vorteil zu gewissen Konstruktionen mit und an Kurven zweiten Grades namentlich dadurch verwendet werden, dass man diejenige Kurve, bezüglich welcher die Konstruktionen vorzunehmen sind, in einen Kreis transformiert, an diesem die Konstruktionen vornimmt, und die so erzielten Resultate wieder zurücktransformiert.

Einige häufig vorkommende Aufgaben werden den angedeuteten Vorgang näher kennzeichnen.

58. Aufgabe: **Es sind die Schnittpunkte einer durch drei Punkte und zwei Tangenten gegebenen Kurve zweiten Grades mit einer geraden Linie zu konstruieren.***)

Seien a_1, b_1, c_1 [Fig. 162, Taf. IX] die drei gegebenen Punkte, und t und t' die beiden gegebenen Tangenten jener Kurve K_1 zweiten Grades, deren Schnittpunkte mit der Geraden g_1 zu bestimmen sind.

Die Methode der Lösung des vorliegenden Problemes besteht, wie bereits oben ausgesprochen wurde, darin, einen zu der Kurve K_1 kollinearen Kreis K_2 zu konstruieren, und diesen Kreis zum Zwecke der weiteren Konstruktion zu benützen. Letzteres kann in nachstehender Weise bewerkstelligt werden.

Man zeichnet irgend einen beliebigen Kreis K_2 so, dass er einerseits die beiden Tangenten t und t' von K_1 berührt, anderseits jedoch auch derartig, dass eine durch den Schnittpunkt C dieser Tangenten t und t' gezogene Gerade, welche einen der drei Punkte a_1, b_1, c_1 enthält, den Kreis K_2 in reellen Punkten schneidet; der Kreis K_2 muss hiernach in demselben Winkelraume der beiden Tangenten t' und t liegen, in welchem sich auch die Kurve K_1, resp. die drei gegebenen Punkte a_1, b_1, c_1 befinden.

Zieht man die drei Strahlen Ca_1, Cb_1, Cc_1, so trifft jeder derselben den Kreis K_2 in einem Punktepaar, a_2, a'_2; b_2, b'_2; c_2, c'_2. Wählen wir von jedem dieser Paare einen Punkt, beispielsweise die drei Punkte a_2, b_2 und c_2 und betrachten sie als kollinear entsprechend mit den drei Punkten a_1, b_1, c_1 für C als Kollineationscentrum. Hierdurch ist (Satz II in § 197) die kollineare Beziehung vollkommen bestimmt. Dem Kreise K_2, welcher durch a_2, b_2, c_2 geht und von t und t' berührt wird, entspricht sodann (Satz in § 201) eine Kurve K_1 zweiten Grades, welche durch a_1, b_1, c_1 geht und gleichfalls mit t und t' eine Berühung eingeht, folglich die ursprünglich gegebene Kurve K_1 vorstellt.

Nebenbei sei hier nur bemerkt, dass durch die drei Punkte a_1, b_1, c_1 und die zwei Tangenten (Satz in § 138) vier verschiedene Kurven zweiten Grades bestimmt sind. Zu diesen Kurven gelangt man, indem man den drei Punkten a_1, b_1, c_1 die acht

---

*) Peschka, Direkte Konstruktion der Durchschnittspunkte von Geraden mit durch irgend welche Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitten. Grunerts Archiv der Math. u. Phys. Teil 59.

verschiedenen Kombinationen:

$$a_2 b_2 c_2,\ a'_2 b_2 c_2,\ a_2 b'_2 c_2,\ a_2 b_2 c'_2,$$
$$a'_2 b'_2 c_2,\ a'_2 b_2 c'_2,\ a_2 b'_2 c'_2,\ a'_2 b'_2 c'_2,$$

wovon stets zwei zu derselben Kurve führen, kollinear zuordnet.

Mit Hilfe der drei Paare entsprechender Punkte $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$ und ihrer Verbindungsgeraden könnten nun ohne Schwierigkeit die Kollineationsachse, die Gegenachsen u. s. w. konstruiert werden. Für die gestellte Aufgabe jedoch, welche bloss die Bestimmung der Schnittpunkte von K_1 mit der Geraden g_1 fordert, ist dies keinesfalls notwendig; man wird daher einfach folgenden Weg einschlagen.

Die Gerade g_1 trifft die beiden Verbindungsgeraden $a_1 b_1$ und $a_1 c_1$ beziehungsweise in den Punkten x_1 und y_1. Bestimmt man auf $a_2 b_2$ und $a_2 c_2$ mit Hilfe der Kollineationsstrahlen Cx_1 und Cy_1 die entsprechenden Punkte x_2 und y_2, so erhält man durch die Verbindung derselben die kollineare Gerade g_2 und sofort auch deren Schnittpunkte p_2 und q_2 mit dem Kreise K_2, welche durch die Kollineationsstrahlen Cp_2 und Cq_2 auf g_1 nach p_1 und q_1 projiziert, die verlangten Punkte p_1 und q_1 bestimmen.

§ 206.

59. Aufgabe: **Von einem Punkte aus sind an eine Kurve zweiten Grades, die durch drei Tangenten und zwei Punkte gegeben ist, die Tangenten zu führen und deren Berührungspunkte zu ermitteln.**

Sind t, t' und t_1 [Fig. 163, Taf. IX] die drei gegebenen Tangenten, und a_1 und b_1 die zwei gegebenen Punkte der Kurve K_1, so wird es sich wieder nur darum handeln, die besagte Kurve K_1 kollinear auf einen Kreis K_2 zu beziehen.

Zu diesem Zwecke wählen wir den Schnittpunkt C von zwei der vorhandenen Tangenten, etwa von t und t', als Kollineationscentrum, und zeichnen irgend einen Kreis K_2 berührend an dieselben in jenem von (t, t') gebildeten Winkelraume, welcher auch die Punkte a_1 und b_1 enthält. Es wird nun notwendig sein, die kollineare Beziehung so zu fixieren, dass der besagte Kreis K_2 in der That der gegebenen Kurve K_1 entspricht. Letzteres kann nur dann der Fall sein, wenn man dem Punkte a_1 einen der beiden Punkte a_2 oder a'_2, in welchen K_2 von dem Kollineationsstrahle

Ca_1 getroffen wird, und dem Punkte b_1 einen der zwei Punkte b_2 oder b'_2, in welchen der Strahl Cb_1 den Kreis K_2 trifft, zuordnet.

Ferner ist auch noch die gegebene Tangente t_1 zu berücksichtigen. Diese schneidet die Gerade a_1b_1 in einem Punkte x_1, welchem auf der entsprechenden Geraden a_2b_2 der Schnittpunkt x_2 mit dem Kollineationsstrahle Cx_1 entspricht. Der Tangente t_1 wird man offenbar eine der beiden durch x_2 gehenden Kreistangenten t_2 oder t'_2 kollinear zuordnen müssen.

Gesetzt nun, man hätte a_2, b_2 und t_2 als die den Elementen a_1, b_1 und t_1 entsprechenden Elemente gewählt, so ist hierdurch (nach Satz 2 in § 197) die kollineare Beziehung vollkommen festgestellt, da man die Kollineationsachse A als Verbindungsgerade jener beiden Punkte d und d' erhält, in welchen sich einerseits die beiden entsprechenden Geraden a_1b_1 und a_2b_2 und anderseits die beiden entsprechenden Geraden t_1 und t_2 schneiden.

Mit Zugrundelegung des in § 201 aufgestellten Satzes entspricht sodann dem Kreise K_2 kollinear notwendig eine der vier Kurven zweiten Grades, welche durch a_1 und b_1 gehen, und (Satz in § 151) von t, t' und t_1 berührt werden. (Die übrigen Kurven würden sich durch Berücksichtigung der Elemente a'_2, b'_2 und t'_2 ergeben.)

Nach den somit getroffenen Vorbereitungen wird es keinem Anstande unterliegen durch den gegebenen Punkt S_1 die Tangenten an K_1 zu führen. Die Verbindungsgerade S_1b_1 trifft die Kollineationsachse A in δ, während die entsprechende Gerade δb_2 von dem Kollineationsstrahle CS_1 in dem dem Punkte S_1 entsprechenden Punkte S_2 getroffen wird. Zieht man von S_2 eine Kreistangente T_2, welche die Kollineationsachse A in D schneidet, so ergibt sich die entsprechende Tangente T_1 von K_1 als die Verbindungsgerade S_1D. Der Berührungspunkt B_1 derselben mit K_1 wird mittels jenes Kollineationsstrahles erhalten, welcher von C nach dem entsprechenden Berührungspunkte B_2 der Kreistangente T_2 gezogen werden kann. In gleicher Weise ergibt sich die zweite durch S_1 gehende Tangente von K_1 sowie auch deren Berührungspunkt mit Zuhilfenahme der zweiten durch S_2 gehenden Kreistangente.

Diese wenigen Aufgaben dürften bereits die nötigen Anhaltspunkte und Fingerzeige für die Lösung und Durchführung von Problemen ähnlicher Art bieten, sobald, wenn es sich um Kurven

zweiten Grades handelt, man den jeweiligen Kreis gefunden hat, welcher mit der besagten Kurve kollinear ist.

Wir werden uns hiernach darauf beschränken nur noch einige Fälle von kollinearer Beziehung zwischen einem Kreise und einer Kurve zweiten Grades hervorzuheben.

§ 207.

60. Aufgabe: **Eine durch drei Punkte und zwei Tangenten gegebene Kurve zweiten Grades ist kollinear auf einen Kreis zu beziehen.**

Seien a_1, b_1, c_1 [Fig. 164, Taf. IX] die drei oberwähnten Kurvenpunkte und t_1, t'_1 die beiden Tangenten der durch diese Bestimmungsstücke gegebenen Kurve K_1 zweiten Grades.

Obwohl wir behufs kollinearer Transformation der letzteren in einen Kreis bereits (in § 205, Aufgabe 58) eine Methode kennen lernten, wollen wir doch, um verschiedene Wege, die zu gleichem Ziele führen, zu eröffnen, diesfalls den folgenden Vorgang wählen. Nehmen wir nämlich die Verbindungsgerade zweier der drei gegebenen Punkte, beispielsweise a_1 und b_1, direkt als Kollineationsachse A an, so wird ein Kreis K_2, welcher mit K_1 kollinear sein soll, notwendig (Satz in § 201) durch a_1 und b_1 gehen müssen. Wie übrigens sofort zu erkennen, kann jeder beliebige, durch a_1 und b_1 gehende Kreis K_2, dem gedachten Zwecke dienen.

Die beiden Tangenten t_1 und t'_1 treffen die Kollineationsachse A in den Punkten d und d'. Die den besagten Kurventangenten entsprechenden Geraden müssen Kreistangenten sein und gleichfalls durch d und d' gehen, doch steht hierbei wieder die Wahl zwischen je zwei (durch d resp. d' gehenden) Tangenten des Kreises K_2 frei. Gesetzt, man würde, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, den gegebenen Tangenten t_1 und t'_1 die beiden Kreistangenten t_2 und t'_2 kollinear zuordnen, so sind offenbar auch die Punkte x_1 und x_2, in welchen sich t_1 und t'_1 resp. t_2 und t'_2 schneiden, kollinear entsprechend. Zieht man endlich die Verbindungsgerade $x_1 c_1$, welche die Axe A in d'' trifft, so entspricht derselben die Gerade $x_2 d''$ und dem Kurvenpunkte c_1 einer jener beiden Punkte c_2 und c'_2, welche K_2 und $x_2 d''$ gemein haben.

Hierdurch ist die gewünschte kollineare Beziehung bereits festgestellt. Man erhält nämlich sofort ein Kollineations-

centrum **C** im Schnitte der Kollineationsstrahlen c_1c_2 und x_1x_2. Für dieses **C**, die Kollineationsaxe **A** und etwa das Punktepaar x_1, x_2 gilt sodann der Satz 2 in § 197, womit die gestellte Aufgabe gelöst erscheint.

§ 208.

61. Aufgabe: **Eine durch einen Brennpunkt und durch drei Punkte gegebene Kurve zweiten Grades ist kollinear in einen Kreis zu verwandeln.**

Sind a_1, b_1, c_1 die drei Kurvenpunkte und ist **C** der gegebene Brennpunkt, so hat man, um der gestellten Aufgabe zu genügen, (gemäss den Ausführungen in § 204) bloss einen beliebigen Kreis K_2 zu zeichnen, dessen Mittelpunkt mit **C** zusammenfällt, **C** als das Kollineationscentrum zu betrachten, und die kollineare Beziehung dadurch zu fixieren, dass man den drei Punkten a_1, b_1, c_1 solche Punkte a_2, b_2, c_2 des Kreises K_2 zuordnet, welche gleichzeitig auf den Kollineationsstrahlen Ca_1, Cb_1 und Cc_1 liegen.

§ 209.

62. Aufgabe: **Eine durch ihre Asymptoten und durch einen Punkt gegebene Hyperbel ist kollinear auf einen Kreis zu beziehen.**

Da die Asymptoten σ und σ' einer Hyperbel K_1 dem Wesen nach Tangenten mit unendlich fernen Berührungspunkten sind, so kann man, um die Aufgabe zu lösen (nach Satz in § 201) ohne weiteres den Mittelpunkt **M** der Hyperbel, d. i. den Schnitt von σ und σ' als Kollineationscentrum annehmen, und den kollinearen Kreis K_2 an irgend welcher Stelle den Asymptoten einschreiben.

Heissen die Berührungspunkte dieses Kreises mit σ und σ' beziehungsweise u_2 und u'_2, so ergibt deren Verbindungsgerade G_2 bereits die Gegenachse im Systeme des Kreises, da die genannten Berührungspunkte u_2 und u'_2 den unendlich fernen Berührungspunkten der Asymptoten entsprechen. Der weiter gegebene Punkt a_1 der Hyperbel dient zur Bestimmung der Kollineationsachse. Zieht man nämlich den Kollineationsstrahl Ma_1, so wird dieser den Kreis K_2 in zwei Punkten a_2 und a'_2 schneiden, von welchen man den einen, etwa a_2, dem Punkte a_1 kollinear zuordnet. Weiter erhält man ebenso leicht zwei entsprechende Geraden,

nämlich die Verbindungsgerade $\mathfrak{a}_2\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{g}_2$ und die durch $\mathfrak{a}_1$ zur Asymptote σ Parallele $\mathfrak{g}_1$; der Schnitt von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ bestimmt bereits einen Punkt der Kollineationsachse und diese selbst ist durch den bezeichneten Schnittpunkt parallel zur Gegenachse $\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}'_2 = \mathfrak{G}_2$ zu führen.

§ 210.

Sehr häufig hat man Konstruktionen an Ellipsen vorzunehmen, von welchen Durchmesser und sonstige Elemente gegeben sind. In diesen Fällen kann, wie den nachstehenden Beispielen zu entnehmen, mit Vorteil von der affinen Beziehung der Ellipse zu einem Kreise Gebrauch gemacht werden.

63. Aufgabe: **Eine Ellipse ist durch einen Durchmesser $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und die Richtung $\mathfrak{y}\mathfrak{y}$ seines konjugierten Durchmessers, ferner durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ gegeben; die Kurve ist affin auf einen Kreis zu beziehen.**

Wählen wir den Durchmesser $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ [Fig. 165, Taf. IX] unmittelbar als Affinitätsachse, so muss nach früheren Erörterungen der affine Kreis $\mathfrak{K}_0$ notwendig durch die in dieser Affinitätsachse liegenden Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Ellipse $\mathfrak{K}$ gehen. Da ferner (Satz in § 203) die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ sich affin entsprechen müssen, der Mittelpunkt $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{K}$ aber als Punkt der Affinitätsachse $\mathfrak{A}$ selbstentsprechend ist, so muss er notwendig auch der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_0$ sein. Der mit $\mathfrak{K}$ affine Kreis kann in diesem Falle also nur derjenige $\mathfrak{K}_0$ sein, welcher über dem Ellipsendurchmesser $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ als „Durchmesser des Kreises“ beschrieben wird.

Berücksichtigt man ferner, dass (Satz in § 194) sowohl bei kollinearer als auch bei affiner Verwandtschaft projektivische Eigenschaften resp. Beziehungen erhalten bleiben, so ist einleuchtend, dass allgemein zwei in bezug auf $\mathfrak{K}$ konjugierten Geraden kollinear zwei in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ konjugierte Geraden entsprechen werden; dass aber im besonderen, da die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ entsprechende (hier überdies auch zusammenfallende) Punkte sind, konjugierten Durchmessern von $\mathfrak{K}$ auch konjugierte Durchmesser von $\mathfrak{K}_0$ entsprechen müssen.

Es wird mithin der Geraden $\mathfrak{y}$ als dem mit $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{A}$ konjugierten Durchmesser von $\mathfrak{K}$ affin der mit $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}$ konjugierte Durchmesser des Kreises $\mathfrak{K}_0$, d. i. der zu $\mathfrak{A}$ senkrechte Kreis-

durchmesser y_0 entsprechen. Da ferner in zwei affinen Systemen einem unendlich fernen Punkte stets wieder ein unendlich ferner Punkt, also untereinander parallelen Geraden stets wieder untereinander parallele Geraden entsprechen, so kann der gegebene Ellipsenpunkt p folgendermassen zur weiteren Konstruktion verwendet werden. Zieht man durch p die Parallele zu y, und trifft dieselbe die Affinitätsachse A in π, so erhält man die ihr entsprechende Gerade πp_0 als die Parallele durch π zu y_0, und im Schnitte p_0 derselben mit dem Kreise K_0 den dem Punkte p entsprechenden Punkt.

Hiermit ist die Richtung der Affinitätsstrahlen ermittelt, resp. durch pp_0 festgestellt, und sonach auch die gesuchte affine Beziehung zwischen K und K_0 vollkommen bekannt.

Sollten nun beispielsweise etwa die Endpunkte c und d des Durchmessers y bestimmt werden, so hätte man dieselben einfach aus den Endpunkten c_0 und d_0 des entsprechenden Kreisdurchmessers y_0 mittels der zu pp_0 parallelen Affinitätsstrahlen cc_0 und dd_0 abzuleiten.

§ 211.

64. Aufgabe: **Eine Ellipse K, welche durch einen Durchmesser ab, durch die Richtung des ihm konjugierten Durchmessers y und eine Tangente t gegeben ist, soll zu einem zu bestimmenden Kreise K_0 in affine Beziehung gesetzt werden.**

So wie im vorhergehenden Falle wählen wir auch hier den Durchmesser $xx = ab$ [Fig. 166, Taf. IX] als Affinitätsachse A in der Weise, dass der mit der Ellipse K affine Kreis derjenige Kreis K_0 sei, welcher über ab als Durchmesser beschrieben werden kann. Dem Durchmesser y, welcher mit $ab = xx$ bezüglich K konjugiert ist, entspricht sodann wieder der mit $ab = xx$ konjugierte, also zu xx senkrechte Kreisdurchmesser y_0.

Zieht man ferner von dem Punkte δ, in welchem die Ellipsentangente t die Affinitätsachse A schneidet, eine Tangente t_0 an den Kreis K_0, so kann dieselbe als die mit t affine Gerade betrachtet werden. Dem Schnittpunkte n von t und y entspricht mithin der Schnittpunkt n_0 von t_0 und y_0, so dass man in nn_0 die Richtung der Affinitätsstrahlen erhält und somit die gestellte Aufgabe ihre Lösung gefunden hat.

§ 212.

65. Aufgabe: **Es sind die Achsen einer Ellipse, welche durch zwei konjugierte Durchmesser gegeben ist, zu konstruieren.**

Die beiden gegebenen konjugierten Durchmesser der Ellipse **K** seien **ab** und **cd** [Fig. 167, Taf. IX]. Auch die diesfallsige Konstruktion kann wieder auf die affine Beziehung der Ellipse **K** zu einem Kreise $\mathbf{K}_0$ zurückgeführt werden. Als Affinitätsachse **A** wählen wir in diesem Falle die Tangente der Ellipse im Punkte **c**, d. i. die durch den einen Durchmesserendpunkt **c** zum zweiten konjugierten Durchmesser **ab** geführte Parallele.

Nachdem zwei affine Kurven zweiten Grades stets zwei Punkte der Affinitätsachse gemein haben müssen, so folgt, dass im vorliegenden Beispiele der mit der Ellipse **K** affine Kreis $\mathbf{K}_0$ die Affinitätsachse **A** gleichfalls in **c** berühren müsse; es wird sich somit bloss noch um die Lage seines Mittelpunktes $\mathbf{o}_0$ handeln.

Zunächst ist einleuchtend, dass $\mathbf{o}_0$ in der durch **c** zu **A** senkrecht gezogenen Geraden liegen müsse. Berücksichtigt man ferner, dass einer zur Affinitätsachse parallelen Geraden stets wieder eine zur Affinitätsachse parallele Gerade, und dem Ellipsenmittelpunkt **o** der Kreismittelpunkt $\mathbf{o}_0$ (Satz in § 203) entsprechen müsse, so folgt, dass dem Ellipsendurchmesser **ab** ein zur Affinitätsachse **A** paralleler Kreisdurchmesser $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0$ entsprechen wird. Nachdem aber auch die Affinitätsstrahlen $\mathbf{aa}_0$ und $\mathbf{bb}_0$ als untereinander parallel zu denken sind, so muss $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0 = \mathbf{ab}$, d. i. der Radius des zu bestimmenden Affinkreises $\mathbf{K}_0$ dem halben Durchmesser **ab** gleich sein. Hierdurch ist sowohl $\mathbf{o}_0$, als auch $\mathbf{K}_0$ und endlich auch die Richtung $\mathbf{oo}_0$ der Affinitätsstrahlen bestimmt.

Da konjugierten, also aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern des Kreises $\mathbf{K}_0$, stets zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse **K** entsprechen, und diese erhalten werden, indem man die Schnittpunkte der beiden erstgenannten Durchmesser und der Affinitätsachse mit dem Mittelpunkte **o** verbindet, so können die Achsen von **K**, als aufeinander senkrecht stehende konjugierte Durchmesser, leicht in folgender Weise bestimmt werden.

Man zeichnet einen durch **o** und $\mathbf{o}_0$ gehenden Kreis γ, welcher seinen Mittelpunkt **m** auf **AA** hat. Der besagte Kreis γ trifft die Affinitätsachse **A** in zwei Punkten $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$, welche mit $\mathbf{o}_0$ verbunden, zwei aufeinander senkrecht stehende, also konjugierte

Durchmesser des Kreises K_0 ergeben. Diesen Durchmessern entsprechen affin die konjugierten Ellipsendurchmesser d_1o und d_2o, welche, da sie überdies auch aufeinander senkrecht stehen, die gewünschten Achsen von K repräsentieren. Die Achsenendpunkte A, B, C, D ergeben sich mit Hilfe der zu oo_0 parallelen Affinitätsstrahlen, als die den Endpunkten A_0, B_0, C_0, D_0 der Kreisdurchmesser d_1o_0 und d_2o_0 affin entsprechenden Punkte.

§ 213.

66. Aufgabe: **Eine Ellipse, welche durch den Mittelpunkt o, die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser ox und oy, und durch zwei Punkte p und q gegeben ist, soll affin auf einen Kreis bezogen werden.**

Wie in den früher besprochenen Fällen wählen wir auch hier den Durchmesser ox [Fig. 168, Taf. IX] als Affinitätsachse A. Durch diese Annahme wird erreicht, dass dem mit ox konjugierten Ellipsendurchmesser oy der mit ox konjugierte also zu ox senkrechte Kreisdurchmesser oy_0 entspricht, und dass o auch der Mittelpunkt des zu bestimmenden Affinkreises K_0 wird. Der Ellipsensehne pq, welche verlängert die Affinitätsachse A in δ trifft, wird affin eine durch δ gehende, sonst aber noch unbekannte Kreissehne p_0q_0, und dem Halbierungspunkte n von pq (infolge der Parallelität aller Affinitätsstrahlen) der Halbierungspunkt n_0 der Kreissehne p_0q_0 entsprechen. Da aber, zufolge einer bekannten elementaren Eigenschaft des Kreises K_0, die Gerade on_0 senkrecht auf p_0q_0 steht, so muss n_0 notwendig auch auf dem über δo als Durchmesser beschriebenen Halbkreise γ liegen. Führt man ferner nν parallel zu oy, so ergibt sich einerseits die affine Gerade νn_0 als die Parallele zu oy_0 durch ν, und anderseits der Schnitt n_0 derselben mit dem über oδ verzeichneten Kreise γ.

Hiermit ist in nn_0 die Richtung der Affinitätsstrahlen gefunden, und daher die Möglichkeit geboten, Punkte des Affinkreises K_0 zu bestimmen. Zu diesem Zwecke hat man bloss pπ parallel zu oy, und hierauf πp_0 parallel zu oy_0 oder nν zu ziehen, um zwei affine Geraden zu erhalten. Der durch p zu nn_0 parallele Affinitätsstrahl pp_0 bestimmt den Kreispunkt p_0, daher der Affinkreis K_0 sofort als der durch p_0 gehende Kreis aus dem Mittelpunkte o mit dem Radius op_0 beschrieben werden kann. Der

bezeichnete Kreis K_0 trifft die Affinitätsachse **A** in zwei Punkten **a** und **b**, welche offenbar gleichzeitig die beiden Endpunkte des Ellipsendurchmessers **ox** repräsentieren.

§ 214.

67. Aufgabe: **Eine durch einen Durchmesser ab und zwei Punkte m und n gegebene Ellipse K ist affin in einen Kreis zu transformieren.**

Als der verlangte Kreis kann aus bereits bekannten Gründen unmittelbar derjenige, K_0, angenommen werden, welcher den gegebenen Ellipsendurchmesser **ab** [Fig. 169, Taf. IX] zum Durchmesser hat, wobei letzterer gleichzeitig die Affinitätsachse **A** vorstellt. Es wird sich sonach nur um die Ermittelung der Richtung der Affinitätsstrahlen handeln. Zur Kenntnis derselben führt am einfachsten der folgende Weg.

Die Gerade **mn** schneidet die Affinitätsachse $A = ab$ in dem Punkte **P**. Die Polare **p** von **P** in bezug auf die Ellipse **K** ergibt sich (§ 152) als diejenige Diagonale $\alpha\beta$ des vollständigen Viereckes **abmn**, welche nicht durch **P** geht. Da **P** als Punkt der Affinitätsachse selbstentsprechend ist, so wird (Satz in § 194) der Polare **p** die Polare von **P** in bezug auf den Affinkreis K_0, d. i. die durch den Schnitt π von **p** und **A** gehende zu **A** senkrechte Gerade p_0 entsprechen.

Führt man weiter $n\nu$ parallel zu **p** und νn_0 parallel zu p_0, so sind auch diese beiden Geraden entsprechend. Die zu **A** senkrechte Gerade $n_0\nu$ trifft mithin den Affinkreis K_0 in dem dem Punkte **n** entsprechenden Punkte n_0, so dass man endlich in nn_0 die Richtung der Affinitätsstrahlen erhält.

§ 215.

68. Aufgabe: **Eine durch einen Durchmesser ab und zwei Tangenten t und t' gegebene Ellipse K soll affin auf einen Kreis bezogen werden.**

Den Durchmesser **ab** [Fig. 170, Taf. IX] nehmen wir wieder als Affinitätsachse **A** an und erhalten somit den Affinkreis als denjenigen K_0, welcher über **ab** als Durchmesser beschrieben wird. Zieht man von den Punkten δ und δ', in welchen die gegebenen Ellipsentangenten **t** und **t'** die Affinitätsachse **A** schneiden, die

Kreistangenten t_0 und t'_0, so können dieselben den Ellipsentangenten t und t' affin zugeordnet werden. Nachdem dem Schnittpunkte n von t und t' der Schnittpunkt n_0 von t_0 und t'_0 entspricht, so ist auch schon durch nn_0 die Affinitätsstrahlen-Richtung bestimmt.

Hiermit mögen die Aufgaben, welche sich auf die kollineare und affine Transformation von Kurven zweiten Grades in Kreise bezogen, ihren Abschluss finden, da es nach den gebotenen Beispielen gewiss keinerlei Schwierigkeit bieten wird, auch in anderen Fällen passende und einfache Konstruktionen zu finden.

§ 216.

Bevor wir jedoch das Gebiet der ebenen Kollineation verlassen, muss noch auf das Vorkommen derselben bei der centralprojektivischen Darstellung und bei der Umlegung ebener Gebilde hingewiesen werden, da sich der diesbezügliche Zusammenhang für durchzuführende Konstruktionen als sehr wichtig herausstellt.

Wir wissen nämlich, dass, sobald ein ebenes Gebilde centralprojektivisch dargestellt und nebstbei in die Bildebene umgelegt ist, jede umgelegte Gerade (§ 47) und deren Centralprojektion einen Punkt der Bildflächtrace gemein haben.

Ferner ist bekannt, dass jeder umgelegte Punkt und seine Centralprojektion (Satz in § 53) auf einem Strahle liegen, welcher durch das um die Fluchttrace der betreffenden Ebene umgelegte Projektionscentrum geht.

Weiter entsprechen allen unendlich fernen Punkten des umgelegten Gebildes (§ 55) jene Punkte der Centralprojektion, welche gleichzeitig in der Fluchttrace liegen, und allen unendlich fernen Punkten der Centralprojektion jene Punkte des umgelegten Gebildes, welche sich in der umgelegten Spurtrace befinden. Es gilt daher der Satz:

„Die Centralprojektion eines ebenen Gebildes und das um die Bildflächtrace seiner Ebene in die Bildebene umgelegte Gebilde sind stets perspektivisch kollinear.“

„Die Bildflächtrace ist die Kollineationsachse; das um die Fluchttrace umgelegte Projektionscentrum repräsentiert das Kollineationscentrum; die Fluchttrace und die um die Bildflächtrace umgelegte Spurgerade stellen die beiden Gegenachsen vor.“

§ 217.

Räumliche perspektivische Kollineation. (Perspektivische Kollineation zweier räumlichen Systeme.)

Die im Vorhergehenden behandelte kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Systeme in verschiedenen Trägerebenen oder in einer und derselben Ebene, ist, wie wir nunmehr zeigen werden, nur die Reduktion oder sozusagen ein Bestandteil einer gleichartigen höherstufigen geometrischen Beziehung, derjenigen nämlich, die man als *„räumliche perspektivische Kollineation“* oder als *„Perspektivische Kollineation zweier räumlichen Systeme“* bezeichnet.

Diese Verwandtschaft zweier räumlichen Systeme S_1 und S_2 ist dadurch definiert, dass der Verbindungsstrahl je zweier entsprechenden Punkte von S_1 und S_2 durch einen festen Punkt **C** im Raume, d. i. durch das *„Kollineationscentrum“* geht; dass der Schnittpunkt je zweier entsprechenden Geraden — d. i. zweier Geraden, welche geometrische Orte entsprechender Punkte vorstellen, — und die Schnittgerade je zweier entsprechenden Ebenen, — d. i. solcher zwei Ebenen, die gleichfalls aus einander entsprechenden Punkten zusammengesetzt sind, — in einer festen Ebene, der *„Kollineationsebene“* E_A liege.

Setzen wir voraus, es sei E_A [Fig. 171, Taf. IX] die Kollineationsebene und **C** das Kollineationscentrum; ferner mögen a_1 und a_2 zwei einander entsprechende Punkte der beiden kollinearen räumlichen Systeme S_1 und S_2 vorstellen. Der a_1 und a_2 enthaltende Kollineationsstrahl treffe die Kollineationsebene E_A in α.

Durch diese Angaben ist, wie aus der oben aufgestellten Definition hervorgeht, die kollineare Beziehung der beiden Systeme S_1 und S_2 vollständig bestimmt.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt b_1 des Raumes als Element des Systems S_1 an, so kann der ihm entsprechende Punkt b_2 des Systems S_2 ohne weiteres konstruiert werden. Verbindet man zu diesem Zwecke die beiden Punkte a_1 und b_1 durch eine Gerade l_1, so wird diese letztere die Kollineationsebene E_A in einem Punkte **d** schneiden, durch welchen die kollinear entsprechende Gerade l_2 des Systems S_2 gehen muss. Die letztgenannte Gerade enthält aber auch den Punkt a_2, ist mithin als

Verbindungsgerade desselben mit dem Punkte **d** bestimmt. Schliesslich wird die Gerade l_2 von dem Kollineationsstrahle Cb_1 in dem gesuchten Punkte b_2 geschnitten.

Ebenso kann man zu einem beliebigen Punkte des Systemes S_2 den kollinear entsprechenden Punkt des Systemes S_1 konstruieren.

Um ferner zu einer beliebigen Geraden des einen Systems, beispielsweise zu der Geraden g_1 von S_1, die entsprechende Gerade des zweiten Systemes zu finden, haben wir bloss zu beachten, dass diese beiden Geraden — der aufgestellten Definition gemäss — die Kollineationsebene E_A in einem und demselben Punkte d' treffen müssen.

Wählt man also auf der gegebenen Geraden g_1 einen beliebigen Punkt b_1 und konstruiert (wie vorher) den ihm entsprechenden Punkt b_2 mittels des Paares $(a_1 a_2)$, so wird man die gesuchte Gerade g_2 als Verbindungslinie der Punkte d' und b_2 erhalten.

Ferner wird auch die einer gegebenen Ebene E_1 des Systems S_1 kollinear entsprechende Ebene E_2 des Systems S_2 leicht zu ermitteln sein, wenn man berücksichtigt, dass E_2 durch die Trace E_b von E_1 auf der Kollineationsebene E_A gehen muss. Es genügt daher wieder, zu einem beliebigen Punkte b_1 der Ebene E_1 den kollinear entsprechenden Punkt b_2 zu konstruieren, um sodann durch diesen und die vorgenannte Gerade E_b die gesuchte Ebene E_2 bestimmt zu erhalten.

Seien ferner l_1 und l_2 irgend zwei einander entsprechende Geraden der beiden Systeme S_1 und S_2. Da sich diese Geraden selbstverständlich punktweise entsprechen, also ihre Punkte paarweise auf denselben Kollineationsstrahlen liegen, so ist einleuchtend, dass die durch diese beiden Geraden gehende Ebene das Kollineationscentrum **C** enthalten muss.

Führt man durch **C** den zu l_2 parallelen Strahl, so wird derselbe die Gerade l_1 in einem Punkte u_1 treffen, welcher dem unendlich fernen Punkte u_2^∞ von l_2 entspricht. Führen wir weiter durch u_1 die zur Kollineationsebene E_A parallele Ebene H_E^1 des Systems S_1, so wird die ihr entsprechende Ebene H_2 des Systems S_2 einerseits durch den unendlich fernen Punkt u_2^∞, und anderseits durch die Schnittgerade der Ebene H_E^1 mit der Kollineationsebene E_A, d. h. durch die unendlich ferne Gerade dieser beiden Ebenen gehen müssen. Die besagte Ebene kann demnach

keine andere sein, als die unendlich ferne Ebene des Raumes, aufgefasst als Element des Systems S_2.

Umgekehrt trifft der zur Geraden l_1 parallele Kollineationsstrahl die entsprechende Gerade l_2 in jenem Punkte v_2, welcher dem unendlich fernen Punkte v_1^∞ von l_1 entspricht. Die durch v_2 parallel zur Kollineationsebene E_A gelegte Ebene G_E^2 des Systems S_2 wird wieder diejenige sein, welche der unendlich fernen Ebene des Raumes, als Element des Systems S_1 aufgefasst, entspricht.

Analog der bei zwei ebenen kollinearen Systemen gewählten Bezeichnung heissen auch hier die beiden Ebenen H_E^1 und G_E^2 die *„Gegenebenen“* der kollinearen räumlichen Systeme S_1 und S_2.

Da diese Gegenebenen und die Kollineationsebene E_A untereinander parallel sind und durch drei Eckpunkte u_1, v_2, d eines Parallelogrammes gehen, dessen vierter Eckpunkt das Kollineationscentrum C ist, so gelangt man zu dem Schlusse, dass die eine dieser Gegenebenen vom Kollineationscentrum dieselbe Entfernung hat und auf das besagte Centrum in gleichem Sinne folgt, wie die Kollineationsebene in bezug auf die zweite Gegenebene.

Ebenso wie zwei ebenen kollinearen Systemen entspricht auch zwei räumlichen kollinearen Systemen S_1 und S_2 ein „Modul“ oder ein charakteristisches Doppelverhältnis.

Denn leitet man, wie früher gezeigt wurde, aus einem ursprünglich angenommenen entsprechenden Punktepaare $(a_1 a_2)$, — dessen Kollineationsstrahl die Kollineationsebene E_A in α treffen mag, — ein beliebig anderes entsprechendes Punktepaar $(b_1 b_2)$ ab, dessen Kollineationsstrahl die Ebene E_A in β trifft, so sind die beiden Würfe $(C\alpha a_1 a_2)$ und $(C\beta b_1 b_2)$ perspektivisch, da der eine die Projektion des anderen aus jenem Punkte d vorstellt, in welchem die einander entsprechenden Geraden $a_1 b_1 = l_1$ und $a_2 b_2 = l_2$ die Kollineationsebene E_A treffen. Hieraus folgt, dass diese beiden Würfe ein gleiches Dopppelverhältnis k besitzen. Nachdem aber unter $(b_1 b_2)$ ein ganz beliebiges entsprechendes Punktepaar zu denken ist, so wird das Doppelverhältnis $(C\alpha a_1 a_2) = k$ überhaupt für alle Paare entsprechender Punkte dasselbe, d. h. für die durch C, E_A und a_1, a_2 bestimmte kollineare Beziehung konstant sein, und den „Modul“ der letzteren repräsentieren.

Zwei kollineare räumliche Systeme S_1 und S_2 besitzen noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft.

Denken wir uns nämlich aus den besagten räumlichen Systemen zwei ebene Systeme, deren Trägerebenen zwei einander entsprechende Ebenen E_1 und E_2 von S_1 und S_2 sind, ausgeschieden, d. h. beziehen wir in diesen Ebenen jene Punkte, Geraden u. s. w. als entsprechend aufeinander, welche sich auch als Elemente der räumlichen Systeme S_1 und S_2 entsprechen, so sind diese beiden ebenen Systeme offenbar perspektivisch kollinear; denn, je zwei einander entsprechende Punkte von E_1 und E_2 liegen auf einem durch das Kollineationscentrum C gehenden Strahle, und je zwei entsprechende Geraden von E_1 und E_2 treffen sich in einem Punkte jener Geraden E_b, welche die beiden Ebenen E_1 und E_2 mit der Kollineationsebene E_A gemein haben.

Die Gegenachsen der beiden ebenen Systeme E_1 und E_2 sind selbstverständlich die Schnittgeraden ihrer Trägerebenen mit den bezüglichen Gegenebenen H_E^1 und G_E^2; dieselben repräsentieren bekanntlich jene Geraden, welche den unendlich fernen Geraden der jeweilig zweiten Systeme entsprechen.

Denkt man sich ferner aus den beiden räumlichen Systemen S_1 und S_2 zwei solche Systeme ausgeschieden, welche in einer und derselben durch das Kollineationscentrum C gehenden Ebene P liegen, so sind diese beiden Systeme, wie an und für sich einleuchtend, konlokal kollinear; denn entsprechende Punkte liegen stets auf Strahlen, welche durch C gehen, und entsprechende Geraden schneiden sich in Punkten jener Geraden, in welcher die Ebene P die Kollineationsebene trifft.

Die Schnittgeraden von P mit den beiden Gegenebenen H_E^1 und G_E^2 werden wieder die Gegenachsen der genannten ausgeschiedenen ebenen Systeme repräsentieren.

Beachtet man endlich, dass einer zur Kollineationsebene E_A parallellen Ebene E_1 des Systems S_1 eine ebenfalls zur Kollineationsebene, also auch zur Ebene E_1 parallele Ebene E_2 entspricht, so folgt, dass die beiden perspektivisch kollinearen Systeme, welche diese Ebenen aus den räumlichen Systemen S_1 und und S_2 ausscheiden, (§ 196) insbesondere kollinear-ähnlich sein müssen. Das Gesagte zusammengefasst liefert den Satz:

„Zwei räumliche Systeme können perspektivisch kollinear aufeinander bezogen werden, d. h. derart in Beziehung gebracht werden, dass entsprechende Punkte auf Strahlen durch einen festen Punkt — das Kollineationscentrum — gehen; dass sich entsprechende Geraden resp. entsprechende Ebenen in Punkten, beziehungs-

weise Geraden einer festen Ebene, — der Kollineationsebene — schneiden.“

„Den unendlich fernen Ebenen beider Systeme entsprechen zwei zur Kollineationsebene parallele Ebenen der bezüglichen zweiten Systeme — die Gegenebenen der letzteren.“

„Die eine Gegenebene besitzt von dem Kollineationscentrum denselben Abstand und denselben Folgesinn, wie die Kollineationsebene von der zweiten Gegenebene.“

„Das Doppelverhältnis aus zwei entsprechenden Punkten, dem Punkte in welchen ihr Kollineationsstrahl die Kollineationsebene trifft und dem Kollineationscentrum, ist konstant.“

„Durch zwei einander entsprechende Ebenen werden aus den räumlichen Systemen zwei kollineare ebene Systeme, oder, wenn die Ebenen zur Kollineationsebene parallel sind, speziell zwei kollinear-ähnliche ebene Systeme ausgeschieden.“

„Eine durch das Centrum gehende Ebene scheidet zwei konlokale kollineare ebene Systeme aus.“

„Für die ausgeschiedenen Systeme gilt: dass deren Kollineationscentrum mit jenem für die räumlichen Systeme übereinstimmt; dass ihre Kollineationsachse resp. ihre Gegenachsen beziehungsweise in der Kollineationsebene und in den Gegenebenen der räumlichen Systeme liegen.“

§ 218.

Zwei räumliche kollineare Systeme können ebenso wie zwei ebene kollineare Systeme unter der Voraussetzung, dass entweder die Kollineationsebene, oder aber das Kollineationscentrum in unendlicher Entfernung liegt, spezielle Formen annehmen.

Im ersten Falle hat man dann zwei *„kollinear-ähnliche räumliche Systeme“*. Dieselben sind gegenüber der allgemeinen Verwandtschaft dadurch charakterisiert, dass je zwei einander entsprechende Geraden, sowie auch je zwei einander entsprechende Ebenen untereinander parallel sind, dass die Gegenebenen mit der unendlich fernen Kollineationsebene zusammenfallen; dass ferner der „Modul“ sich auf ein einfaches Verhältnis, und zwar auf das Verhältnis der Abstände entsprechender Punkte vom Kollineationscentrum oder Ahnlichkeitscentrum, reduziert, und dass zwei aus diesen Systemen ausgeschiedene einander entsprechende ebene Systeme stets kollinear-ähnlich sind.

Im zweiten Falle, d. i. bei unendlich fernem Kollineationscentrum, bezeichnen wir die beiden Systeme als *„affine räumliche Systeme“*.

Die wesentlichen Eigenschaften der affin-räumlichen Systeme ergeben sich mit Rücksicht auf die besondere Lage des Centrums ebenfalls sofort durch Spezialisierung der in § 217 aufgestellten Sätze.

An die Stelle der Kollineationsstrahlen tritt das Parallelstrahlenbündel der Affinitätsstrahlen. Da die beiden Gegenebenen im Unendlichen liegen, entsprechen zwei parallelen Geraden wieder zwei parallele Geraden, und zwei parallelen Ebenen wieder zwei parallele Ebenen.

Der Modul reduziert sich auf ein einfaches Verhältnis, und zwar auf das Verhältnis der Abstände zweier entsprechenden Punkte von dem Schnittpunkte ihres Affinitätsstrahles mit der Affinitätsebene (Kollineationsebene).

Zwei aus diesen räumlichen Systemen ausgeschiedene ebene entsprechende Systeme sind stets affin-kollinear.

Eine dritte, noch speziellere Form der Kollineation räumlicher Systeme erhält man durch die Kombination von Ähnlichkeit und Affinität, d. h. unter gleichzeitiger Voraussetzung einer unendlich fernen Kollineationsebene und eines unendlich fernen Kollineationscentrums.

Zwei derartig aufeinander bezogene Systeme nennen wir zwei *„räumlich kollinear-* oder *affin-kongruente Systeme“*.

Dieselben repräsentieren hiernach zwei durch eine Parallelverschiebung voneinander verschiedene Lagen eines und desselben räumlichen Systemes.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen mag noch darauf hingewiesen werden, dass offenbar die für ebene kollineare Systeme (Satz 1 und 2 in § 193, Satz in § 194), bezüglich der Erhaltung der Incidenz und der Erhaltung projektivischer Eigenschaften bewiesenen Sätze auch ihre volle Gültigkeit für kollineare räumliche Systeme beibehalten.

VII. Kapitel.

Aufgaben in centralprojektivischer Darstellung mit Benützung projektivischer und kollinearer Konstruktionen.

§ 219.

69. Aufgabe: **Ein beliebiges in der Bildebene gegebenes Viereck abcd** [Fig. 172, Taf. IX] **ist als die Centralprojektion eines in wahrer Grösse gegebenen Viereckes ABCD zu betrachten; es sind die Tracen der Ebene des letzteren unter der Voraussetzung zu ermitteln, dass die besagte Ebene eine Bildflächneigung $N_b = \alpha$ besitze, und weiter ist die Lage des Projektionscentrums zu bestimmen.**

Stellen wir uns vor, das Problem wäre bereits gelöst, und man würde das Viereck **ABCD** um die schon gefundene Bildflächtrace E_b seiner Ebene in die Bildebene umgelegt haben, so würde man daselbst ein mit **ABCD** kongruentes Viereck $A_0B_0C_0D_0$ erhalten, welches (nach Satz in § 216) mit dem gegebenen Viereck **abcd** kollinear wäre, wobei selbstverständlich das um die Fluchttrace E_v umgelegte Projektionscentrum C_0 das Kollineationscentrum, die Bildflächtrace E_b die Kollineationsachse und die Fluchttrace E_v die eine Gegenachse (d. i. die im Systeme des Viereckes **abcd**) repräsentieren würde.

Es ist unschwer einzusehen, dass die gestellte Aufgabe der Wesenheit nach als gelöst zu betrachten ist, sobald das Viereck $A_0B_0C_0D_0$ in seiner zu **abcd** [Fig. 172, Taf. IX] kollinearen Lage als bekannt vorliegt. Letzteres lässt sich übrigens leicht erreichen, wenn man den bezüglich „der Erhaltung projektivischer Eigenschaften bei kollinearer Transformation“ in § 194 bewiesenen Satz anwendet.

Denken wir uns demnach unter Berücksichtigung des Gesagten durch **A** (Nebenfigur) die Diagonale **AC** und weiter durch den nämlichen Punkt eine zu **CB** parallele Gerade $AV_\infty = \Sigma$ gezogen. Befände sich nun das Viereck **ABCD** in der mit **abcd** kollinearen Lage $A_0B_0C_0D_0$, so würde der Geraden **AC** die Gerade **ac**, und der Geraden Σ jene Gerade σ entsprechen, welche nach dem Fluchtpunkte v_1 von **bc** durch **a** gezogen werden kann.

Da der von den vier Strahlen **ab**, **ac**, **ad**, **a**σ gebildete Wurf (nach dem vorerwähnten Satze, § 194) mit dem von den vier Strahlen **AB**, **AC**, **AD**, **A**Σ projektivisch sein muss, so gilt das Gleiche auch von dem Wurfe **b c d'** $\mathbf{v_1}$ in welchem der obgenannte erste Vierstrahl die Gerade **bc** schneidet, und von dem Wurfe **B C D'** $\mathbf{V_\infty}$, in welchem der vorangeführte zweite Vierstrahl die Gerade **BC** trifft.

Uberträgt man daher den Wurf **B C D'** $\mathbf{V_\infty}$ kongruent auf eine beliebig durch **d'** gezogene Gerade nach **b' c' d'** $\mathbf{v'_\infty}$, so wird dieser mit **b c d'** $\mathbf{v_1}$ perspektivisch sein, und man wird den Punkt $\mathbf{v_1}$ auf bekannte Weise mittels des vermittelnden Centrums **M**, welches sich im Schnitte von **bb'** und **cc'** ergibt, erhalten, sobald man **M** $\mathbf{v_1 v'_\infty}$ parallel zu **d' v'**$_\infty$ führt.

Die Verbindungsgerade **a** $\mathbf{v_1}$ entspricht also kollinear der zu **BC** parallelen Geraden, ist mithin die Centralprojektion derselben und trifft folglich die Centralprojektion **bc** der ihr parallelen Geraden in deren Fluchtpunkt $\mathbf{v_1}$.

Zieht man ferner den Strahl **AS** $= \Sigma_1$ (siehe Nebenfigur) parallel zu **CD**, so wird demselben jene durch **a** gehende Gerade entsprechen, welche gleichzeitig den Fluchtpunkt $\mathbf{v_2}$ von **cd** enthält. Um dieselbe zu bestimmen, wird es genügen, den Schnittpunkt **S** von **AS** $= \Sigma_1$ mit **BC** kongruent in die Reihe **b' c' d'** $\mathbf{v'_\infty}$ nach **s'** zu übertragen, sodann mittels des Strahles **Ms'** auf **bc** den dem Punkte **S** kollinear entsprechenden Punkt **s** aufzusuchen, und im Schnitte von **as** und **cd** den Fluchtpunkt $\mathbf{v_2}$ dieser beiden Geraden festzustellen.

Die Verbindungsgerade $\mathbf{E_v}$ der beiden gefundenen Fluchtpunkte $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ repräsentiert bereits die Fluchttrace der gesuchten Viereckseben e.

Mit Zuhilfenahme von $\mathbf{E_v}$ kann man nun anstandslos das umgelegte Projektionscentrum $\mathbf{C_0}$ konstruieren.

Da nämlich die von $\mathbf{C_0}$ aus nach den Fluchtpunkten $\mathbf{v_3}$ und $\mathbf{v_4}$ von **ab** und **ad** gezogenen Fluchtstrahlen denselben Winkel φ einschliessen müssen, den (in wahrer Grösse) die Viereckseiten **AB** und **AD** bilden, so wird $\mathbf{C_0}$ notwendig auf jenem Kreise γ_1 liegen, welcher, den Winkel φ als Peripheriewinkel fassend, über der Strecke $\mathbf{v_3 v_4}$ beschrieben werden kann.

Ein zweiter derartiger Kreis, beispielsweise der Kreis γ_2, über der Strecke der Fluchtpunkte $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_5}$ von **bc** und **ac**, ist gleichfalls leicht konstruierbar, wenn man berücksichtigt, dass der

Peripheriewinkel, welchen derselbe über der Sehne $\mathbf{v}\mathbf{v}_5$ fassen soll, dem Winkel ψ der beiden Geraden **BC** und **AC** gleich sein muss. Im Schnitte dieser beiden Kreise γ_1 und γ_2 erhält man daher das gesuchte umgelegte Projektionscentrum $\mathbf{C}'_0$.

Die räumliche Lage des Projektionscentrums, d. i. den Hauptpunkt **A** und die Distanz **AC'** kann nunmehr aus dem gegebenen Neigungswinkel α der Ebene **E** gegen die Bildebene (mit Hilfe des rechtwinkligen Dreieckes $\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{C}'$, in welchem $\mathbf{A}_1\mathbf{C}' = \mathbf{A}_1\mathbf{C}'_0$) abgeleitet werden.

Es erübrigt somit nur noch die Ermittelung der Bildflächtrace $\mathbf{E}_b$. Führt man zu diesem Behufe die beiden Strahlen $\mathbf{C}'_0\mathbf{a}$ und $\mathbf{C}'_0\mathbf{d}$, so müssen (Satz in § 53) auf denselben die in die Bildebene umgelegten Punkte $\mathbf{A}_0$ und $\mathbf{D}_0$ des Viereckes liegen. Ferner muss die umgelegte Gerade $\mathbf{A}_0\mathbf{D}_0$ zu dem umgelegten Fluchtstrahle $\mathbf{C}'_0\mathbf{v}_4$ parallel und weiter $\mathbf{A}_0\mathbf{D}_0$ gleich **AD** sein.

Diese Bedingungen werden erfüllt, indem man auf $\mathbf{C}'_0\mathbf{v}_4$ von $\mathbf{C}'_0$ aus die Strecke $\mathbf{C}'_0\nu = \mathbf{AD}$ aufträgt, und den Strahl $\mathbf{C}'_0\mathbf{a}$ mit der durch ν zu $\mathbf{C}'_0\mathbf{v}_3$ Parallelen in $\mathbf{A}_0$ durchschneidet. Die umgelegte Gerade $\mathbf{A}_0\mathbf{D}_0$ ergibt sich sodann als die Parallele durch $\mathbf{A}_0$ zu $\mathbf{C}'_0\mathbf{v}_4$. Die letztere d. i. $\mathbf{A}_0\mathbf{D}_0$ trifft ihre Centralprojektion **ad** in einem Punkte δ_4, welcher offenbar der Durchstosspunkt derselben mit der Bildebene ist. Führt man demnach durch δ_4 eine Gerade $\mathbf{E}_b$ parallel zu $\mathbf{E}_v$, so wird diese die Bildflächtrace $\mathbf{E}_b$ der verlangten Ebene **E** liefern.

Legt man nun das Viereck **abcd** um $\mathbf{E}_b$ in die Bildebene um, so wird man in der That ein mit dem gegebenen Viereck **ABCD** kongruentes Viereck $\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0\mathbf{C}_0\mathbf{D}_0$ erhalten.

§ 220.

Centralprojektivische Darstellung von Kreisbildern.

Ist in irgend einer Ebene ein Kreis **K** gegeben, dessen centralprojektivisches Bild zu bestimmen ist, so kann ganz allgemein in der Weise verfahren werden, dass man die Centralprojektionen einer beliebig grossen Zahl von Punkten oder Tangenten des Kreises ermittelt, und dieselben in gleicher Reihenfolge durch eine stetige, das Kreisbild darstellende Kurve verbindet.

Abgesehen von der Ungenauigkeit der hierbei erlangten Resultate, von der tötenden Langeweile der Konstruktion und von

der Unmasse der sich häufenden Konstruktionslinien, entspricht diese punktweise resp. tangentenweise Darstellung nichts weniger als einem wissenschaftlichen Standpunkte; es erscheint daher erspriesslich, Methoden anzugeben, welche gestatten, die Kreisbilder, welche (nach Satz 1, § 193) stets Kurven zweiten Grades sind, direkt durch zwei konjugierte Durchmesser, oder durch die Achsen darzustellen.

Diese Methoden beruhen auf der an früherer Stelle (Satz in § 216) ausgesprochenen Eigenschaft, dass der um die Bildflächtrace seiner Ebene in die Bildebene umgelegte Kreis und dessen Kreisbild in kollinearer Beziehung zu einander stehen. Bezüglich näherer Ausführung mögen nachfolgende Probleme dienen.

§ 221.

70. Aufgabe: **In einer durch ihre Tracen E_v, E_b** [Fig. 173, Taf. X] **gegebenen Ebene ist ein Kreis derart anzunehmen, dass sein centralprojektivisches Bild als Ellipse erscheint, und sind** a) **zwei konjugierte Durchmesser,** b) **die Achsen dieser Ellipse zu bestimmen.**

Legen wir das Projektionscentrum (A, C) um die Fluchttrace E_v nach C_0, und die Spurgerade der Ebene $E_v E_b$ um die Bildflächtrace E_b nach E_s^0 um, so wird C_0 (Satz in § 216) das Kollineationscentrum, E_b die Kollineationsachse, E_v die eine Gegenachse (im Systeme der Centralprojektion) und E_s^0 die zweite Gegenachse (im Systeme der Umlegung) repräsentieren.

Nachdem, der gestellten Aufgabe gemäss, das Bild des Kreises, also die mit dem umgelegten Kreise kollineare Kurve zweiten Grades eine Ellipse sein soll, so darf der umgelegte Kreis (nach Satz, § 201) mit der Gegenachse seines Systems, d. i. mit der Geraden E_s^0 keine reellen Punkte gemein haben. Dieser Bedingung wird beispielsweise der Kreis K_0 entsprechen.

Dem eben citierten Satze entnehmen wir weiter, dass der Mittelpunkt M des Kreisbildes jenem Punkte M_0 kollinear entspricht, oder mit anderen Worten die Centralprojektion jenes Punktes M_0 ist, welcher den Pol der Gegenachse E_s^0 in bezug auf den Kreis K_0 repräsentiert.

Der besagte Pol M_0 kann auf nachstehende einfache Weise konstruiert werden. Der zu E_s^0 senkrechte Kreisdurchmesser D_0 [Fig. 173, Taf. X] repräsentiert die Polare des unendlich fernen Punktes u_∞ von E_s^0. Derselbe schneidet E_s^0 in dem Punkte r_0, dessen Polare D_0' sich als die Berührungssehne der von r_0 an K_0 gezogenen Tangenten $r_0 a_0$ und $r_0 b_0$ ergibt. Der Schnittpunkt M_0 von D_0 und D_0' ist bekanntlich (Satz 1, § 153) der gesuchte Pol M_0 der Geraden $r_0 u_\infty = E_s^0$.

Gleichzeitig repräsentieren die beiden Geraden D_0 und D_0', da die eine, D_0, den Pol r_0 der anderen, D_0', enthält, zwei konjugierte Polaren in bezug auf den umgelegten Kreis K_0.

Bestimmt man nun die Centralprojektionen $D = cd$ und $D' = ab$ der beiden Geraden D_0 und D_0' (auf bekannte Art durch Zurückführung), so werden dieselben zwei konjugierte Durchmesser des Kreisbildes K vorstellen, da ihr Schnittpunkt M der dem Punkte M_0 (Pol der Gegenachse E_s^0) entsprechende Punkt ist. (Satz, § 194.) Die Endpunkte a, b, c, d dieser Durchmesser erhält man als die Centralprojektionen jener Punkte a_0, b_0, c_0, d_0, welche die Geraden D_0 und D_0' mit dem Kreise K_0 gemein haben, mittels der Strahlen $C_0 a_0$, $C_0 b_0$, $C_0 c_0$, $C_0 d_0$. Hiermit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Wir gehen über auf den zweiten Teil d. i. zu der Konstruktion der Achsen des Kreisbildes K.

Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst noch zeigen, wie man ganz allgemein zwei konjugierte Durchmesser des Kreisbildes K bestimmen kann.

Da das Kreisbild K und der umgelegte Kreis K_0 kollinear sind, und dem Mittelpunkte M von K der Pol M_0 der Gegenachse E_s^0 bezüglich des Kreises K_0 entspricht, so werden überhaupt zwei beliebigen durch M_0 gehenden konjugierten Polaren des Kreises K_0 (Satz, § 194) zwei durch M gehende konjugierte Polaren der Kurve K, d. h. zwei konjugierte Durchmesser von K kollinear entsprechen.

Zwei konjugierte durch M_0 gehende Polaren von K_0 kann man aber stets erhalten, wenn man die eine, beispielsweise D_2^0 beliebig durch M_0 zieht, und die zweite, D_1^0, als die Polare des Schnittpunktes s_0 von E_s^0 und D_2^0 konstruiert. (Sätze in § 153.)

Die beiden genannten Geraden D_1^0 und D_2^0 treffen die Bildflächtrace (Kollineationsachse) E_b in zwei Punkten δ_1 und δ_2,

welche mit **M** verbunden bereits die entsprechenden konjugierten Durchmesser $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$ von **K** ergeben würden.

Wenn auf diese Weise alle Paare konjugierter Durchmesser von **K** konstruiert würden, so erhielte man (Satz in § 157) ein involutorisches Büschel, welches selbstverständlich die Kollineationsachse $\mathbf{E}_b$ in einer involutorischen Punktreihe schneiden müsste.

Von der letzteren sind aber thatsächlich, als Resultate bereits vorgenommener Konstruktionen, zwei Paare konjugierter Punkte vorhanden. Das eine Paar erscheint nämlich durch die beiden Schnittpunkte δ_1 und δ_2 von $\mathbf{E}_b$ mit den konjugierten Durchmessern $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$; das zweite Paar **o** und $\mathbf{u}_\infty$ hingegen durch die Schnittpunkte von $\mathbf{E}_b$ mit den beiden konjugierten Durchmessern **D** und **D'** repräsentiert. Da überdies $\mathbf{u}_\infty$ in unendlicher Entfernung liegt, so ist der demselben konjugierte Punkt **o** (nach § 170) der Centralpunkt der vorgenannten involutorischen Reihe.

Beschreibt man über $\delta_1\delta_2$ als Durchmesser einen Kreis γ, so trifft derselbe die durch **o** senkrecht zu $\mathbf{E}_b$ gehende Gerade $\mathbf{D}_0$ in einem Punkte μ, so dass (nach § 170) die Strecke $\mathbf{o}\mu$ den „Modul“ der Involution darstellt, und mithin jeder weitere durch μ gehende Kreis, welcher seinen Mittelpunkt auf $\mathbf{E}_b$ hat, auf $\mathbf{E}_b$ selbst zwei konjugierte Punkte der Involution bestimmen würde, welche mit **M** verbunden stets zwei konjugierte Durchmesser von **K** liefern müssten. Wird aber speziell jener Kreis γ' benützt, welcher überdies den Punkt **M** enthält, so bestimmt derselbe auf $\mathbf{E}_b$ jene beiden konjugierten Punkte Δ_1 und Δ_2 der vorbezeichneten Involution, welche mit **M** verbunden zwei aufeinander senkrecht stehende konjugierte Durchmesser, oder mit anderen Worten: die Achsen **X** und **Y** (resp. $\Delta_1\mathbf{M}$ und $\Delta_2\mathbf{M}$) des Kreisbildes liefern. Diesen Achsen entsprechen kollinear die beiden Geraden $\mathbf{M}_0\Delta_1 = \mathbf{X}_0$ und $\mathbf{M}_0\Delta_2 = \mathbf{Y}_0$.

Transformiert man mit Zuhilfenahme der Strahlen $\mathbf{C}_0\mathbf{A}_0$, $\mathbf{C}_0\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_0\mathbf{D}_0$ die Schnittpunkte $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{D}_0$ von $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{Y}_0$ mit $\mathbf{K}_0$ kollinear, so erhält man schliesslich die Achsenendpunkte **A**, **B**, **C**, **D** des Kreisbildes **K'** bestimmt, womit auch der zweite Teil des gestellten Problems erledigt ist.

§ 222.

71. Aufgabe: **In einer durch ihre Tracen E_v, E_b gegebenen Ebene ist ein Kreis derart zu wählen, dass sein centralprojektivisches Bild eine Hyperbel wird; die reelle Achse und die Asymptoten der letzteren sind zu konstruieren.**

Vor allem ist wieder das um die Fluchttrace E_v [Fig. 174, Taf. X] umgelegte Projektionscentrum C_0, und die um die Bildflächtrace E_b umgelegte Spurgerade E_s^0 zu ermitteln.

Das Kreisbild K und der um E_b umgelegte Kreis K_0 werden kollinear sein, wobei C_0, E_b, E_v und E_s^0 (Satz in § 216) beziehungsweise das Kollineationscentrum, die Kollineationsachse, die Gegenachse im Systeme der Kurve K und die Gegenachse im Systeme des Kreises K_0 repräsentieren.

Nachdem das Bild des Kreises K_0 eine Hyperbel sein soll, muss der Kreis K_0 (Satz in § 201) derart gewählt werden, dass dessen Schnittpunkte u_0 und v_0 mit der Gegenachse E_s^0 seines Systems reell sind.

Den beiden Punkten u_0 und v_0 entsprechen sodann kollinear die unendlich fernen Punkte u_∞ und v_∞ der Hyperbel K auf den Kollineationsstrahlen C_0u_0 und C_0v_0.

Zeichnet man ferner die Tangenten t_u^0 und t_v^0 des umgelegten Kreises K_0 in den Punkten u_0 und v_0, so werden denselben die Tangenten t_u und t_v der Hyperbel K in deren unendlich fernen Punkten u_∞ und v_∞, d. h. die Asymptoten der besagten Kurve entsprechen. Konstruktiv erhält man die letzteren als die durch die Schnittpunkte d_1 und d_2 der Kollineationsachse E_b mit den entsprechenden Kreistangenten t_u^0 und t_v^0 zu C_0u_0 und C_0v_0 geführten Parallelen.

Der Schnittpunkt M von t_u und t_v, welcher den Mittelpunkt der Hyperbel bestimmt, entspricht kollinear dem Schnittpunkte M_0 der beiden Kreistangenten t_u^0 und t_v^0.

Die Achsen der Hyperbel ergeben sich als die beiden Winkelhalbierenden der von den Asymptoten gebildeten Winkel. Die eine dieser Achsen, X, trifft die Kollineationsachse E_b in δ, so dass $\delta M_0 = X_0$ die der Achse X kollinear entsprechende Gerade im Systeme des umgelegten Kreises K_0 ist. Auf analoge Weise würde man auch die der anderen Achse Y entsprechende Gerade Y_0 finden.

Eine der beiden Geraden X_0 oder Y_0, (hier X_0), schneidet den Kreis K_0 in zwei reellen Punkten R_0 und S_0, welche kollinear mittels der Strahlen C_0R_0 und C_0S_0 auf der Achse X die Endpunkte derselben oder die Scheitel R und S der Hyperbeläste bestimmen.

§ 223.

72. Aufgabe: **Ein in einer gegebenen Ebene E_vE_b zu wählender Kreis soll, centralprojektivisch dargestellt, als Parabel erscheinen; es sind die Achse, die Scheiteltangente und der Brennpunkt der Parabel zu bestimmen.**

Nachdem, wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben, das umgelegte Centrum C_0 [Fig. 175, Taf. X] und die umgelegte Spurgerade E_s^0 konstruiert ist, haben wir den umgelegten Kreis K_0 (nach Satz, § 201) so zu wählen, dass er in irgend einem Punkte u_0 die umgelegte Spurgerade E_s^0 (d. i. die Gegenachse seines Systems) berührt.

Die Centralprojektion des genannten Berührungspunktes, welche man als den unendlich fernen Punkt des Kollineationsstrahles C_0u_0 erhält, repräsentiert auch den unendlich fernen Punkt der Parabel K; es wird mithin jeder Durchmesser und ebenso die Achse der Parabel durch den letztbezeichneten Punkt gehen, oder mit anderen Worten, zu dem Strahle C_0u_0 parallel sein müssen.

Nachdem somit die Richtung der Achse der Parabel K bekannt ist, ist auch der unendlich ferne Punkt resp. die Richtung der Scheiteltangente als einer zur Achse senkrechten Geraden bestimmt.

Führt man demnach durch C_0 eine zu C_0u_0 senkrechte Gerade C_0v_0, so wird diese zur gesuchten Scheiteltangente parallel sein, und mithin deren Kollineationsstrahl vorstellen. Als Kollineationsstrahl wird er die Gegenachse E_s^0 in jenem Punkte v_0 treffen, welcher dem unendlich fernen Punkte der Scheiteltangente entspricht. Die der Scheiteltangente kollinear entsprechende Gerade ist mithin die durch v_0 gehende Tangente t_0 des umgelegten Kreises K_0. Die besagte Tangente t_0 schneidet die Kollineationsachse E_b in dem Punkte δ, daher die durch δ zu C_0v_0 Parallele die gesuchte Scheiteltangente t selbst liefert.

Der Scheitel A der Parabel wird als der dem Berührungspunkte A_0 der Kreistangente t_0 kollinear entsprechende

Punkt mittels des Strahles C_0A_0 erhalten, während sich die Parabelachse **X** als die Senkrechte durch **A** zu **t** ergibt.

Die Bestimmung des Brennpunktes **F** kann auf folgende Weise bewerkstelligt werden. Zieht man durch das umgelegte Centrum C_0 eine der beiden Tangenten τ an den Kreis K_0, so repräsentiert dieselbe (Satz, § 201) gleichzeitig auch eine Tangente der Parabel **K**. Führt man ferner durch den Schnittpunkt α der Scheiteltangente **t** mit der Tangente τ eine Senkrechte αF zu der letzteren, so trifft dieselbe die Achse **X** (Satz 2, § 188) in dem gesuchten Brennpunkte **F**.

§ 224.

73. Aufgabe: **Ein in der Bildebene gegebener Kreis K ist als die Centralprojektion eines zweiten Kreises, dessen Mittelpunkt O auf einem Träger $\delta\varphi$ gegeben ist, zu betrachten; es soll unter diesen Bedingungen die Lage des Projektionscentrums und der Kreisebene, sowie die des umgelegten Kreises bestimmt werden.**

Denken wir uns mit Hilfe der bis jetzt noch unbekannten Elemente den Kreis im Raume, dessen Centralprojektion der Kreis **K** sein soll, in die Bildebene nach K_0 [Fig. 176, Taf. X] umgelegt, so müssen bekanntlich **K** und K_0 in bezug auf das umgelegte Centrum C_0 als Kollineationscentrum, die Bildflächtrace E_b der Kreisebene als Kollineationsachse, und die Fluchttrace E_v als Gegenachse im Systeme **K** kollinear sein. Ferner wird (Satz, § 201) die Fluchttrace oder Gegenachse E_v die Polare des Bildes **O** des gegebenen Kreismittelpunktes in bezug auf den Kreis **K** repräsentieren.

Hiermit sind wir zunächst in den Stand gesetzt, die Fluchttrace E_v als Polare des Punktes **O** konstruieren zu können. Zu diesem Zwecke haben wir bloss durch **O** die zu dem Kreisdurchmesser **oO** senkrechte Sehne $\rho\sigma$ zu ziehen und den Schnittpunkt **v** der beiden Tangenten in ρ und σ zu bestimmen. Mit Zugrundelegung des Satzes in § 153 ergibt sich die verlangte Polare E_v als die durch **v** zu $\rho\sigma$ geführte Parallele E_v.

Nachdem weiter die Kreisebene **E** durch den gegebenen Kreismittelpunkt **O**, welcher auf dem Träger $\delta\varphi$ liegt, gehen muss, erhalten wir die Bildflächtrace E_b der besagten Kreisebene **E** einfach dadurch, dass wir den Träger $\delta\varphi$ durch einen anderen $\delta'\varphi'$ ersetzen, dessen Fluchtpunkt φ' in E_v liegt.

Den bisher ausgeführten Konstruktionen gemäss wird der

Kreis K, wie auch das Projektionscentrum liegen mag, die Centralprojektion einer in der Ebene $E_v E_b$ liegenden Kurve zweiten Grades sein müssen, welche ihren Mittelpunkt in O hat.

Der gestellten Aufgabe zufolge soll aber die besagte Kurve insbesondere ein Kreis sein, daher von dieser Bedingung die Lage des Projektionscentrums abhängig ist. Letzteres wird sich als das Resultat nachstehender Betrachtungen resp. Konstruktionen höchst einfach ergeben.

Die Sehne $\rho\sigma$ und der Durchmesser $\overline{\alpha o O c}$ des Kreises K sind gleichzeitig zwei konjugierte Polaren in bezug auf diesen Kreis K. Denselben müssen (Satz in § 194) kollinear, d. i. im Systeme des umgelegten Kreises K_0, zwei durch dessen Mittelpunkt O_0 gehende konjugierte Polaren, also zwei aufeinander senkrecht stehende Kreisdurchmesser entsprechen. Die Richtungen dieser Kreisdurchmesser sind auch die ihrer Kollineationsstrahlen, d. h. jener Strahlen, welche den noch unbekannten Punkt C_0 mit den Fluchtpunkten v und v_∞ von $\overline{\alpha o O c}$ und $\rho\sigma$ verbinden.

Nehmen wir ein zweites beliebiges Paar durch O gehender konjugierter Polaren D_1 und D_2 des Kreises K an, indem wir die eine $D_2 = O v_2$ beliebig ziehen, die andere $D_1 = O v_1$ aber als die Polare des Schnittpunktes v_2 von D_2 und E_v konstruieren, so werden auch diesen beiden Polaren zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser D_1^0 und D_2^0 des Kreises K_0 entsprechen, und ebenso werden selbstverständlich auch die zu ihnen parallelen Kollineationsstrahlen $C_0 v_1$ und $C_0 v_2$ einen rechten Winkel bilden müssen.

Nachdem das Gesagte in gleicher Weise von jedem beliebigen anderen Paare konjugierter Polaren von K gilt, so erhalten wir die Bedingung, dass das umgelegte Projektionscentrum C_0 gleichzeitig der Scheitel einer Rechtwinkelinvolution sein muss, welche die polar-involutorische Reihe $(v, v_\infty ; v_1, v_2 ; \ldots)$ des Kreises K auf der Geraden E_v projiziert.

In Ubereinstimmung mit der in § 173 angegebenen Konstruktion ergibt sich mithin C_0 im Schnitte von oO mit dem über $v_1 v_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreise γ.

Hierdurch ist die kollineare Beziehung zwischen K und K_0 vollständig bestimmt. Den umgelegten Kreismittelpunkt O_0 kann man auf bekannte Art als den mit O kollinearen Punkt ermitteln, und aus demselben (etwa nach Satz in § 201) den umgelegten Kreis K_0 selbst durch jene beiden Punkte m und n führen, welche der Kreis K mit der Kollineationsachse E_b gemein hat.

Was endlich die Lage des Projektionscentrums im Raume betrifft, so kann allenfalls noch die Forderung hinzugefügt werden, dass die Ebene $E_v E_b$ eine bestimmte Bildflächneigung besitzen solle, und wäre sodann der Hauptpunkt **A** und die Distanz (**A**, **C**) so wie in früheren Fällen (Aufgabe 69) zu konstruieren.*)

§ 225.

Centralprojektivische Darstellung der Spiegelbilder.

Das Spiegelbild eines Punktes **a** in bezug auf eine spiegelnde Ebene **S** ist definiert als der mit dem Punkte **a** symmetrisch gegen **S** liegende Punkt **a'**, d. i. als jener Punkt auf der durch **a** senkrecht zu **S** geführten Geraden, welcher ebenso weit hinter der spiegelnden Ebene liegt, als das Original vor derselben.

Aus dieser Definition folgt ohne weiteres, dass ein in der spiegelnden Ebene selbst liegender Punkt mit seinem Spiegelbilde zusammenfällt, und dass das Spiegelbild eines unendlich fernen Punktes selbst wieder ein unendlich ferner Punkt sein müsse. Insbesondere fällt auch das Spiegelbild des gemeinschaftlichen unendlich fernen Punktes aller zur Spiegelebene senkrechten Geraden, da dasselbe gleichfalls auf den letztbezeichneten Geraden liegt, mit dem besagten Punkte selbst zusammen.

Nachdem ferner jedes Raumgebilde aus Punkten zusammengesetzt gedacht werden kann, so wird das Spiegelbild eines solchen der geometrische Ort der Spiegelbilder aller seiner Punkte sein.

Hiernach wird das Spiegelbild einer Geraden wieder eine Gerade und zwar jene sein, welche von den Spiegelbildern aller Punkte der erstgenannten Geraden gebildet wird. Da weiter jener Punkt, in welchem die Originalgerade die spiegelnde Ebene trifft, mit seinem Spiegelbilde zusammenfällt, so geht selbstverständlich auch das Spiegelbild der besagten Geraden durch den bezeichneten Schnittpunkt.

---

*) Peschka, direkte Achsenbestimmung der Kreisbilder, Zeitschr. d. österr. Ing.- und Arch.-Vereins, Wien 1874, und „Perspektivische Bilder des Kreises“, Archiv d. Math. u. Physik. 57. Bd. 1875.

Ebenso entspricht einer Ebene als Spiegelbild wieder eine Ebene, welche durch den Schnitt der ersteren mit der Spiegelebene gehen muss, u. s. w.

Dass eine Gerade und ihr Spiegelbild, und ebenso eine Ebene und ihr Spiegelbild gegen die Spiegelebene gleich geneigt sind, ist infolge der Symmetrie gegen die Spiegelebene selbstverständlich.

Diese Bemerkungen allein genügen schon um zu zeigen, dass sich der Zusammenhang zwischen irgend einem Gebilde und seinem Spiegelbilde als eine höchst einfache geometrische Beziehung darstelle. In folgendem wollen wir uns mit der centralprojektivischen Darstellung von Spiegelbildern einerseits der Sache wegen, anderseits aber auch mit Rücksicht auf die sich dabei ergebenden beachtenswerten Resultate beschäftigen.

Nebenbei bemerkt, wollen wir eine Spiegelebene stets auf beiden Seiten als spiegelnd voraussetzen, um für jeden Punkt des Raumes unter allen Umständen ein reelles Spiegelbild zu erhalten.

§ 226.

74. Aufgabe: **Unter der Voraussetzung einer durch ihre Tracen S_v, S_b gegebenen Ebene S ist das Spiegelbild eines Punktes a, einer Geraden dv und einer Ebene E_vE_b centralprojektivisch darzustellen.**

Da die Spiegelbilder aller Punkte auf zur Spiegelebene senkrechten Strahlen liegen, so haben wir zunächst den der Fluchttrace S_v [Fig. 177, Taf. X] entsprechenden Normalenfluchtpunkt v_s zu konstruieren.

Um das Spiegelbild des auf dem Träger dv gegebenen Punktes a zu ermitteln, führen wir durch a den zur Spiegelebene senkrechten Strahl av_s und bestimmen dessen Schnittpunkt α mit der Spiegelebene S_vS_b durch Zuhilfenahme der durch av_s und dv gelegten Hilfsebene h_vh_b.

Gemäss der im Vorhergehenden aufgestellten Definition ist das zu bestimmende Spiegelbild von a jener Punkt a' der Geraden av_s, welcher von α dieselbe Entfernung wie a hat. Behufs Konstruktion des letztbezeichneten Punktes a' könnte man allenfalls von dem Teilpunkte T der Geraden av_s, welcher in der Trace h_v liegt, Gebrauch machen, die Strecke $a\alpha$ auf h_b nach $a_1\alpha_1$ proji-

zieren, sodann auf h_b die Strecke $a'_1\alpha_1 = a_1\alpha_1$ bis a'_1 übertragen, und weiter von T aus den Punkt a'_1 nach a' auf av_s projizieren, um in a' das gesuchte Spiegelbild zu erhalten.

Wird aber berücksichtigt, dass a und a' die Centralprojektionen zweier Punkte auf einer Geraden mit dem Fluchtpunkt v_s seien, und dass α die Centralprojektion des ihre Strecke halbierenden Punktes ist, so folgt (nach § 160), dass a und a' durch α und v_s harmonisch getrennt sind. Auf diese Eigenschaft gestützt, lassen sich ohne weiteres andere Konstruktionen des Punktes a' (etwa mittels eines vollständigen Viereckes) gründen.

Auf gleiche Weise könnte man zu jedem beliebigen anderweitigen Punkt b das Spiegelbild b' konstruieren. Ist aber einmal ein derartiges Punktepaar, wie a und a' ermittelt, so kann mit Hilfe desselben die Konstruktion wesentlich vereinfacht werden.

Um beispielsweise das Spiegelbild b' des auf dem Träger $d''v''$ gegebenen Punktes b zu finden, wird man so wie vorher den Strahl bv_s ziehen und dessen Schnittpunkt β mit der Spiegelebene S_vS_b durch Benützung der durch bv_s und $d''v''$ gelegten Hilfsebene $h''_v h''_b$ ermitteln. Der verlangte Punkt b' bildet mit b ein das Punktepaar $\beta_1 v_s$ harmonisch trennendes Punktepaar, weshalb der Wurf $(bb'\beta v_s)$ mit dem Wurfe $(aa'\alpha v_s)$ perspektivisch ist. Bringt man demnach die Strahlen ab und $\alpha\beta$ in σ zum Schnitte, so bestimmt der Verbindungsstrahl $\sigma a'$ auf bv_s den gesuchten Punkt b'.

Um das Spiegelbild einer beliebigen Geraden, beispielsweise der Geraden l^v_d zu bestimmen, genügt es offenbar, die Spiegelbilder zweier ihrer Punkte zu ermitteln.

Denken wir uns also zunächst das Spiegelbild a' eines beliebigen Punktes a derselben konstruiert. Ermittelt man weiter den Schnittpunkt Δ der Geraden l^v_d mit der Spiegelebene S_vS_b (etwa mit Hilfe der durch dv senkrecht zur Ebene S_vS_b gelegten Hilfsebene $h_v h_b$), so wird, wie bereits bekannt, durch diesen Punkt Δ das Spiegelbild $l' = d'v'$ der Geraden l^v_d gehen, und demnach als Verbindungsgerade der Punkte a' und Δ erhalten.

Nachdem ferner Original und Spiegelbild in einer und derselben zur Spiegelebene senkrechten Ebene — $h_v h_b$ — liegen, so erhält man beziehungsweise den Flucht- und Durchstosspunkt von l' im Schnitte v' und d' mit den vorgenannten Tracen h_v und h_b.

Man bemerkt hierbei, dass die beiden Fluchtpunkte v und v' der Originalgeraden l und ihres Spiegelbildes l', ferner der Fluchtpunkt φ des Schnittes von $h_v h_b$ und $S_v S_b$, sowie endlich der Fluchtpunkt v_s als die Projektionen der vier Punkte a, a', α und v_s vom Punkte Δ aus betrachtet werden können, dass also die ersten vier Punkte v, v', φ und v_s harmonisch sein müssen, da es, wie bereits gezeigt wurde, die letzgenannten vier Punkte sind; sonach besteht der Satz:

„Der Fluchtpunkt einer beliebigen Geraden und der Fluchtpunkt ihres Spiegelbildes sind durch die Fluchttrace der Spiegelebene und durch den der letzteren Trace entsprechenden Normalenfluchtpunkt harmonisch getrennt.“

Um endlich das Spiegelbild einer beliebigen Ebene (wir wählen, um vorhandene Konstruktionen benützen zu können, die durch dv gehende Ebene $e_b e_v$) zu konstruieren, beachte man, dass sich dasselbe als eine Ebene $e'_b e'_v$ darstellen werde, welche durch die Schnittgerade $\varphi' \delta'$ der Ebenen $e_b e_v$ und $S_v S_b$ geht, und dass es mithin genügen wird, wenn man als weiteres Bestimmungsstück von $e'_v e'_b$ das Spiegelbild einer beliebigen Geraden der Ebene $e_v e_b$, allenfalls das Spiegelbild $l'^{v'}_{d'}$ von l^v_d, konstruiert. Die Tracen e'_v und e'_b ergeben sich sodann als die Verbindungsgeraden der Fluchtpunkte φ' und v' resp. der Durchstosspunkte δ' und d'.

Auch hier tritt die harmonische Beziehung zwischen den Fluchtelementen auf. Wir finden nämlich sofort, dass die drei Fluchttracen e_v, e'_v, S_v und die Verbindungsgerade $\varphi' v_s$ beziehungsweise durch die vier harmonischen Punkte v, v', φ' und v_s gehen, also vier harmonische Strahlen bilden.

Fassen wir die Ergebnisse kurz zusammen, so resultiert folgender Satz:

„Die Centralprojektion eines Punktes und die Centralprojektion seines Spiegelbildes bezüglich irgend einer Spiegelebene sind durch den der Spiegelebene entsprechenden Normalenfluchtpunkt und durch die Projektion des der Spiegelebene angehörenden Punktes ihrer Verbindungsgeraden harmonisch getrennt.“

„Die Fluchtpunkte einer Geraden und ihres Spiegelbildes sind durch die Fluchttrace der Spiegelebene und den der letzteren entsprechenden Normalenfluchtpunkt harmonisch getrennt.“

„Die Fluchttracen einer Ebene und ihres Spiegelbildes sind durch die Fluchttrace der Spiegelebene und durch die Verbindungs-

gerade des ihnen gemeinschaftlichen Fluchtpunktes und des der Spiegelebene entsprechenden Normalenfluchtpunktes harmonisch getrennt.“

§ 227.

75. Aufgabe: **Es ist das Spiegelbild eines ebenen Gebildes centralprojektivisch darzustellen und die Beziehung seines Bildes zum Bilde des Originals klar zu legen.**

Sei $S_v S_b$ [Fig. 178, Taf. X] die spiegelnde Ebene und **abc** die Centralprojektion des Originalgebildes (diesfalls eines Dreieckes) in der Ebene $E_v E_b$.

Als zur Konstruktion unumgänglich notwendig, ermitteln wir vor allem den der Spiegelebene $S_v S_b$ entsprechenden Normalenfluchtpunkt v_s. Das Spiegelbild des Dreieckes **abc** wird ein zweites Dreieck sein, dessen Ebene durch das Spiegelbild der Ebene $E_v E_b$ repräsentiert erscheint. Die letztere schneidet die Spiegelebene $S_v S_b$ in der Geraden **dv**.

Konstruiert man jene Gerade E'_v, welche die beiden Geraden S_v und $v v_s$ mit E_v harmonisch trennt (etwa mit Hilfe eines vollständigen Viereckes), so wird E'_v (Satz in § 226) die Fluchttrace des Spiegelbildes $E'_v E'_b$ der Ebene $E_v E_b$ vorstellen, während die Bildflächtrace E'_b in der durch **d** zu E'_v Parallelen erhalten wird.

Nach den hiermit getroffenen Vorbereitungen ist es nunmehr äusserst leicht, das Spiegelbild des Dreieckes **abc** zu konstruieren. Der Fluchtpunkt v_1 der Dreieckseite **ab** hat zu seinem Spiegelbilde den Schnittpunkt v'_1 von E'_v mit dem Strahle $v_1 v_s$. Das Spiegelbild der Dreieckseite **ab** selbst erhält man daher als die Verbindungsgerade des Punktes v'_1 mit jenem Punkte Δ_1, in welchem **ab** die Spiegelebene (oder im besonderen den Schnitt $\mathbf{dv} = \mathbf{A}$ der Spiegelebene $S_v S_b$ mit der Ebene $E_v E_b$) trifft. Weiter erhält man auf $v'_1 \Delta_1$ die Spiegelbilder **a'** und **b'** von **a** und **b** mittels der Strahlen $v_s a$ und $v_s b$.

Das Spiegelbild **b' c'** der zweiten Dreieckseite **bc** geht durch **b'** und durch den Schnittpunkt Δ_2 von **bc** mit $\mathbf{dv} = \mathbf{A}$, ergibt sich daher als die Verbindungsgerade $\Delta_2 b_1$ der beiden eben genannten Punkte. Auf $b' \Delta_2$ bestimmt endlich der Strahl $v_s c$ das Spiegelbild **c'** des dritten Dreieckpunktes.

In gleicher Weise könnte man zu jedem anderen Punkte der Ebene $E_v E_b$ das entsprechende Spiegelbild, und ebenso zu jeder Geraden von $E_v E_b$ das zugehörige Spiegelbild konstruieren.

Da hierbei die Centralprojektionen jedes Originalpunktes und seines Spiegelbildes immer auf einem und demselben durch den Normalenfluchtpunkt V_s der Spiegelebene $S_v S_b$ gehenden Strahle liegen, und weiter die Centralprojektionen einer Geraden und ihres Spiegelbildes sich stets in der Centralprojektion $A = dv$ der Schnittgeraden von $S_v S_b$ und $E_v E_b$ schneiden, so folgt (nach § 197), dass die Centralprojektionen eines beliebigen in der Ebene $E_v E_b$ liegenden Gebildes und dessen Spiegelbildes kollineare Figuren sind. Es kann also der Satz aufgestellt werden:

„Die Centralprojektion eines beliebigen ebenen Systems und die Centralprojektion irgend eines Spiegelbildes des letzteren sind stets konlokal kollinear; das Kollineationscentrum ist durch den der spiegelnden Ebene entsprechenden Normalenfluchtpunkt, und die Kollineationsachse durch die Centralprojektion jener Geraden, in welcher die Spiegelebene von der Ebene des vorgenannten Systems geschnitten wird, repräsentiert.“

§ 228.

76. Aufgabe: **Es ist der Glanzpunkt einer gegebenen Ebene für zwei gegebene Punkte zu bestimmen; oder: es sind zwei Punkte a und b im Raume und eine Ebene E gegeben, in der Ebene E ist ein Punkt G derart zu ermitteln, dass G mit a und b verbunden zwei Geraden bestimmt, welche gegen E gleich geneigt erscheinen und in einer zur Ebene E senkrechten Ebene liegen.**

Unter dem Glanzpunkte einer Ebene **E** [Fig. 179, Taf. X] für zwei Punkte **a** und **b** versteht man jenen Punkt **G** dieser Ebene, in welchen ein in dem einen Punkte, etwa in **b**, befindliches Auge das Spiegelbild **a'** des zweiten Punktes **a** verlegen kann, oder mit anderen Worten jenen Punkt **G**, in welchem ein von dem einen Punkte, beispielsweise von **a**, ausgehender Strahl die Ebene treffen muss, wenn er nach der Reflexion von dieser Ebene durch den zweiten Punkt **b** gehen soll.

Dieser Definition gemäss ergeben sich folgende geometrische Eigenschaften. Die Fusspunkte α und β der von den beiden Punkten **a** und **b** auf die Ebene **E** gefällten Perpendikel, der Schnittpunkt **s** der Verbindungsgeraden **ab** mit der Ebene **E** und der Glanzpunkt **G** liegen in einer und derselben Geraden, und zwar in der Schnittgeraden der Ebene **E** mit der

senkrecht zu ihr durch die Verbindungsgerade **ab** der beiden gegebenen Punkte gelegten Hilfsebene. Ferner ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken $\mathbf{a}\alpha\mathbf{s}$ und $\mathbf{b}\beta\mathbf{s}$, dass

$$\alpha\mathbf{s} : \beta\mathbf{s} = \mathbf{a}\alpha : \mathbf{b}\beta,$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\mathbf{a}'\alpha\mathbf{G}$ und $\mathbf{b}\beta\mathbf{G}$ oder $\mathbf{a}\alpha\mathbf{G}$ und $\mathbf{b}\beta\mathbf{G}$:

$$\alpha\mathbf{G} : \beta\mathbf{G} = \mathbf{a}\alpha : \mathbf{b}\beta$$

und mithin

$$\alpha\mathbf{s} : \beta\mathbf{s} = \alpha\mathbf{G} : \beta\mathbf{G},$$

woraus folgt, dass (§ 162) die Punkte α und β durch die Punkte **s** und **G** harmonisch getrennt sind.

Hierauf gründet sich eine sehr einfache Konstruktion resp. centralprojektivische Darstellung des Glanzpunktes einer gegebenen Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ [Fig. 180, Taf. X] für zwei gegebene Punkte **a** und **b** (deren gemeinschaftlicher Träger durch die Gerade $\varphi\delta$ dargestellt werden möge).

Man hat nämlich diesfalls mit Hilfe des der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ entsprechenden Normalenfluchtpunktes $\mathbf{v_s}$ durch $\varphi\delta$ die zur Spiegelebene $\mathbf{E_v E_b}$ senkrechte Ebene $\mathbf{h_v h_b}$ zu legen, im Schnitte **dv** dieser beiden Ebenen die Fusspunkte α und β der von **a** und **b** auf $\mathbf{E_v E_b}$ gefällten Normalen $\mathbf{a v_s}$ und $\mathbf{b v_s}$, sowie den Schnittpunkt **s** von $\mathbf{E_v E_b}$ und der Geraden $\delta\varphi = \mathbf{ab}$ zu bestimmen, und hierauf — etwa mit Hilfe des vollständigen Viereckes $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \beta)$ — den Glanzpunkt **G** als denjenigen Punkt zu konstruieren, welcher mit **s** die Strecke $\alpha\beta$ harmonisch trennt.

§ 229.

77. Aufgabe: **Es ist der Glanzpunkt einer Ebene für drei gegebene Punkte zu konstruieren.**

In dem vorliegenden Falle kann der gesuchte Glanzpunkt offenbar nicht mehr dieselbe geometrische Bedeutung, wie im vorhergehenden Probleme haben, sondern man wird diesfalls mit der Benennung „Glanzpunkt“ jenen Punkt der Ebene definieren, welcher mit den drei gegebenen Punkten verbunden, drei gegen die Ebene **E** gleichgeneigte Geraden liefert.

Zum Zwecke der Bestimmung der Lage dieses Punktes in der Ebene **E** wollen wir einige Betrachtungen vorausschicken.

Wir werden nämlich zuvor den geometrischen Ort aller Punkte **P** einer Ebene **E** [Fig. 179, Taf. X] zu bestimmen trachten, welche mit zwei ausserhalb der Ebene **E** gegebenen festen Punkten **a** und **b** verbunden jedesmal zwei gegen **E** gleich geneigte Geraden ergeben.

Bezeichnen wir die Fusspunkte der von **a** und **b** auf die Ebene **E** gefällten Perpendikel mit α resp. β, und ist **P** [Fig. 179, Taf. X] ein der vorgenannten Bedingung entsprechender Punkt der Ebene **E**, sind also die Geraden **aP** und **bP** unter gleichem Winkel ω gegen **E** geneigt, so müssen dieselben auch mit ihren bezüglichen Orthogonalprojektionen α**P** und β**P** die gleichen Winkel (ω) einschliessen. Mit Rücksicht hierauf folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken $\mathbf{a}\alpha\mathbf{P}$ und $\mathbf{b}\beta\mathbf{P}$ die Beziehung, dass:

$$\alpha\mathbf{P} : \beta\mathbf{P} = \mathbf{a}\alpha : \mathbf{b}\beta.$$

Dieses Verhältnis ist — wie die rechte Seite der Gleichung zeigt — von der Lage des Punktes **P** unabhängig, also für alle Punkte **P** konstant, daher wir den an früherer Stelle (§ 162) gepflogenen Erörterungen unmittelbar entnehmen können, dass der geometrische Ort des Punktes **P** jener Kreis in der Ebene **E** sei, der die Strecke **Gs** (gebildet von den die Strecke $\alpha\beta$ innerlich und äusserlich im Verhältnisse $\frac{\mathbf{a}\alpha}{\mathbf{b}\beta}$ teilenden Punkten **s** und **G**) zum Durchmesser hat.

Die eben bewiesene Eigenschaft gestattet nachstehende Lösung der gestellten Aufgabe.

Sei $\mathbf{E_v E_b}$ [Fig. 181, Taf. X] die Ebene, in welcher der Glanzpunkt **p** der drei gegebenen Punkte **a**, **b** und **c** konstruiert werden soll. Die Letzteren seien durch ihre Centralprojektionen und durch ihre Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ gegeben.

So wie in der früheren Aufgabe (§ 228) legen wir auch hier durch die Gerade $\delta\varphi = \mathbf{ab}$ eine zur Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ senkrechte Ebene $\mathbf{h_v h_b}$, ermitteln den Schnitt **v' d'** derselben mit der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$, und in dieser Schnittgeraden **v' d'** die Punkte $\mathbf{s_1}$, α und β. Durch die bekannte Viereckskonstruktion kann nun anstandslos zu den genannten drei Punkten der vierte harmonische Punkt $\mathbf{G_1}$ gefunden werden.

Ferner bestimmen wir den Schnittpunkt $\mathbf{s_2}$ der Geraden **ac** mit der Ebene $\mathbf{E_v E_b}$ (derselbe liegt im Schnitte **vd** der beiden Ebenen $\mathbf{E_v E_b}$ und $\mathbf{e_v e_b}$). Die Verbindungsgerade $\mathbf{s_2}\alpha$ repräsentiert

sodann den Schnitt der Ebene $E_v E_b$ mit der durch **a c** senkrecht zu $E_v E_b$ geführten Ebene. Besagte Verbindungslinie $s_2 \alpha$ wird von der zu $E_v E_b$ senkrechten Geraden $c v_s$ in dem Punkte γ getroffen. Eine zweite mit der vorhergegangenen übereinstimmende Vierecks-konstruktion liefert den Punkt G_2, welcher mit s_2 das Paar $\alpha\gamma$ harmonisch trennt.

Den früher angestellten Betrachtungen zufolge wird der über $s_1 G_1$ als Durchmesser beschriebene Kreis K_1 der geometrische Ort aller Punkte der Ebene $E_v E_b$ sein, welche mit **a** und **b** verbunden, stets zwei gegen $E_v E_b$ gleichgeneigte Geraden ergeben, während der über $s_2 G_2$ als Durchmesser beschriebene Kreis K_2 ein geometrischer Ort von gleicher Bedeutung für die beiden Punkte **a** und **c** sein wird.

Diese beiden Kreise K_1 und K_2 werden sich im allgemeinen in zwei Punkten P_1 und P_2 schneiden, welche der gestellten Aufgabe genügen.

Um die besagten Punkte bildlich darzustellen, legen wir auf bekannte Weise die obbezeichneten Geraden $s_1 G_1$, $s_2 G_2$ um E_b in die Bildebene nach $s_1^0 G_1^0$ und $s_2^0 G_2^0$ um, beschreiben über $s_1^0 G_1^0$ und $s_2^0 G_2^0$ (als Durchmesser) beziehungsweise die Kreise K_1^0 und K_2^0, und führen die sich ergebenden Schnittpunkte P_1^0 und P_2^0 der letzteren, falls sie sich reell ergeben, nach P_1 resp. P_2 zurück.

III. Abschnitt.

Transformationen centralprojektivischer Bilder.

VIII. Kapitel.

§ 230.

Es kommt nicht selten vor, dass das centralprojektivische Bild irgend eines Gebildes im Raume unbrauchbar wird, sei es aus dem Grunde, dass es nicht den gewünschten sinnlichen Eindruck hervorbringt, oder deshalb, weil die gegenseitige Lage seiner Bestandteile oder Elemente die an und mit ihnen vorzunehmenden Konstruktionen sehr erschwert oder doch zu Ungenauigkeiten führt. So wird es beispielsweise nur sehr schwer möglich sein, an dem Bilde eines Viereckes und dergl., welches in einer nahezu centralprojizierenden Ebene liegt, Konstruktionen mit Genauigkeit zu vollziehen, da die Bilder der Viereckseiten beinahe zusammenfallen.

In solchen Fällen wird man auf irgend eine zweckentsprechende Weise ein zweites Bild des betreffenden Gebildes, welches den Anforderungen besser entspricht, für die an und mit ihm vorzunehmende Konstruktionen also geeigneter erscheint, herzustellen haben. Geschieht dies in der Weise, dass das zweite Bild durch gewisse systematische Konstruktionen unmittelbar aus dem vorliegenden ersten Bilde abgeleitet wird, so bezeichnet man die gesamte Operation als eine *„Transformation des centralprojektivischen Bildes“*. Das erste Bild pflegt man dann das *„ursprüngliche“* oder *„Stammbild“*, das zweite hingegen das *„abgeleitete“* oder *„transformierte Bild“* zu nennen.

Jede derartige Transformation muss notwendig der centralprojektivische Ausdruck einer Lagenänderung entweder des

dargestellten Gebildes selbst, oder des Projektionscentrums oder der Bildebene, oder aber endlich zweier dieser Stücke zu gleicher Zeit sein.

Im Interesse der Einfachheit der Ausführung wird man jedoch von den letztgenannten (*doppelten* oder *kombinierten*) Transformationen sowohl, als auch von den der Form nach willkürlichen Lagenänderungen womöglich Umgang nehmen, demgemäss als Lagenänderungen nur die denkbar elementarsten, d. h. bloss jene wählen, welche Resultate einer geradlinigen Verschiebung oder einer Drehung um eine Achse sind.

Da ferner an und für sich einleuchtend ist, dass die Bildebene als jene Ebene, in welcher alle graphischen Operationen vorgenommen werden, — mit Ausnahme der zwecklosen Verschiebung in sich selbst —, unmöglich eine derartige Lagenveränderung erfahren kann, dass graphische Operationen in der neuen Lage mit solchen in der ursprünglichen Lage in einen zweckentsprechenden graphischen Zusammenhang gebracht werden können, so wollen wir als Mittel zur Transformation bloss näher in Betracht ziehen:

a) die geradlinige Verschiebung und die Achsendrehung des dargestellten Gebildes, und

b) die geradlinige Verschiebung des Projektionscentrums.

Die erste der beiden genannten Methoden, d. i. die Lagenveränderung des Gebildes, können wir aber an dieser Stelle ohne weiteres übergehen, da ihre centralprojektivische Darstellung nach den bereits bekannten prinzipiellen centralprojektivischen Konstruktionen (Führen von parallelen Geraden, Auftragen gegebener Strecken auf denselben, Umlegung, u. s. w. u. s. w.) nun keinerlei Schwierigkeiten mehr bieten kann. Wir werden uns daher in folgendem bloss mit der Transformation durch Lagenänderung des Centrums näher befassen.

§ 231.

Es stelle **BE** [Fig. 182 und Fig. 183, Taf. X] die Bildebene, **C** das Projektionscentrum und **A** den entsprechenden Hauptpunkt vor. Das Projektionscentrum **C** denken wir uns derart verschoben, dass es in der neuen Lage durch die beiden Stücke **C'** und **A'** bestimmt erscheine.

Da die beiden Distanzen **AC** und **A'C'** zur Bildebene senkrecht stehen, so bestimmen sie eine zur Bildebene senkrechte Ebene, deren Bildflächtrace **AA'** ist. In dieser letzteren muss sodann selbstverständlich auch der Schnittpunkt Γ jenes Strahles mit der Bildebene liegen, längs welchen die Verschiebung **CC'** des Centrums stattgefunden hat.

Nachdem ferner die Dreiecke **ΓCA** und **ΓC'A'** [Fig. 182, Taf. X] ähnlich sind, so verhält sich

$$\Gamma A : \Gamma A' = CA : C'A',$$

woraus folgt, dass man bei konstruktiver (graphischer Darstellung) den Punkt Γ [Fig. 183, Taf. X] sofort erhalte, wenn die Distanz **A'C'** parallel zu **AC** geführt, und **AA'** mit **CC'** zum Schnitte gebracht wird.

Untersuchen wir nun zunächst, in welchem Zusammenhange die Stammprojektion und die transformierte Projektion einer beliebigen Geraden **L** im Raume zu einander stehen.

Vor allem ist klar, dass der Durchstosspunkt **d** [Fig. 182 und 183, Taf. X] dieser Geraden, als Punkt der Bildebene, durch die Lagenänderung des Centrums unbeeinflusst bleibt, also den Durchstosspunkt der Stammprojektion **l** sowohl als auch jenen der transformierten Projektion **l'** der Geraden **L** repräsentiert.

Die Fluchtpunkte **v** und **v'** der beiden Bilder sind die Schnittpunkte der Bildebene mit den durch die bezüglichen Centra **C** und **C'** parallel zur Geraden **L** [Fig. 182, Taf. X] geführten Fluchtstrahlen **Cv** und **C'v'**. Nachdem diese Fluchtstrahlen untereinander parallel sind, so bestimmen sie eine Ebene, welche selbstverständlich auch die Gerade **CC'** enthält. In der Bildflächtrace dieser Ebene müssen sodann notwendig die Schnittpunkte **v**, **v'** und Γ der drei Geraden **Cv**, **C'v'** und **CC'** mit der Bildebene liegen, oder mit anderen Worten: der transformierte Fluchtpunkt **v'** irgend einer Geraden [Fig. 182 und 183, Taf. X] liegt auf jenem Strahle, welcher den jeweiligen Stammfluchtpunkt **v** mit dem festen Punkte Γ verbindet.

Aus den ähnlichen Dreiecken **ΓCv** und **ΓC'v'** [Fig. 182, Taf. X] entnehmen wir, dass:

$$\Gamma v : \Gamma v' = C\Gamma : C'\Gamma.$$

Nachdem aber auch:

$$\Gamma A : \Gamma A' = C\Gamma : C'\Gamma, \quad \text{folgt}$$

$$\Gamma v : \Gamma v' = \Gamma A : \Gamma A'$$

d. h. die Geraden, welche den Stammfluchtpunkt **v** [Fig. 182 und 183, Taf. X] und den transformierten Fluchtpunkt **v'** einer beliebigen Geraden des Raumes mit dem ursprünglichen Hauptpunkte **A** resp. mit dem abgeleiteten Hauptpunkte **A'** verbinden, sind stets parallel; das Verhältnis der Abstände des Stammfluchtpunktes **v** und des transformierten Fluchtpunktes **v'** einer Geraden vom Punkte Γ ist konstant, und dem Verhältnisse der beiden Distanzen **AC** und **A' C'** gleich.

Nachdem dasselbe von jedem anderen Paare einander zugeordneter Fluchtpunkte **v** und **v'** gilt, so ist nach den Ausführungen in § 199 einleuchtend, dass das System der Fluchtpunkte der transformierten Centralprojektion irgend eines Gebildes im Raume und das System der Fluchtpunkte der Stammprojektion dieses Gebildes stets ähnlich kollinear aufeinander bezogen sind, wobei der Punkt Γ das Ähnlichkeitscentrum, und das Verhältnis der Distanzen **AC** und **A' C'** den Ähnlichkeitsmodul repräsentiert.

Denken wir uns ferner einen beliebigen Punkt **P** [Fig. 182, Taf. X] im Raume, dessen Träger allenfalls die Gerade **L** sein mag. Die beiden obgenannten Projektionen **p** und **p'** dieses Punktes müssen selbstverständlich in den bezüglichen Projektionen **l** und **l'** [Fig. 182 und 183, Taf. X] des Trägers **L** liegen.

Beachtet man weiter, dass die beiden dem Punkte **P** [Fig. 182, Taf. X] entsprechenden Projektionsstrahlen **CP** und **C' P** eine Ebene bestimmen, welche auch die Gerade **CC'** enthält, so ist offenbar, dass die drei Punkte **p**, **p'** und Γ, in welchen die genannten drei Geraden **CP**, **C' P** und **CC'** die Bildebene schneiden, in einer und derselben Geraden, nämlich in der Bildflächtrace der Ebene **CC' P**, liegen müssen, oder mit anderen Worten, dass die transformierte Centralprojektion **p'** und die Stammprojektion **p** [Fig. 182 und 183, Taf. X] eines beliebigen Punktes im Raume stets auf einem und demselben durch den festen Punkt Γ, d. i. durch das Ähnlichkeitscentrum, gehenden Strahle liegen.

Wie nun auf Grund dieser Eigenschaften das transformierte Bild **p'** [Fig. 183, Taf. X] eines durch die auf einem Träger **dv** liegende Stammprojektion **p** gegebenen beliebigen Punktes **P** zu konstruieren sein wird, bedarf wohl keiner besonderen Erläuterung.

Denken wir uns endlich im Raume eine beliebige Ebene **E** gegeben, welche wir, um eine Wiederholung von bereits durch-

geführten Konstruktionen zu ersparen, durch die Gerade **L** [Fig. 182, Taf. X] gehend annehmen wollen.

Die Bildflächtrace E_b dieser Ebene **E** bleibt selbstverständlich, als eine Gerade in der Bildebene, bei der Transformation ungeändert. Die Stammfluchttrace E_v und die abgeleitete Fluchttrace E'_v sind als Schnitte der Bildebene mit den durch die Projektionscentra **C** und **C'** parallel zu **E** geführten Fluchtebenen, zur Bildflächtrace E_b sowohl, als auch untereinander parallel.

Nachdem offenbar die Fluchtpunkte **v** und **v'** der Stammprojektion und der abgeleiteten Projektion einer beliebigen Geraden der Ebene **E** stets in den bezüglichen Fluchttracen E_v und E'_v [Fig. 182 und 183, Taf. X] liegen müssen, so wird auch umgekehrt jeder durch den festen Punkt Γ gehende Strahl die genannten Fluchttracen E_v und E'_v in zwei Punkten **v** und **v'** schneiden, welche jederzeit beziehungsweise den Stammfluchtpunkt und den transformierten Fluchtpunkt einer der Ebene **E** angehörenden Geraden vorstellen und als solche von Γ Entfernungen besitzen, deren Verhältnis gleich **CA : C'A'** ist.

Infolgedessen haben auch die beiden einander zugeordneten Fluchttracen E_v und E'_v Entfernungen von Γ, deren Verhältnis dem konstanten Verhältnisse **CA : C'A'** gleich ist. Hiernach repräsentieren E_v und E'_v stets zwei einander entsprechende Geraden in den bereits an früherer Stelle als ähnlich-kollinear bezeichneten Fluchtpunktsystemen der Stammprojektion und des abgeleiteten Bildes irgend eines räumlichen Objektes. Diese Ergebnisse zusammengefasst erhalten wir den Satz:

„Die durch eine beliebige geradlinige Verschiebung des Projektionscentrums bedingte transformierte Centralprojektion irgend eines räumlichen Gebildes hat mit der Stammprojektion des letzteren das System der Durchstosspunkte und der Bildflächtracen gemein, während die Fluchtsysteme der Stammprojektion und der transformierten Projektion ähnlich-kollinear sind. Hierbei stellt der Bildflächdurchstosspunkt jener Geraden, längs welcher das Projektionscentrum verschoben wurde, das Ähnlichkeitscentrum vor, während das Verhältnis der den beiden Lagen des Projektionscentrums entsprechenden Distanzen den Ähnlichkeitsmodul repräsentiert. Der Strahl, welcher die Stammprojektion und die abgeleitete Projektion eines beliebigen Punktes im Raume verbindet, geht durch das vorgenannte Ähnlichkeitscentrum, ohne dass zwei solche Projektionen eines Punktes im allgemeinen einander ‚ähnlich' entsprechen."

§ 232.

Wenn ein ebenes Gebilde centralprojektivisch dargestellt und hierauf, infolge einer Verschiebung des Centrums, transformiert wird, so zeigt sich noch eine weitere höchst bemerkenswerte Eigenschaft.

Da nämlich die Durchstosspunkte sämtlicher Geraden dieses Gebildes in einer und derselben Geraden, d. i. in der Bildflächtrace der Ebene dieses Gebildes liegen, und (nach dem vorstehenden Satze) sowohl den Stammprojektionen als auch den transformierten Projektionen aller Geraden des Systems angehören, nachdem ferner die Stammprojektion und die abgeleitete Projektion jedes Punktes des Gebildes auf einem und demselben durch den festen Punkt Γ gehenden Strahle liegen, so folgt (mit Rücksicht auf § 197) ohne weiteres der Satz:

„Die durch eine geradlinige Verschiebung des Projektionscentrums hervorgerufene transformierte Projektion eines beliebigen ebenen Gebildes ist mit der Stammprojektion dieses Gebildes kollinear. Die Bildflächtrace des Gebildes repräsentiert die Kollineationsachse und der Bildflächdurchstosspunkt jener Geraden, längs welcher die Verschiebung des Centrums erfolgte, das Kollineationscentrum.“

Der Kürze halber wollen wir in der Folge den Punkt Γ, in welchem die Verschiebungsgerade des Projektionscentrums die Bildebene trifft, das *„Transformationscentrum“* nennen.

§ 233.

Unter den Transformationen durch Verschiebung des Projektionscentrums sind zwei Fälle hervorzuheben, welche bei besonderen Verschiebungen des Centrums auftreten, und zwar einerseits bei einer Translation des Projektionscentrums auf dem Hauptstrahle, und anderseits bei einer zur Bildebene parallelen Verschiebung des Projektionscentrums.

Im ersten Falle sind die dem ursprünglichen Centrum und dem abgeleiteten Centrum entsprechenden Hauptpunkte sowie auch das Transformationscentrum in einem und demselben Punkte vereinigt. Dementsprechend erleiden die vorher (in den §§ 231 und 232) aufgestellten Sätze diesbezügliche unwesentliche und bloss formelle Anderungen.

Im zweiten Falle dagegen, d. i. bei einer Verschiebung des Projektionscentrums in einer zur Bildebene parallelen Geraden rückt der Schnittpunkt der letzteren mit der Bildebene (das Transformationscentrum) in unendliche Ferne. Die Verbindungsgerade der Hauptpunkte des ursprünglichen und abgeleiteten Projektionscentrums bestimmt dann sowohl die Richtung als auch die Grösse der Verschiebung.

Die Fluchtsysteme beider Projektionen sind sodann (Satz in § 231) für ein unendlich fernes Kollineationscentrum ähnlich-kollinear; dieselben sind also insbesondere kongruent. Das eine Fluchtsystem geht daher aus dem anderen durch eine blosse Parallelverschiebung, welche mit jener des Projektionscentrums in Richtung und Grösse übereinstimmt, hervor. Es besteht demnach der Satz:

„Die durch eine zur Bildebene parallele Verschiebung des Projektionscentrums hervorgerufene transformierte Centralprojektion irgend eines Gebildes im Raume hat mit der Stammprojektion dieses Gebildes die sämtlichen der Bildebene angehörenden Elemente gemein, während ihr Fluchtsystem mit jenem der Stammprojektion kongruent ist und eine Parallelverschiebung des letzteren vorstellt, welche mit der Verschiebung des Centrums sowohl der Grösse als auch der Richtung nach übereinstimmt.“

„Die Stammprojektion und die abgeleitete Projektion eines beliebigen Punktes liegen stets auf einem zur genannten Verschiebungsrichtung parallelen Strahle.“

Der in § 232 ausgesprochene Satz wird nun nachstehende besondere Form annehmen.

„Die durch eine zur Bildebene parallele Verschiebung des Projektionscentrums bedingte transformierte Centralprojektion irgend eines ebenen Gebildes ist mit der Stammprojektion des Gebildes affin verwandt.“

„Die Richtung der Affinitätstrahlen ist mit jener der Verschiebung des Centrums identisch, und die Affinitätsachse ist durch die Bildflächtrace der Ebene des genannten Gebildes repräsentiert.“

§ 234.

78. Aufgabe: **Ein in einer Ebene $E_v E_b$ [Fig. 184, Taf. XI] gegebenes Dreieck abc ist durch Verschiebung des Projektionscentrums so zu transformieren, dass seine veränderte Projektion mit einem in der Bildebene gegebenen Dreieck (a)(b)(c) parallel (und ähnlich) wird.**

Die abgeleitete Centralprojektion des Dreieckes, die wir mit **a'b'c'** bezeichnen wollen, wird ausser den in der Aufgabe mit Rücksicht auf das Dreieck (a)(b)(c) geforderten Eigenschaften (Satz in § 232) auch die besitzen, dass sie mit der ursprünglichen Centralprojektion **abc**, für E_b als Kollineationsachse, kollinear ist.

Wir erhalten demnach die abgeleitete Projektion **a'b'c'**, indem wir durch die drei Punkte **d**, d_1 und d_2, in welchen E_b beziehungsweise von **ac**, **ab** und **bc** getroffen wird, die zu (a)(c), (a)(b) und (b)(c) Parallelen ziehen. Das von besagten drei Parallelgeraden gebildete Dreieck **a'b'c'** ist in der That parallel (und mithin auch ähnlich) mit dem gegebenen Dreiecke (a)(b)(c), ausserdem aber auch kollinear mit dem Dreiecke **abc** in bezug auf die Bildflächtrace E_b als Kollineationsachse.

Ferner schneiden sich die drei Verbindungsstrahlen **aa'**, **bb'** und **cc'** (zweiter Fundamentalsatz, § 92) in einem und demselben Punkte **C**, welcher nichts anderes als das zugehörige Kollineationscentrum und gleichzeitig (Bemerkung in § 232) das Transformationscentrum repräsentiert.

Der durch **C** nach dem Fluchtpunkte **v** von **ab** gezogene Strahl bestimmt auf **a'b'** den transformierten Fluchtpunkt **v'**, durch welchen die transformierte Fluchttrace E'_v der Dreiecksebene parallel zu E_b zu führen ist.

Bestimmt man weiter auf der Verbindungsgeraden **AC** von **C** mit dem ursprünglich gegebenen Hauptpunkte **A** durch Zuhilfenahme der beiden parallelen Hilfsgeraden **Av** und **v'A'** den Punkt **A'**, so stellt dieser letztere (Satz in § 231) den abgeleiteten Hauptpunkt vor, und wir können somit auch die abgeleitete Distanz **A'C'** (wie in § 231 gezeigt wurde) dadurch erhalten, dass die durch **A'** parallel zu **AC** gezogene Gerade **A'C'** mit der Geraden C_1C in **C'** zum Schnitte gebracht wird. Hierbei ist gleichzeitig zu ersehen, dass die beiden Projektionscentra C_1 und **C'** notwendig auf verschiedenen Seiten der Bildebene liegen müssen.

§ 235.

79. Aufgabe: **Zwei sich schneidende Geraden $l^{v_1}_{d_1}$ und $g^{v_2}_{d_2}$ [Fig. 185, Taf. XI] sind durch eine zur Bildebene normale Verschiebung des Centrums so zu transformieren, dass ihre abgeleiteten Centralprojektionen einen gegebenen Winkel φ bilden; es ist die Grösse der erforderlichen Verschiebung zu ermitteln.**

Da bei jeder Transformation durch Lagenänderung des Projektionscentrums alle Durchstosspunkte und Bildflächtracen (Satz in § 231) ungeändert bleiben, so werden auch im vorliegenden Falle die noch unbekannten abgeleiteten Centralprojektionen l' und g' der gegebenen Geraden $l^{v_1}_{d_1}$ und $g^{v_2}_{d_2}$ durch d_1 und d_2 gehen. Nachdem weiter l' und g' den gegebenen Winkel φ bilden sollen, so muss der Schnittpunkt a' derselben auf jenem Kreise K_φ liegen, der über der Sehne $d_1 d_2$ den Peripheriewinkel φ fasst.

Nachdem endlich, da eine Normalverschiebung des Centrums gefordert wird, der Hauptpunkt A gleichzeitig auch das Transformationscentrum Γ vorstellt, so wird der dem Schnittpunkte a von l und g entsprechende transformierte Punkt a' auf dem Strahle Aa liegen und sich daher im Schnitte des letzteren mit dem Kreise K_φ ergeben. Hieraus ist gleichzeitig zu entnehmen, dass die gestellte Aufgabe zwei Lösungen gestattet.

Dic Geraden $a' d_1 = l'$ und $a' d_2 = g'$ sind nun die transformierten Centralprojektionen von $l^{v_1}_{d_1}$ und $g^{v_2}_{d_2}$, deren Fluchtpunkte v'_1 und v'_2 man sofort mittels der Transformationsstrahlen Av_1 und Av_2 erhält. Führt man schliesslich $v'_1 C'$ parallel zu $v_1 C$, so

$$AC' : AC = Av'_1 : Av_1.$$

Es repräsentiert also AC' die abgeleitete Distanz, und CC' die der gestellten Aufgabe entsprechende Verschiebungsgrösse des Projektionscentrums.

§ 236.

80. Aufgabe: **In einer durch ihre Tracen E_v und E_b [Fig. 186, Taf. XI] gegebenen Ebene liegt eine Gerade l^v_d, deren Fluchtpunkt v ausserhalb der Zeichnungsfläche zu liegen kommt; auf dieser Geraden ist von einem bestimmten Punkte a aus eine gegebene Länge λ unter der Voraussetzung aufzutragen, dass auch die Distanz zu gross ist, um direkt benützt werden zu können.**

Dieses Problem bietet ein Beispiel, wie die Transformation nicht nur zur Herstellung eines neuen Bildes dienen, sondern wie dieselbe auch als Mittel verwendet werden kann, um bei gewissen Beschränkungen Konstruktionen zu ermöglichen, die mit den bereits bekannten im vollen Einklange stehen.

Im vorliegenden Falle, sowie in allen ähnlichen Fällen wird die Methode der Konstruktion darin bestehen, eine geeignete Verschiebung des Projektionscentrums und die damit verbundene Transformation vorzunehmen, hierauf die von der Aufgabe geforderten Operationen durchzuführen, und das so erzielte Resultat in geeigneter Weise zurück zu transformieren.

Was die passende Verschiebung des Projektionscentrums betrifft, so wird man darunter eine solche zu verstehen haben, bei welcher möglichst viel von der ursprünglichen Projektion benutzbar bleibt, und überdies die durchzuführenden Konstruktionen in der grösstmöglichen Einfachheit sich gestalten.

Zu diesem Zwecke empfiehlt sich eine Verschiebung des Centrums in der Fluchtebene der gegebenen Ebene, da hierbei die Fluchttrace E_v erhalten bleibt. Insbesondere dürfte es aber zweckmässig erscheinen, die durch das Projektionscentrum gehende Fallgerade der Fluchtebene als Verschiebungsgerade anzunehmen. Hierdurch wird überdies erreicht, dass der Nebenhauptpunkt A_1 gleichzeitig das Transformationscentrum vertritt.

In der Geraden AA_1 wird man sodann den abgeleiteten Hauptpunkt A' so nahe an A_1 annehmen, dass die abgeleitete Distanz $A'C'$ —, welche bekanntlich zur ursprünglichen Distanz AC in dem nämlichen Verhältnisse steht, wie die Strecke $A'A_1$ zur Strecke AA_1 —, zur weiteren Konstruktion mit Bequemlichkeit benutzbar wird. Mit Zugrundelegung dieser vorbereitenden Betrachtung kann die Transformation folgendermassen durchgeführt werden.

Durch den auf der Geraden **l** gegebenen Punkt **a** legt man eine zweite gleichfalls in der Ebene $E_v E_b$ befindliche Gerade $d_1 v_1$, deren Fluchtpunkt v_1 innerhalb der Grenzen der zu Gebote stehenden Zeichnungsfläche (jedoch nicht zu nahe an A_1) liegt. Die zu der Verbindungsgeraden Av_1 durch A' parallel geführte Gerade bestimmt auf E_v (Satz in § 231) den transformierten Fluchtpunkt v'_1; die transformierte Hilfsgerade erhält man demnach (dem eben angeführten Satze entsprechend) in $d_1 v'_1$, und folglich auf der letzteren, mittels des Strahles $A_1 a$, den transformierten Punkt a'. Hiermit ist auch die transformierte Projektion der ursprünglich gegebenen Geraden **l** als Verbindungsgerade der Punkte **d** und a' bestimmt.

Nun kann man entweder durch Umlegung nach $a_0 b_0 = \lambda$, oder auch mit Benützung des Teilpunktes T' von v' (Schnitt von da' mit E_v, d. i. dem Fluchtpunkte der transformierten Geraden **l**) und der Strecke $\alpha\beta = \lambda$ in der Bildflächtrace E_b den transformierten Punkt b' konstruieren, und sodann aus b' mittels des Transformationsstrahles $A_1 b'$ die auf **l** zu bestimmende Centralprojektion **b** ableiten.

Nebenbei sei an dieser Stelle noch einer eigenartigen Konstruktion Erwähnung gethan, nach welcher sich der Punkt **b** auf **l** auch direkt mittels einer Art von Teilpunkt bestimmen lässt.

Die in der Zeichnungsfläche nicht vorhandenen Punkte **v** und **T** d. h. der Stammfluchtpunkt und der Stammteilpunkt der Geraden **l**, sind mit den transformierten Punkten v' und T' durch die Beziehungen

$$v'A_1 : vA_1 = A'A_1 : AA_1 \quad \text{und}$$

$$T'A_1 : TA_1 = A'A_1 : AA_1$$

verbunden, oder mit anderen Worten: die Dreiecke $A'T'v'$ und ATv haben parallele Seiten.

Ist demnach U' ein Punkt, welcher die Strecke $T'v'$ in irgend einem beliebigen Verhältnis

$$\frac{T'U'}{v'U'} = \frac{m}{n}$$

teilt, so wird, wenn man AU parallel zu $A'U'$ zieht, notwendig auch **U** die Strecke Tv in dem nämlichen Verhältnisse $\frac{TU}{vU} = \frac{m}{n}$ teilen.

Sonach ist ein Mittel gefunden, die Strecke **Tv**, trotzdem ihre Endpunkte **T** und **v** ausserhalb der beschränkten Zeichnungsfläche liegen, in einem beliebigen Verhältnisse $\frac{m}{n} = \frac{TU}{vU}$ zu teilen.

Denkt man sich nun den Punkt **a** sowohl von dem unzugänglichen Punkte **T**, als auch von **U** aus auf E_b beziehungsweise nach α_1 und α'_1, und in gleicher Weise **b** von **T** und **U** aus nach β_1 resp. β'_1 projiziert, so ergeben sich mit Leichtigkeit die Beziehungen:

$$d\alpha'_1 : \alpha_1\alpha'_1 = vU : UT = m : n$$

oder

$$d\alpha'_1 : d\alpha_1 = vU : vT = m : m + n$$

und ebenso

$$d\beta'_1 : d\beta_1 = vU : vT = m : m + n.$$

Hieraus folgt weiter, dass

$$d\alpha'_1 = \frac{m}{m+n} \cdot d\alpha_1 \quad \text{und}$$

$$d\beta'_1 = \frac{m}{m+n} \cdot d\beta_1,$$

ferner aber, da $d\alpha_1 - d\beta_1 = \alpha_1\beta_1$ und $d\alpha'_1 - d\beta'_1 = \alpha'_1\beta'_1$ ist, dass:

$$\alpha'_1\beta'_1 = \alpha\beta \cdot \frac{m}{m+n}.$$

Nachdem weiter $\alpha\beta$, als die vom Teilpunkte **T** aus bewerkstelligte Projektion von **ab** auf E_b, gleich der wahren Grösse λ der Strecke **ab** ist, wird der Punkt **U**, sobald

$$Uv : UT = m : m + n$$

die Punkte **a** und **b** so auf E_b nach α'_1 und β'_1 projizieren, dass auch

$$\alpha'_1 b'_1 : \lambda = m : m + n$$

wird.

Bestimmt man hiernach beispielsweise **U'** als den Halbierungspunkt der Strecke **v'T'**, und führt man **AU** parallel zu **A'U'**, so kann der Punkt **b** auf **l** sofort erhalten werden, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{U'T'}{v'T'} = \frac{UT}{vT} = \frac{1}{2}$$

ist, dass also auch die Projektion $\alpha'_1\beta'_1$ der Strecke **ab** von **U** aus auf die Bildflächtrace E_b übertragen, gleich $\frac{1}{2}\lambda$ sein muss.

§ 237.

81. Aufgabe: **In einer Ebene, welche durch ihre Bildflächtrace E_b [Fig. 187, Taf. XI] gegeben ist und von deren Fluchttrace E_v nur ein kleines Stück, (oder nur ein Punkt φ) innerhalb der Zeichnungsfläche liegt, sind zwei sich schneidende Geraden $l^{v_1}_{d_1}$ und $g^{v_2}_{d_2}$ gegeben; es ist die wahre Grösse ihres Neigungswinkels n zu bestimmen.**

Den gemachten Voraussetzungen gemäss fallen die Fluchtpunkte v_1 und v_2 der beiden Geraden l und g ausserhalb der Grenzen der Zeichnungsfläche; die Bestimmung des Neigungswinkels dieser Geraden gegeneinander ist daher nur mit Hilfe einer Transformation möglich.

Im vorliegenden Falle dürfte es am zweckmässigsten sein, die Verschiebung des Projektionscentrums so zu bewerkstelligen, dass das Transformationscentrum Γ mit dem Bilde p des den beiden gegebenen Geraden gemeinschaftlichen Punktes zusammenfällt.

Weiter wollen wir als transformierte Fluchttrace E'_v eine, selbstverständlich zu E_b parallele Gerade so wählen, dass sie die beiden Geraden l und g in zwei innerhalb der Grenzen der zu Gebote stehenden Zeichnungsfläche liegenden Punkten v'_1 und v'_2 schneidet.

Zufolge der getroffenen Annahmen sind hieraus zunächst die Bestimmungsstücke der Transformation, d. i. das abgeleitete Projektionscentrum (A', C') zu ermitteln.

Zieht man demnach den Strahl φp, so trifft derselbe die Fluchttrace E'_v in jenem Punkte φ', welcher dem Fluchtpunkte φ transformiert entspricht. Der abgeleitete Hauptpunkt A' ergibt sich (Satz in § 231) auf pA mittels der zu φA parallelen Geraden $\varphi' A'$; ebenso findet man die abgeleitete Distanz $A'C'$ im Schnitte von pC mit der durch A' zu AC geführten Geraden $A'C'$.

Da nun für das Centrum (A', C') die Projektionen der gegebenen Geraden durch $d_1 v'_1$ und $d_2 v'_2$ dargestellt sind, so lässt sich leicht der verlangte Neigungswinkel durch Umlegung um E_b in $v'_1 C_0 v'_2 = n$ ermitteln.

IV. Abschnitt.

Aus Ebenen zusammengesetzte Gebilde.

IX. Kapitel.

Das Dreikant oder die dreiseitige körperliche Ecke.

§ 238.

Allgemeine Bemerkungen.

Drei durch einen und denselben Punkt gehende und nicht derselben Ebene angehörende Geraden bilden im Vereine mit den drei durch sie paarweise bestimmten ebenen Flächenstreifen eine Figur, welche ein *„Dreikant“*, eine *„körperliche Ecke“* oder ein *„körperliches Dreieck“* heisst.

Die drei genannten Geraden pflegt man die *„Kanten“* und die durch sie paarweise bestimmten Ebenen, beziehungsweise deren begrenzte Winkelräume, die *„Seitenflächen“* oder kurz die *„Seiten“* des Dreikants zu nennen.

Die drei Winkel, welche die Kanten des Dreikantes paarweise einschliessen, nennt man die *„Kantenwinkel“* und jene drei Winkel, welche von den Seitenflächen paarweise eingeschlossen werden, die *„Seitenwinkel“* oder *„Flächenwinkel“* des Dreikantes. Das letztere ist durch irgend drei dieser sechs Winkel stets vollkommen bestimmt.

Fällt man von irgend einem Punkte senkrechte Geraden auf die Seitenflächen eines Dreikantes, so bilden diese Normalen ein zweites Dreikant, welches der besonderen Eigenschaft wegen, dass die jeweiligen Kantenwinkel desselben die entsprechenden Seitenwinkel des gegebenen Dreikants, und umgekehrt die Kantenwinkel des ersteren die entsprechenden Seitenwinkel des anderen zu zwei Rechten ergänzen, als ein *„Supplementardreikant“* des ersteren bezeichnet wird.

Nachdem unter den vorausgeschickten fundamentalen Aufgaben der ersten drei Kapitel die Methoden für die Bestimmung der beziehungsweise von Geraden und Ebenen gebildeten Winkel, sowie jene für die Bestimmung von Geraden und Ebenen unter gegebenen Winkeln gegen andere Geraden und Ebenen bereits hinlänglich erörtert wurden, wird die centralprojektivische Darstellung eines Dreikantes aus irgend drei seiner Bestimmungsstücke, sowie auch die Ermittelung der wahren Grösse der Winkel eines Dreikantes, welches perspektivisch dargestellt vorliegt, keinerlei Schwierigkeiten bieten.

§ 239.

82. Aufgabe: **Ein durch drei Kantenwinkel gegebenes Dreikant ist centralprojektivisch darzustellen, und sind seine Flächenwinkel der wahren Grösse nach zu ermitteln.**

Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, dass das Dreikant mit einer Seitenfläche, beispielsweise mit jener **SOP** [Fig. 188, Taf. XI], deren Kanten den gegebenen Kantenwinkel β einschliessen, in der zur Bildebene senkrechten Ebene $E_v'' E_b''$ liege, und dass die eine Kante **SO** senkrecht zur Bildebene stehe.

Die noch übrigen zwei Seitenflächen denkt man sich an die Seitenfläche **SOP** in der Ebene $E_v'' E_b''$ unmittelbar angereiht, was allenfalls in der Weise geschehen kann, dass man die Fluchtstrahlen von **SO** und **PO** in die Bildebene nach AC_0 und $v_1 C_0$ umlegt, an dieselben die beiden Kantenwinkel $\alpha = AC_0 v_2$ und $\gamma = v_1 C_0 v_3$ anschliesst, und hieraus die Centralprojektionen Ov_2 und Ov_3 ableitet.

Ferner möge auf der Geraden Ov_3, etwa mit Hilfe des derselben entsprechenden Teilpunktes T_3 (diesfalls kann bekanntlich infolge des Umstandes, dass Ov_3 zu E_b parallel ist, T_3 beliebig in der Fluchttrace E_v angenommen werden, beispielsweise also auch mit v_2 zusammenfallen) jener Punkt **n** bestimmt werden, welcher von **O** den nämlichen Abstand wie der Durchstosspunkt d_2 der Geraden Ov_2 hat (die wahre Grösse von Od_2 wurde mit Hilfe des Teilpunktes T_2 von Ov_2 bestimmt).

Werden nun die beiden Seitenflächen SOd_2 und **POn** beziehungsweise um die Kanten **OS** und **OP** so lange gedreht, bis die beiden Kanten Od_2 und **On** im Raume zusammentreffen, so werden offenbar zu gleicher Zeit auch die beiden Punkte d_2 und **n**, als von **O** gleichweit abstehend, zur Vereinigung gelangen.

Hierbei beschreibt der in der Bildebene liegende Punkt d_2, da seine Drehungsachse $OS = Ad$ zur Bildebene senkrecht steht, in der Bildebene einen Kreis K, dessen Mittelpunkt d ist, während der Punkt n einen Kreis in der durch ihn senkrecht zur Kante $OP = d_1 v_1$ (als Drehachse) gelegten Drehungsebene $S_v S_b$ durchläuft. Jeder der beiden Punkte, in welchen der Kreis K von der Trace S_b getroffen wird, kann somit als die Vereinigung der Punkte d_2 und n nach vollendeter Drehung der vorgenannten Seitenebenen betrachtet werden. Wählen wir diesfalls den Punkt D, so wird derselbe bereits den Bildflächdurchstosspunkt der dritten Kante OR repräsentieren.

Die durch OR und OS, resp. durch OR und OP gelegten Seitenebenen $E_v E_b$ und $E_v' E_b'$ bestimmen im Schnitte V ihrer Fluchttracen E_v und E_v' den Fluchtpunkt V der Kante OR.

Was endlich die Grösse der drei zu bestimmenden Flächenwinkel a, b und c betrifft, so kann der Winkel b, als Neigungswinkel der beiden Ebenen $E_v' E_b'$ und $E_v E_b$, in der Weise ermittelt werden, wie in Aufgabe 39 resp. 40 gezeigt wurde.

Der Seitenwinkel c, welcher von den beiden Seitenebenen $E_v E_b$ und $E_v'' E_b''$ gebildet wird, erscheint, da beide Ebenen senkrecht zur Bildebene stehen, unmittelbar in seiner wahren Grösse als derjenige Winkel, den die Bildflächtracen E_b und E_b'' einschliessen. Ebenso einfach findet man den von den Seitenebenen POS und POR gebildeten Neigungswinkel a. Die bereits vorher benützte, zur Kante OP senkrechte Drehungsebene $S_v S_b$ schneidet die besagte Kante im Punkte Z und mithin die Seitenebenen $E_v'' E_b'' = POS$ und $E_b' E_v' = POR$ in den Geraden $z\delta$ und zD. Der von diesen Geraden gebildete Winkel a wird sich demnach in seiner wahren Grösse durch Umlegung um S_b, unter Benützung des um S_v nach C_0' umgelegten Projektionscentrums C_0, sofort in $Dz_0\delta = a$ ergeben. Hiermit erscheint die körperliche Ecke nicht nur dargestellt, sondern auch aufgelöst.

§ 240.

83. Aufgabe: **Ein durch zwei Kantenwinkel α und β, und den von ihnen eingeschlossenen Seitenwinkel c gegebenes Dreikant ist centralprojektivisch darzustellen, und sind die wahren Grössen der übrigen Winkel zu ermitteln.**

In Nachstehendem wollen wir für die Darstellung irgend eines Dreikants eine Methode entwickeln, welche von gewissen

speziellen Lagen der Kanten und Seitenebenen des gegebenen körperlichen Dreiecks gänzlich absieht, trotzdem aber eine höchst einfache Konstruktion desselben gestattet. Besagte Methode beruht auf der Eigentümlichkeit, dass die Fluchtstrahlen der Kanten irgend eines Dreikantes wieder ein Dreikant bilden, dessen Winkel genau dieselben sind wie jene des gegebenen körperlichen Eckes.

Wird dieses „Fluchtdreikant“ um die Trace irgend einer seiner drei Seitenebenen so gedreht, dass die betreffende Seitenfläche in die Bildebene gelangt, so sind in dieser besonderen Lage alle Konstruktionen sehr einfach und leicht durchzuführen.

Setzen wir demgemäss voraus, es sei $E_v E_b$ [Fig. 189, Taf. XI] die Seitenfläche, welche den Kantenwinkel α enthält; $OP = dv$ sei die eine in dieser Seitenfläche liegende Kante und O stelle die Centralprojektion des in der genannten Kante liegenden Scheitels des darzustellenden Dreikantes vor. Legen wir das Projektionscentrum C um E_v in die Bildebene nach C_0 um, so erhalten wir den umgelegten Fluchtstrahl der Kante OP in $C_0 v$; konstruieren wir weiter den Fluchtstrahl $C_0 v_1$ der zweiten Kante OR gegen $C_0 v$ unter dem gegebenen Kantenwinkel α, so wird die Centralprojektion OR der zweiten Kante durch die Verbindungsgerade der beiden Punkte O und v_1 dargestellt.

Der angedeuteten Methode entsprechend, wird es nun keinem Anstande unterliegen auch die dritte Kante des gedrehten Fluchtdreikantes $C_0(v, v_1 ..)$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke reihen wir den Kantenwinkel $\beta = \measuredangle(\pi) C_0 v$ an $C_0 v$ an und drehen ihn so lange um $C_0 v$, bis seine Ebene mit der Bildebene den gegebenen Flächenwinkel c einschliesst. Hierbei beschreibt der Punkt (π) von $C_0(\pi)$ einen Kreisbogen, welcher in der durch (π) senkrecht zu $C_0 v$ geführten Ebene $h_b h_v$ liegt. Indem wir diese Ebene um ihre Trace h_b in die Bildebene umgelegt denken, ergibt sich nach vollbrachter Drehung der obbezeichnete Punkt der dritten Kante auf bekannte Weise durch seine orthogonale Bildflächprojektion π und durch seinen Abstand $\pi\pi'$ von der Bildebene.

Dieses so erhaltene Fluchtdreikant $C_0(v, v_1, \pi)$ ist nun in die richtige Lage zu bringen, d. h. um E_v so lange zu drehen, bis C_0 mit dem Projektionscentrum C im Raume zusammenfällt. Hierbei ist der Drehungswinkel offenbar der Bildflächneigung n_e der Ebene $E_v E_b$ gleich.

Wird demnach die Drehung des Dreikantes um E_v um den

Winkel n_e vollzogen, so gelangt der Punkt (π, π') — in der zu E_v senkrechten Drehungsebene $H_v H_b$ — nach δ, p_0^1, wobei wieder δ seine orthogonale Bildflächprojektion, und δp_0^1 dessen Abstand von der Bildebene repräsentiert. Mittels des der Ebene $H_v H_b$ entsprechenden umgelegten Centrums C ist sodann seine Centralprojektion p leicht zu bestimmen. Durch p geht nun selbstverständlich der Fluchtstrahl der dritten Kante des zu konstruierenden Dreikants; es stellt mithin p gleichzeitig den Fluchtpunkt v_2 der besagten Kante und $Ov_2 = OS$ deren Centralprojektion dar.

Die bisher noch unbekannten Winkel des Dreikantes können ohne jedwede Schwierigkeit sofort an dem gedrehten Fluchtdreikant $C_0(v, v_1, \pi)$ ermittelt werden.

So erhält man beispielsweise durch Umlegung des Punktes (π, π') um die Kante $C_0 v_1$ nach (π_1) unmittelbar den dritten Kantenwinkel $\gamma = \measuredangle(\pi_1) C_0 v_1$ und gleichzeitig auch den Flächenwinkel $b = \measuredangle \pi \omega_1 \pi_1'$, dessen Scheitel ω_1 in der Kante $C_0 v_1$ liegt.

Schneidet man ferner das Fluchtdreikant mit einer durch den Punkt (π, π') gehenden, zur Kante $C_0 \pi$ senkrechten Ebene, so sind die Schnittgeraden derselben mit den Seitenflächen $v C_0(\pi)$ und $v_1 C_0(\pi_1)$ die durch (π) resp. (π_1) beziehungsweise senkrecht zu $C_0(\pi)$ und $C_0(\pi_1)$ geführten Geraden $(\pi)\mu$ und $(\pi_1)\nu$. Die geradlinige Verbindung der beiden Punkte μ und ν in $C_0 v$ resp. $C_0 v_1$ bestimmt die Bildflächtrace der obbezeichneten Hilfsebene, während der um $\mu\nu$ umgelegte Scheitel π_0 des Flächenwinkels a erhalten wird, indem man einfach das Dreieck $\mu\nu\pi_0$ mit den Seiten $\mu\pi_0 = \mu(\pi)$ und $\nu\pi_0 = \nu(\pi_1)$ über $\mu\nu$ verzeichnet. Hierbei repräsentiert, wie leicht einzusehen, der Winkel $\mu\pi_0\nu$ den gesuchten dritten Flächenwinkel a.

§ 241.

84. Aufgabe: **Ein Dreikant ist centralprojektivisch darzustellen, wenn die Centralprojektion POR eines seiner Kantenwinkel in der Ebene $E_v E_b$ [Fig. 190, Taf. XI], ein zweiter Kantenwinkel γ, und der ihm gegenüber liegende Flächenwinkel c in wahrer Grösse gegeben sind.**

So wie im vorhergehenden Falle werden wir auch hier die Fluchtstrahlen des gegebenen Kantenwinkels POR um die Fluchttrace E_v seiner Ebene in die Bildebene nach $C_0 v$ und $C_0 v_1$ um-

legen und in dieser Lage die dritte Kante des Fluchtdreikantes, d. i. jene Gerade ermitteln, welche mit C_0V_1 den Winkel γ bildet, und mit C_0V eine gegen die Bildebene unter dem Winkel c geneigte Seitenebene bestimmt.

Zu diesem Zwecke legen wir den Kantenwinkel $\gamma = mC_0V_1$ an die Kante C_0V_1 an, und führen durch den beliebig gewählten Punkt m seines Schenkels C_0m die Hilfsebene h_b senkrecht zu C_0V_1. Wird der Punkt m in dieser Ebene gedreht, so beschreibt er den (um h_b umgelegt gedachten) Kreis K_0. Ferner suchen wir den Schnitt s dieser Hilfsebene h_b mit der vorgenannten, durch C_0V gehenden, gegen die Bildebene unter dem Winkel c geneigten Seitenebene. Da in diesem Falle der Schnittpunkt δ der Tracen h_b und C_0V bereits ein Punkt der Schnittgeraden s ist, so hat man bloss noch einen zweiten Punkt von s zu bestimmen.

Zu diesem Behufe wählt man an beliebiger Stelle eine zu C_0V senkrechte Hilfsebene h_b'; dieselbe schneidet die genannte Seitenebene in einer gegen die Bildflächtrace h_b' unter dem gegebenen Seitenwinkel c geneigten Geraden nr_0', und die Ebene h_b in der durch den Tracenschnittpunkt ρ (von h_b und h_b') gehenden zur Bildebene senkrechten Geraden, welche, um h_b' umgelegt, in $\rho r_0'$ dargestellt erscheint. Der Schnittpunkt r_0' dieser beiden Hilfsgeraden repräsentiert somit einen um h_b' umgelegten Punkt der zu konstruierenden Schnittgeraden s.

Wird der besagte Schnittpunkt nun auch um h_b nach r_0 ($r_0\rho = r_0'\rho$) umgelegt, so stellt sich die um h_b umgelegte Schnittgerade s in $s_0 = \delta r_0$ dar; der dem früher gezeichneten Kreise K_0 und der Schnittgeraden s_0 gemeinschaftliche Punkt π_0 ist bereits der verlangte Punkt der zu suchenden dritten Kante des Fluchtdreikantes. Aus π ist durch Drehung um E_v sowie im vorher besprochenen Falle der Fluchtpunkt V_2 und die Centralprojektion $OS = OV_2$ der dritten Kante des zu konstruierenden Dreikantes abzuleiten.

§ 242.

85. Aufgabe: **Ein Dreikant, von welchem ein Kantenwinkel durch seine Centralprojektion POR in der Ebene E_vE_b [Fig. 191, Taf. XI] und die wahren Grössen c und b der beiden anliegenden Seitenwinkel gegeben sind, ist darzustellen.**

Es seien wieder C_0V und C_0V_1 die um E_v umgelegten Fluchtstrahlen der Kanten OP und OR.

In dieser Lage wird die dritte Kante des Fluchtdreikantes als Schnitt zweier Ebenen erhalten, von welchen die eine durch $C_0 v$ unter dem Winkel c, die andere dagegen durch $C_0 v_1$ unter dem Winkel b gegen die Bildebene zu legen ist. Die Neigungswinkel der besagten zwei Ebenen erhält man in den beiden beziehungsweise zu $C_0 v$ und zu $C_0 v_1$ senkrechten Hilfsebenen h_b resp. h_b', dieselben erscheinen somit durch

$$\measuredangle c = \measuredangle (h_b,\ o\pi_0) \quad \text{und} \quad \measuredangle b = \measuredangle (h_b',\ o'\rho_0')$$

dargestellt.

Der Schnitt der durch $C_0 v_1$ gehenden Seitenebene mit der Hilfsebene h_b ist eine Gerade σ, welche einerseits durch den Punkt ρ und anderseits durch den Tracenschnittpunkt δ geht, sich also nach Umlegung um h_b in $\sigma_0 = \delta\rho_0$ ergibt. Der den Geraden $\delta\rho_0 = \sigma_0$ und $o\pi_0 = s_0$ gemeinschaftliche Punkt π_0, dessen orthogonale Bildflächprojektion π in h_b zu suchen ist, liefert bereits einen Punkt der dritten Kante des Fluchtdreikantes, welcher demnach ebenso, wie in den vorhergegangenen gleichartigen Aufgaben, wieder zur Ermittelung des Fluchtpunktes v_2 und der Centralprojektion $OS = Ov_2$ der dritten Kante des zu konstruierenden Dreikantes verwendet werden kann.

§ 243.

86. Aufgabe: **Ein Dreikant ist centralprojektivisch darzustellen, wenn der eine Flächenwinkel a durch die Tracen $e_v e_b$ und $e_v' e_b'$ [Fig. 192, Taf. XII] der ihn einschliessenden Seitenflächen, und die beiden anderen Seitenwinkel in wahrer Grösse (b und c) gegeben sind.**

Behufs Lösung der vorliegenden Aufgabe kann man entweder direkt eine Ebene suchen, welche mit den gegebenen Ebenen $e_v e_b$ und $e_v' e_b'$ die bezüglichen Winkel b und c einschliesst, oder man wird von einem Supplementardreikant in folgender Weise Gebrauch machen.

Man bestimmt die Normalenfluchtpunkte v und v_1 der Ebenen $e_v e_b$ und $e_v' e_b'$, legt die durch diese Punkte gehenden Fluchtstrahlen um $E_v = vv_1$ in die Bildebene nach $C_0 v$ und $C_0 v_1$ um, so werden dieselben den Winkel $(180° - a)$ bilden.

Betrachtet man $C_0 v$ und $C_0 v_1$ als zwei Kanten eines Dreikantes, und konstruiert unter der Voraussetzung, dass die beiden

anderen Kantenwinkel desselben beziehungsweise (180° — **b**) und (180° — **c**) seien, die dritte Kante; dreht man ferner das so erhaltene Dreikant (in ähnlicher Weise wie es in den vorausgeschickten gleichartigen Fällen durchgeführt wurde) um E_v in den Raum zurück, so erhält man daselbst das dem zu bestimmenden Dreikante entsprechende Supplementarfluchtdreikant.

Es wird diesfalls genügen, die dem Fluchtpunkte der dritten (gefundenen) Kante entsprechende Normalenfluchttrace zu konstruieren, um in derselben gleichzeitig die Fluchttrace der noch fehlenden dritten Seitenebene dargestellt zu erhalten.

§ 244.

87. Aufgabe: **Es sind die Centralprojektionen dv, d_1v_1 und d_2v_2** [Fig. 193, Taf. XII] **dreier sich in einem Punkte 0 schneidenden Geraden gegeben; das Projektionscentrum ist unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass diese drei Geraden die Centralprojektionen der Kanten eines rechtwinkligen Dreikantes repräsentieren.**

Da man unter einem rechtwinkligen Dreikant ein solches versteht, welches von drei gegenseitig oder paarweise aufeinander senkrecht stehenden Geraden gebildet wird, oder mit anderen Worten, dessen Kantenwinkel und Flächenwinkel je 90° betragen, so muss im vorliegenden Falle die Gerade v_1v_2 die dem Fluchtpunkte **v** entsprechende Normalenfluchttrace repräsentieren, da sie die Fluchttrace der der Kante **dv** gegenüberliegenden und auf ihr senkrecht stehenden Seitenfläche ist. Der Hauptpunkt **A** muss demnach in der durch **v** senkrecht zu v_1v_2 geführten Geraden vA_1 liegen.

Die gleichen Betrachtungen bezüglich der beiden anderen Kanten angestellt, zeigen, dass der Hauptpunkt **A** auch in den durch v_1 resp. v_2 beziehungsweise senkrecht zu vv_2 und vv_1 geführten Geraden v_1A_3 und v_2A_2 liegen muss, also der Höhenschnitt des Dreieckes vv_1v_2 ist.

Beschreibt man schliesslich über vA_1 einen Halbkreis γ, so trifft derselbe offenbar die durch **A** senkrecht zu vA_1 geführte Gerade in **C** so, dass **AC** die gesuchte Distanz vorstellt.

X. Kapitel.

Centralprojektivische Darstellung der durch ebene Flächenstücke (Polygone) begrenzten Gebilde (Polyeder), ihrer ebenen und gegenseitigen Schnitte.

§ 245.

Allgemeine Bemerkungen.

Jeder endliche Raum, welcher von einer endlichen Anzahl ebener Flächenstücke (Polygone) begrenzt ist, heisst ein *Polyeder*.

Gewisse Paare der das Polyeder begrenzenden Polygone, die man „aufeinander folgende“ oder „benachbarte Seiten“ des Polyeders nennt, haben Kanten gemein, welche auch als die *„Kanten“* des Polyeders bezeichnet werden. Die Ecken der begrenzenden Polygone sind durchwegs auch *„Ecken“* des Polyeders.

Im allgemeinen gehen durch jede Kante des Polyeders nur zwei *„Seitenebenen“* oder begrenzende Polygone; jeder Kante des Polyeders entsprechen bloss zwei Eckpunkte desselben, während durch jeden Eckpunkt eines Polyeders zum mindesten drei Seitenebenen und drei Kanten gehen.

Ein Polyeder ist durch die Lage seiner sämtlichen Eckpunkte erst dann gegeben, wenn gleichzeitig auch die Art und Weise, wie diese Eckpunkte durch Kanten verbunden werden sollen, festgestellt ist.

Die in der Anwendung am häufigsten zur Darstellung und Konstruktion gelangenden Polyeder sind die *„Pyramiden“* und *„Prismen“*, und nächst diesen die *„regelmässigen Polyeder“*.

Da die Entstehung und die wichtigsten Eigenschaften dieser Körper aus der elementaren Geometrie hinreichend bekannt sind, so können wir uns hier auf die Methoden ihrer centralprojektivischen Darstellung und der Bestimmung ihrer Schnitte beschränken. Diesem Zwecke mögen die nachfolgenden Beispiele dienen.

§ 246.

88. Aufgabe: **Es ist das Bild einer fünfseitigen Pyramide, deren Basis in einer durch die Tracen L_v, L_b [Fig. 194, Taf. XII] gegebenen Ebene L liegt, und deren Scheitel S auf dem Träger $\delta\varphi$ gegeben ist, zu konstruieren. Der Schnitt dieser Pyramide mit einer Ebene $E_v E_b$ ist zu bestimmen.**

Das die Basis der zu konstruierenden Pyramide bildende Fünfeck, welches in der Ebene $L_v L_b$ [Fig. 194, Taf. XII] liegt, sei durch seine Centralprojektion **abcde** direkt gegeben.

Die Centralprojektionen der Seitenkanten der Pyramide sind sodann unmittelbar durch die Verbindungsgeraden **Sa, Sb, Sc, Sd, Se** dargestellt.

Nachdem allgemein die berechtigte Anforderung gestellt wird, dass die bildliche Darstellung eines körperlichen Gebildes dem wirklichen Aussehen des letzteren möglichst entspreche, also denselben Eindruck wie dieses hervorbringe, so wird man offenbar auch auf die Undurchsichtigkeit der das räumliche Gebilde begrenzenden Seitenflächen Rücksicht nehmen müssen. Man pflegt demgemäss auch im Bilde des Körpers die unsichtbar oder gedeckt erscheinenden Kanten dadurch weniger augenfällig zu machen und gegenüber den sichtbaren Kanten gleichsam dadurch in den Hintergrund zu drängen, dass man dieselben strichuliert darstellt, während man die sichtbaren Kanten voll auszieht.

Als selbstverständliche Regel gilt diesbezüglich, dass die äusserste Begrenzung des Bildes (in Fig. 194, Taf. XII, das Polygon **abSdea**) unter allen Umständen sichtbar sei und daher als solche dargestellt werden muss. Man bezeichnet diese äusserste Begrenzung als den sichtbaren *„Umriss“* oder als die *„Kontur“* des Körpers auf der Bildebene.

Diejenigen Kanten, deren Projektionen die Kontur des dargestellten Objektes bilden, erscheinen demnach gleichsam als die Trennungslinien zwischen dem sichtbaren und dem unsichtbaren oder gedeckten Teile des Körpers.

So werden beispielsweise in Fig. 194, Taf. XII, nach der diesfallsigen Lage der Pyramide, die Kanten **aS**, **eS** unsichtbar sein, die Kanten **cS** dagegen, welche dem anderen, d. i. dem durch die äussersten Kanten **bS** und **dS** getrennten Teile der Pyramide angehört, sichtbar erscheinen.

Um übrigens eine nähere Entscheidung bezüglich des „Sichtbar- und Unsichtbarseins“ mit Leichtigkeit treffen zu können, wird man nachstehende Anhaltspunkte mit Vorteil benützen. Soll nämlich eine Kante sichtbar sein, so muss das Gleiche auch von allen ihren Punkten, die Endpunkte derselben mit inbegriffen, gelten. Mit der letztangefügten Bemerkung ist jedoch unter gewissen Umständen der Fall nicht ausgeschlossen, dass sich die Kante trotzdem als unsichtbar darstellen könne. Wenn hingegen ein oder beide Endpunkte der Kante unsichtbar sind, so kann dasselbe mit Bestimmtheit auch von der Kante selbst behauptet werden.

Diese Anhaltspunkte gelten jedoch nur für sogenannte konvexe und einfach zusammenhängende Polyeder. Wenn ein Polyeder einspringende Winkel besitzt, oder mehrfach zusammenhängend, etwa durchbrochen ist, so können Verhältnisse eintreten, welche die Verwendbarkeit der eben gemachten Bemerkungen nicht gestatten. Im allgemeinen jedoch werden wir von dem Gesagten erspriesslichen Gebrauch machen können und es erübrigt daher nur noch die Entscheidung, ob ein Punkt des Körpers gedeckt oder sichtbar erscheint. Dies ist ausschliesslich von der besonderen Lage und Form des dargestellten Gebildes abhängig und bleibt daher stets dem richtigen Vorstellungsvermögen des Konstrukteurs überlassen. Gute Dienste dürften diesbezüglich die in den §§ 10 und 11 entwickelten Beziehungen leisten. So wird man beispielsweise der Figur 194, Taf. XII, sofort entnehmen, dass die Punkte **b**, **c** und **d** der Basis vor der Bildebene, die Punkte **a**, **e** und der Scheitel **S** hinter der Bildebene liegen. Die Kanten **Sc**, **Sb**, **Sd**, **bc** und **cd** werden daher sichtbar sein, während die Kanten **aS** und **eS** unsichtbar oder gedeckt erscheinen.

Um den Schnitt der dargestellten Pyramide **abcdeS** [Fig. 194, Taf. XII] mit der Ebene $E_v E_b$ zu bestimmen, wird es sich selbstverständlich nur darum handeln, entweder die Durchstosspunkte der einzelnen Kanten mit der Ebene $E_v E_b$ aufzusuchen, oder beziehungsweise darum, die einzelnen Seitenebenen mit der schneidenden Ebene $E_v E_b$ zum Schnitte zu bringen und im letzteren Falle von den Schnittgeraden nur jene Stücke zu benützen, welche innerhalb der Grenzen der betreffenden Seitenebenen liegen.

Bevor wir auf die Schnittbestimmung selbst übergehen, seien noch einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt.

Der Schnitt eines von ebenen Polygonen begrenzten Körpers, d. i. eines Polyeders mit einer Ebene ist in allen Fällen ein geschlossenes endliches Polygon, dessen Eckpunkte die Schnittpunkte gewisser Polyederkanten und dessen Seiten die Schnittgeraden gewisser Polyederseiten mit der schneidenden Ebene sind.

Die ausserhalb der begrenzten Kanten und ausserhalb der begrenzten Seitenflächen sich ergebenden gemeinsamen Punkte und Geraden der schneidenden Ebene und des Polyeders sind keine Eckpunkte und keine Seiten des Schnittpolygons, können jedoch bei der Bestimmung des letzteren als (Hilfselemente) konstruktive Verwendung finden.

Behufs Ermittelung des Schnittpolygons der Ebene $E_v E_b$ mit der dargestellten Pyramide bestimmen wir im vorliegenden Falle zunächst den Schnitt von $E_v E_b$ mit einer Kante oder mit einer Seitenebene, beispielsweise mit der Seitenebene **abS** der Pyramide.

Der Durchstosspunkt **d'** und der Fluchtpunkt **v'** der Kante **ab** ergeben sich unmittelbar in den bezüglichen Tracen L_v und L_b der Basisebene. Die Seitenebene **abS** ist daher centralprojektivisch durch den Punkt **S** auf dem Träger $\delta\varphi$ und durch die Gerade **d'v'** gegeben; ihre Tracen H_v, H_b können somit leicht (Aufgabe 9) konstruiert werden. Die besagte Ebene wird von der Ebene $E_v E_b$ in der Geraden **v"d"** geschnitten, daher der innerhalb des Dreieckes **abS** liegende Teil **AB** von **v"d"** (den vorhergehenden Bemerkungen gemäss) eine Seite des gesuchten Schnittpolygons repräsentiert. Die übrigen Seiten des letzteren könnten nun in gleicher Weise ermittelt werden, indem man ebenfalls so wie hier die Tracen der einzelnen Seitenflächen sucht oder aber, indem man die Hauptpunkte (Flucht- und Durchstosspunkt) der einzelnen Pyramiden-Kanten feststellt und mit Zugrundelegung derselben die Schnitte der bezeichneten Kanten mit der Ebene $E_v E_b$ konstruiert und die so erhaltenen Schnittpunkte geradlinig verbindet.

Ist jedoch auf irgend eine Art ein Eckpunkt oder eine Seite des Schnittpolygons gefunden worden, so kann man aus denselben mittels eines besonderen Verfahrens die noch übrigen Elemente des Schnittpolygons sehr einfach dadurch finden, dass man von der Schnittgeraden $\Sigma = \mathbf{dv}$ der schneidenden Ebene $E_v E_b$ mit der Basisebene $L_v L_b$ direkten Gebrauch macht.

Gesetzt, es wäre beispielsweise der in der Kante **eS** liegende Eckpunkt **E** des Schnittpolygons zu bestimmen.

Denken wir uns zu diesem Zwecke durch die beiden Seitenkanten **bS** und **eS** der Pyramide eine Hilfsebene gelegt, die wir **P** nennen wollen. Diese Ebene schneidet die Basisebene $L_v L_b$ in der Geraden **be**, welche ihrerseits die vorgenannte Schnittgerade $\Sigma = dv$ in einem Punkte β trifft, der offenbar sowohl der Hilfsebene **P**, als auch der Ebene $E_v E_b$ angehört. Ein zweiter gemeinschaftlicher Punkt dieser beiden Ebene **E** und **P** ist aber der bereits vorher gefundene Eckpunkt **B** des Schnittpolygons, so dass sich deren gegenseitiger Schnitt in der Verbindungsgeraden βB ergibt. Die letztere trifft endlich die Kante **eS** in dem gesuchten Punkte **E.**

Ferner repräsentiert die Basiskante **ed** den Schnitt der Basisebene $L_v L_b$ mit der Seitenebene **edS**; dieselbe begegnet der Geraden $\Sigma = dv$ (Trace der schneidenden Ebene auf der Basisebene) in einem Punkte γ, welcher der genannten Seitenebene **deS** und der Ebene $E_v E_b$ gemeinschaftlich ist. Ein zweiter gemeinschaftlicher Punkt ist der Eckpunkt **E** des Schnittpolygons, so dass wieder γE die Schnittgerade der Seitenebene **deS** mit der Ebene $E_v E_b$, und der innerhalb des Dreieckes **deS** liegende Teil **DE** derselben eine folgende Seite des Schnittpolygons vorstellt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man nach und nach sämtliche Seiten des Schnittpolygons **ABCDEA** erhalten.

Aus den eben durchgeführten Konstruktionen erkennen wir gleichzeitig, dass das Schnittpolygon **ABCDE** und das Basispolygon **abcde** derart aufeinander bezogen sind, dass sich die in einer und derselben Kante liegenden Eckpunkte und die in derselben Seitenebene liegenden Seiten der beiden Polygone entsprechen, und dass nebstbei je zwei entsprechende Seiten oder Diagonalen dieser Polygone einen Punkt der Geraden $\Sigma = dv$ gemein haben. Hieraus folgt, dass beide Polygone kollinear verwandt sind, so dass der Satz gilt:

„Die Centralprojektionen des Basispolygons und eines ebenen Schnittpolygons einer Pyramide sind stets kollinear in bezug auf die Centralprojektion des Pyramidenscheitels als Kollineationscentrum und die Centralprojektion der der Basisebene und der schneidenden Ebene gemeinsamen Geraden als Kollineationsachse.“

Trifft die Schnittgerade $\Sigma = dv$ der Basisebene $L_v L_b$ und der schneidenden Ebene $E_v E_b$ die Basis **abcde** des Polyeders in zwei Punkten, so ist das durch diese Punkte begrenzte Stück der Geraden Σ selbst eine Seite des Schnittpolygons. Ein Teil des Schnittpolygons, falls letzteres als das mit der Basis kollineare

Polygon ermittelt wurde, wird diesfalls ausserhalb der eigentlichen (begrenzten) Pyramide liegen, kommt demgemäss nicht weiter in Betracht. Einen derartigen Schnitt bezeichnet man als einen *„Basisschnitt“* der Pyramide.

§ 247.

In vielen Fällen ist es wünschenswert, sämtliche Seitenflächen eines Polyeders in wahrer Grösse kennen zu lernen. Man kann sich zu diesem Zwecke das Polyeder längs gewisser Kanten getrennt und, vermöge des dadurch erreichten bloss teilweisen Zusammenhanges, die sämtlichen Seitenflächen in gewisser Aufeinanderfolge in einer und derselben Ebene ausgebreitet denken. Die sich auf diese Weise ergebende Figur heisst ein *„Netz“* des Polyeders, und die Methode zur Herstellung desselben das *„Developpieren“* oder die *„Developpierung“* des Polyeders.

Um eine Pyramide, wie beispielsweise **Sabcde** [Fig. 194, Taf. XII] zu developpieren, kann man zweckmässig allenfalls folgendermassen verfahren.

Man fällt von dem Scheitel **S** auf die Basisebene $L_v L_b$ eine Senkrechte σ, bestimmt den Schnittpunkt **o** beider und ermittelt hierauf (etwa mit Hilfe eines Teilpunktes **T**) die wahre Grösse $o'S'$ der Strecke **oS**. Weiter legt man das Basispolygon **abcde** sowie auch den Punkt **o** um L_b in die Bildebene beziehungsweise nach $a_0 b_0 c_0 d_0 e_0$ und o_0 um.

Bildet man sodann rechtwinklige Dreiecke mit der Strecke $o'S'$ [Fig. 195, Taf. XII] als deren gemeinschaftliche Kathete, während die anderen Katheten $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$, $o'd'$ und $o'e'$ beziehungsweise den Strecken $o_0 a_0$, $o_0 b_0$, $o_0 c_0$, $o_0 d_0$ und $o_0 e_0$ [Fig. 194, Taf. XII] gleich sind, so werden offenbar die Hypotenusen $S'a'$, $S'b'$, $S'c'$, $S'd'$, $S'e'$ die wahren Grössen der Pyramidenkanten **aS**...**eS** repräsentieren, und man kann sofort aus denselben und den Seiten des umgelegten Basispolygons $a_0 b_0 c_0 d_0 e_0$ das Netz $\Sigma\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha'$ der Pyramide ableiten, an welches der Vollständigkeit wegen noch das Basispolygon $a_0 b_0 c_0 d_0 e_0$ anzureihen wäre.

Anmerkung. In der vorstehenden Figur ist sonderbarerweise insofern ein Konstruktionsfehler (der leider zu spät bemerkt wurde, als dass eine Änderung der Figur noch möglich gewesen wäre) unterlaufen, als die Bildflächtrace S_b der zu $L_b L_v$ senkrechten Ebene $S_b S_v$ durch den Punkt δ parallel zu $v_s \varphi = S_v$ zu führen war.

§ 248.

89. Aufgabe: **Es ist ein Prisma darzustellen, dessen eine Basis ein in der Bildebene liegendes Quadrat ist, dessen Seitenkanten zu einer gegebenen Ebene parallel sind und mit der Bildebene den Winkel α einschliessen, während dessen zweite Basis in einer zur Bildebene parallelen Ebene liegt; ferner ist der Schnitt des Prisma a) mit einer Ebene b) mit einer Geraden (Erzeugende irgend einer Regelfläche) zu konstruieren.**

Sei **abcd** [Fig. 196, Taf. XII] das die Basis des Prisma bildende, in der Bildebene gegebene Quadrat. Nachdem das Prisma als eine Pyramide mit unendlich fernem Scheitel, also als Pyramide mit parallelen Seitenkanten betrachtet werden kann, diese letzteren aber der gestellten Forderung gemäss einerseits parallel zur Ebene $e_v e_b$ und anderseits unter dem Winkel α gegen die Bildebene geneigt sein sollen, so wird man ihren Fluchtpunkt **v** als Schnitt von e_v mit dem dem Winkel α entsprechenden Neigungskreise (Fluchtkreise) K_α erhalten. Hiernach stellen die Geraden **av**, **bv**, **cv** und **dv** die Centralprojektionen der Prismenseitenkanten vor.

Da das Prisma durch eine zur Bildebene parallele Ebene abzuschliessen ist, über die Entfernung dieser zur Bildebene parallelen Ebene aber nähere Bestimmungsstücke nicht vorliegen, so wollen wir annehmen, dass die letztere durch den willkürlich auf der Kante **av** gewählten Punkt a_1 gehe. Der Schnitt dieser Ebene mit der Seitenebene **abv** wird die durch a_1 gehende zur Bildflächtrace der besagten Seitenebene, d. i. zur Basiskante **ab** parallele Gerade $a_1 b_1$ sein. In gleicher Weise findet man den Schnitt der zur Bildebene parallelen Ebene mit der Seitenebene **bvc** als die durch b_1 parallel zu **bc** gezogene Gerade $b_1 c_1$ u. s. w., so dass man als Bild der zweiten Basis des Prisma das mit **abcd** parallele Quadrat $a_1 b_1 c_1 d_1$ erhält. Die Kontur des Prisma ergibt sich sonach in $abb_1 c_1 d_1 da$, und man erkennt leicht (weil die Basis $a_1 b_1 c_1 d_1$ hinter der Bildebene liegt) dass die Kanten aa_1, $a_1 d_1$ und $a_1 b_1$ gedeckt erscheinen.

Um den Schnitt des Prisma mit der gegebenen Ebene $E_v E_b$ zu bestimmen, ermitteln wir zunächst den Schnitt von $E_v E_b$ mit einer Seitenebene, etwa mit **abv**. Die Bildflächtrace h_b der letzteren fällt mit der Basiskante **ab** zusammen, während die

Fluchttrace h_v die hierzu Parallele durch **v** ist. Der Schnitt von $h_v h_b$ mit $E_v E_b$ ist die Gerade $\alpha\varphi$, daher das von den Kanten **av** und **bv** begrenzte Stück **AB** derselben bereits eine Seite des Schnittpolygons repräsentiert. Die anderen Seiten des letztgenannten Polygons kann man entweder auf dieselbe Weise wie eben gezeigt wurde konstruieren, oder aber, so wie im vorhergehenden Falle, durch ein besonderes Verfahren aus **AB** ableiten.

Man wird sich diesbezüglich beispielsweise durch die Kanten **av** und **cv** eine Ebene gelegt denken, deren Bildflächtrace man in **ac** erhält. Die genannte Trace schneidet die Bildflächtrace E_b der schneidenden Ebene in dem Punkte β, so dass die Verbindungsgerade β**A** den Schnitt der bezeichneten Hilfsebene **acv** mit der Ebene $E_v E_b$, und der Punkt **C**, in welchem β**A** die Kante **cv** trifft, den in der letzteren liegenden Eckpunkt des Schnittpolygons darstellt.

Da weiter die Kante **cd** gleichzeitig die Bildflächtrace der Seitenebene **cdv** repräsentiert, so muss die Schnittgerade dieser Seitenebene und der Ebene $E_v E_b$ durch den gemeinschaftlichen Punkt γ ihrer Tracen **cd** und E_b gehen; der Schnitt ist mithin durch die Gerade γ**C** dargestellt. Das zwischen den Kanten **cv** und **dv** liegende Stück **CD** dieser Geraden ist selbstverständlich wieder eine Seite des Schnittpolygons. Die Verbindungsgeraden der Punkte **A** und **D** resp. **B** und **C** liefern die noch fehlenden Seiten der Schnittfigur, und müssen in gleicher Weise mit den Basiskanten **ad** resp. **bc** Punkte der Bildflächtrace E_b gemein haben.

Aus dieser Eigenschaft entnehmen wir unmittelbar, dass die für eine Pyramide gefundene kollineare Beziehung auch beim Prisma auftritt, und zwar stellt diesfalls der Fluchtpunkt **v** der Prismenkanten das Kollineationscentrum, und die Bildflächtrace E_b die Kollineationsachse vor.

Würde die Basis des Prisma in einer von der Bildebene verschiedenen Ebene liegen, so müsste, wie einleuchtend, an die Stelle der Bildflächtrace E_b der schneidenden Ebene die Centralprojektion ihres Schnittes mit der betreffenden Basisebene treten. Daher lässt sich behaupten:

„Die Centralprojektion der Basis und des ebenen Schnittes eines Prisma sind stets kollinear in bezug auf den Fluchtpunkt der Prismenkanten als Kollineationscentrum, und die Centralprojektion der der Basisebene und der schneidenden Ebene gemeinsamen Geraden als Kollineationsachse.“

Wären die Prismenkanten speziell parallel zur Bildebene (oder würde, im Falle einer Pyramide, der Scheitel derselben in der Spurebene liegen), würden also die Bilder sämtlicher Seitenkanten untereinander parallel erscheinen, so tritt an die Stelle der obgenannten kollinearen Beziehung die affine.

Um weiter den Schnitt des Prisma mit der gegebenen Geraden **DV** [Fig. 196, Taf. XII] zu bestimmen, wird man so wie in allen ähnlichen Fällen durch die gegebene Gerade (Erzeugende einer Fläche) irgend eine Hilfsfläche, der Einfachheit wegen gewöhnlich eine Ebene legen, den Schnitt der letzteren mit dem gegebenen Gebilde bestimmen und untersuchen, wo die Schnittfigur von der gegebenen Geraden getroffen wird. Die besagten Schnittpunkte sind sodann gleichzeitig jene der gegebenen Fläche mit der gegebenen Geraden.

Unter den verschiedenen Hilfsebenen, welche durch die gegebene Gerade geführt werden können, wird man selbstverständlich immer wieder jene wählen, welche die einfachsten Schnittfiguren liefern. Im vorliegenden Falle wird man also durch die Gerade eine Hilfsebene $H_v H_b$ parallel zu den Prismenkanten zu führen haben. Besagte Ebene wird das Prisma offenbar in zwei ebenfalls zu den Prismenkanten parallelen Geraden schneiden, welche durch die Schnittpunkte p_1 und p_2 der Tracen der Hilfsebene **H** auf der Ebene der Leitlinie (Basisebene) mit der Basis **abcd** des Prisma (im vorliegenden Falle also insbesondere durch die Schnitte ihrer Bildflächtracen) gehen. Die so erhaltenen Geraden $p_1 v$ und $p_2 v$ werden die gegebene Gerade **DV** in den gesuchten Schnittpunkten P_1 und P_2 treffen.

Dieselbe Methode ist selbstverständlich auch im Falle einer Pyramide u. s. w. anwendbar, indem diesfalls die besagte Hilfsebene durch die gegebene Gerade und durch den Scheitel der Pyramide gelegt wird.

§ 249.

90. Aufgabe: **Es ist der gegenseitige Schnitt zweier Pyramiden, deren Basispolygone in zwei gegen die Bildebene geneigten Ebenen liegen, zu konstruieren.**

Der gegenseitige Schnitt zweier Polyeder oder deren *„Durchdringung“* ist stets ein Raumpolygon, d. i. ein Polygon, dessen Eckpunkte und Seiten nicht in einer und derselben Ebene

liegen. Die Eckpunkte eines solchen Durchdringungspolygons sind die Schnittpunkte der Kanten des einen Polyeders mit den Seitenflächen des zweiten Polyeders, und umgekehrt, während die Seiten des Durchdringungspolygons Schnittgeraden der Seitenflächen beider Polyeder, oder Teile derselben sind.

Soll daher eine derartige Durchdringung (gegenseitiger Schnitt) konstruiert werden, so wird man die Schnittpunkte sämtlicher Kanten des einen Polyeders mit den Seitenflächen des zweiten, und umgekehrt die Schnittpunkte sämtlicher Kanten des zweiten Polyeders mit den Seitenflächen des ersten zu ermitteln und dann in richtiger Reihenfolge zu verbinden haben.

Als allgemein gültig wäre folgendes zu bemerken. Der Schnittpunkt einer Kante des einen Polyeders mit einer Seitenfläche des zweiten kann nur dann ein Eckpunkt des Durchdringungspolygons sein, wenn er einerseits auf der Kante (zwischen deren Begrenzungspunkten) des einen, anderseits aber auch gleichzeitig auf der Seitenfläche des anderen Polyeders innerhalb ihres Begrenzungspolygons liegt. Von der Schnittgeraden zweier Seitenebenen kann nur jener Teil eine Seite des Durchdringungspolygons vorstellen, welcher zu gleicher Zeit innerhalb der beiden zum Schnitte gelangenden ebenen Begrenzungspolygone der sich durchdringenden Polyeder liegt.

Was weiter die richtige Verbindung der Eckpunkte des Durchdringungspolygons betrifft, so ist zu beachten, dass offenbar nur solche Eckpunkte miteinander verbunden werden können, welche sowohl einer und derselben Seitenfläche des einen Polyeders, als auch einer und derselben Seitenfläche des anderen Polyeders angehören. Liegen jedoch zwei Eckpunkte des Durchdringungspolygons in verschiedenen Seitenflächen der beiden zum gegenseitigen Schnitt gelangenden Polyeder oder auch nur in verschiedenen Seitenebenen des einen der beiden Polyeder, so ist deren Verbindungsgerade in keinem Falle eine Seite des Durchdringungspolygons. Unter Berücksichtigung dieser Anhaltspunkte wird bei entsprechender Aufmerksamkeit und einigem Vorstellungsvermögen die Konstruktion des Durchdringungspolygons aus seinen Eckpunkten selbst in den kompliziertesten Fällen keine Schwierigkeiten bieten können.

Diese allgemeinen Bemerkungen zu Grunde gelegt wollen wir uns der gestellten Aufgabe zuwenden.

Seien $L_v L_b$ und $L_v^1 L_b^1$ [Fig. 197, Taf. XII] die Basisebenen

der beiden Pyramiden, **S** und **S'** die Scheitel der letzeren, und **abcdef** resp. **a'b'c'd'** die beziehungsweise in $L_v L_b$ und $L'_v L'_b$ liegenden Basispolygone, so hat man bloss deren Eckpunkte mit **S** resp. **S'** geradlinig zu verbinden, um die Bilder der Pyramiden **S**(**abcdef**) und **S'** (**a'b'c'd'**) zu erhalten.

Um den gegenseitigen Schnitt dieser Pyramiden zu konstruieren, hat man, wie vorher allgemein erläutert wurde, die Schnittpunkte sämtlicher Kanten der einen mit den Seitenflächen der anderen Pyramide, soweit die besagten Schnittpunkte von Belang sind, d. i. insofern sie innerhalb der Begrenzungen beider Pyramiden liegen, zu ermitteln.

In § 248 wurde bereits gelegentlich der Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Prisma oder einer Pyramide und dergl. darauf hingewiesen, dass man diesfalls mit Vorteil von solchen Hilfsebenen Gebrauch machen könne, welche beziehungsweise parallel zu den Prismenkanten geführt werden oder den Scheitel der Pyramide enthalten.

Sollen im vorliegenden Falle, indem man beide Polyeder durch Hilfsebenen schneidet, die möglichst einfach zu konstruierenden Schnittfiguren (gerade Erzeugende der Flächen) erhalten werden, so müssen die bezeichneten Hilfsebenen selbstverständlich sowohl durch den Scheitel **S** als auch durch den Scheitel **S'** gehen, müssen also jene Gerade **SS'** enthalten, welche die beiden Pyramidenscheitel verbindet. Die Tracen der schneidenden Hilfsebenen auf den Basisebenen $L_v L_b$ und $L'_v L'_b$ werden demnach durch die Durchstosspunkte Δ und Δ_1 von **SS'** mit den letztbezeichneten Ebenen zu führen sein.

Bestimmt man daher nach den an früherer Stelle (Aufgabe 10 und 13) entwickelten Methoden die Schnittpunkte Δ und Δ_1 der Geraden **SS'** mit den beiden Basisebenen $L_v L_b$ und $L'_v L'_b$, so können die Eckpunkte des Durchdringungspolygons wie folgt konstruiert werden.

Verbindet man den Punkt Δ mit einem beliebigen Eckpunkte des Basispolygons **abc . . f**, beispielsweise mit **a**, so stellt diese Verbindungsgerade Δ**a** offenbar die Schnittgerade der Basisebene $L_v L_b$ mit der durch die Kante **aS** und die Gerade **SS'** gelegten Hilfsebene vor. Die Trace Δ**a** trifft weiter die Schnittgerade **dv** der beiden Basisebenen in einem Punkte ρ, welcher selbstverständlich der genannten Hilfsebene sowohl, als auch der Basisebene $L'_v L'_b$ angehört.

Ein zweiter Punkt, welcher den beiden letztgenannten Ebenen gemeinschaftlich ist, ist Δ_1, so dass ihre Schnittgerade (Trace der schneidenden Hilfsebene auf $L'_v L'_b$) durch $\rho\Delta_1$ dargestellt erscheint. Die letztere trifft die Basis **a'b'c'd'** in zwei Punkten α und β, welche mit **S'** verbunden die Schnittgeraden der vorgenannten Hilfsebene (**SS'**, **Sa**) mit der Pyramide **S'** vorstellen. Die beiden Punte **A** und **B** endlich, in welchen die letztbezeichneten Geraden $S'\alpha$ und $S'\beta$ von der Kante $S\alpha$ getroffen werden, sind die Schnittpunkte dieser Kante mit der Pyramide **S'**, und als solche zwei Eckpunkte des Durchdringungspolygons.

Führt man weiter die Gerade **Δb** bis zum Schnitte τ mit **dv**, verbindet man ferner τ mit Δ_1, und ebenso die Schnittpunkte ε und η von $\tau\Delta_1$ mit **S'**, so werden die letzterhaltenen Verbindungsgeraden $S'\varepsilon$ und $S'\eta$ von der Kante **bS** der Pyramide **S** in den Schnittpunkten **E** und **F** dieser Kante mit der Pyramide **S'** getroffen, so dass **E** und **F** wieder zwei Punkte des Durchdringungspolygons liefern. In gleicher Weise kann man die Schnittpunkte aller anderen Kanten der Pyramide **S** mit der Pyramide **S'**, aber auch umgekehrt die Schnittpunkte aller Kanten der Pyramide **S'** mit der Pyramide **S** konstruieren; denn zieht man beispielsweise die Gerade $\Delta_1 b'$, so stellt dieselbe den Schnitt der Basisebene $L'_v L'_b$ mit der durch **S'b'** und **SS'** gelegten Hilfsebene vor, trifft demgemäss die den beiden Basisebenen gemeinschaftliche Gerade **dv** in einem dieser Hilfsebene und der Basisebene $L_v L_b$ gemeinschaftlichen Punkte σ, so dass sich die Schnittgerade der beiden letztbezeichneten Ebenen in $\sigma\Delta$ ergibt.

Die genannte Trace $\sigma\Delta$ schneidet die Basis **abc . . f** in den Punkten γ und δ, welche mit **S** verbunden die Schnittgeraden der Pyramide **S** mit der Hilfsebene (**S'b'**, **SS'**) ergeben, und von der Kante **S'b'** in deren Schnittpunkten **C** und **D** mit der Pyramide **S**, also in zwei Eckpunkten des Durchdringungspolygons getroffen werden.

Sind auf diese Weise sämtliche Eckpunkte des Durchdringungspolygons ermittelt worden, so hat man dieselben auf Grund der früher angegebenen Regeln in richtiger Weise zu verbinden.

So können beispielsweise die Punkte **A** und **E** unmittelbar verbunden werden, da sie sowohl der Seitenebene **aSb**, als auch der Seitenebene **a'S'b'** angehören; ein Gleiches gilt bezüglich der Punkte **E** und **C**, da sie in den beiden Seitenebenen **bSc** und **a'S'b'** liegen; ebenso werden die Punkte **A** und **D** als Punkte der beiden

Seitenebenen **aSf** und **a'S'b'** und die beiden Punkte **B** und **F** als Punkte der Seitenflächen **aSb** und **a'S'd'** u. s. w. direkt zu verbinden sein.

Der gegenseitige Schnitt zweier Polyeder kann, (wie im vorliegenden Falle jener der beiden Pyramiden) ein einziges Polygon bilden, oder es kann auch vorkommen, dass der Schnitt aus zwei getrennten Durchdringungspolygonen besteht.

Als Grenzfall dieser beiden allgemeineren Fälle ist jener anzusehen, in welchem zwei Durchdringungspolygone, welche den gegenseitigen Schnitt zweier Polyeder repräsentieren, einen Eckpunkt gemein haben. Dieser Fall tritt überall dort ein, wo sich zwei Kanten der beiden Polyeder in einem Punkte schneiden. Man nennt zwei solche Kanten *„gebundene Kanten“* der beiden Polyeder und den Schnittpunkt derselben einen *„Knotenpunkt“* des Durchdringungspolygons.

Da durch einen solchen Knotenpunkt zwei Seitenflächen des einen und zwei Seitenflächen des anderen Polyeders gehen, so treffen in demselben vier Seiten des Durchdringungspolygons zusammen. Nachdem ferner zwei Polyeder ein, zwei oder auch mehrere Paare gebundener Kanten besitzen können, so kann auch ein Durchdringungspolygon ein, zwei oder mehrere Knotenpunkte aufweisen.

§ 250.

91. Aufgabe: **Es ist eine Pyramide in einer beliebigen Lage gegen die Projektionsebene, ferner ein Prisma, dessen Basis in einer zur Projektionsebene senkrechten Ebene liegt und dessen Kanten zur Projektionsebene parallel sind, so darzustellen, dass beide Körper ein Paar gebundener Kanten besitzen; es ist unter diesen Voraussetzungen der gegenseitige Schnitt derselben zu konstruieren.**

Stelle $L'_v L'_b$ [Fig. 198, Taf. XII] die zur Bildebene senkrechte Basisebene des Prisma, und **a'b'c'd'e'** das Bild der Basis vor. Wir können, die Bildebene als vertikal vorausgesetzt, die Basisebene $L'_b L'_v$ als horizontal betrachten. Die Prismenkanten seien allenfalls vertikal, so dass das dargestellte Prisma ein sogenanntes „gerades Prisma“ ist. Da die Wahl der Basisebene $L_v L_b$ der Pyramide freigestellt ist, so möge dieselbe vertikal angenommen werden; es werden demnach ihre Tracen L_v und L_b zu den

Prismenkanten parallel sein. Ferner sei **S** der auf dem Träger $\delta\varphi$ gegebene Pyramidenscheitel.

Nachdem gefordert wird, dass die Pyramide und das Prisma ein Paar gebundener Kanten besitzen sollen, so kann ein Punkt der Pyramidenbasis auf nachstehende Art bestimmt werden. Mittels der vertikalen Hilfsebene $h_v h_b$ führen wir durch den Pyramidenscheitel **S** eine vertikale, also eine zu den Prismenkanten parallele Gerade g, und bestimmen ihren Schnittpunkt Δ mit der Basisebene $L'_v L'_b$ des Prisma. Wird Δ mit dem Basiseckpunkte **a'** des Prisma verbunden, so erhält man die Schnittgerade $\Delta a'$ der Ebene $L'_v L'_b$ mit der durch die Prismenkante $a'a'_1$ und durch den Pyramidenscheitel **S** gelegten Hilfsebene. Die Gerade Δa_1 schneidet die Schnittgerade **dv** der beiden Basisebenen in dem Punkte α; die durch α vertikal gezogene Gerade αa repräsentiert dann offenbar den Schnitt der vorgenannten Hilfsebene mit der Basisebene $L_v L_b$.

Soll nun die Prismenkante $a'a'_1$ mit einer Pyramidenkante **Sa** gebunden sein, so muss letztere in der erwähnten Hilfsebene, ihr Basiseckpunkt **a** mithin in irgend einem Punkte der Geraden αa liegen. Der Schnitt der beiden sich bindenden Kanten **Sa** und $a'a'_1$ erfolgt in **A**. Die übrigen Eckpunkte **b**, **c** und **d** der Pyramidenbasis können nun, wenn für die Lage derselben keine weiteren Bedingungen vorliegen, beliebig in der Ebene $L_v L_b$ angenommen werden.

Das verlangte Durchdringungspolygon wird, den vorausgeschickten Erörterungen gemäss, in **A** einen Knotenpunkt besitzen und werden demnach durch **A** vier Seiten des Durchdringungspolygons gehen.

Um die übrigen Punkte des letzteren zu konstruieren, werden wir von dem oberwähnten Punkte Δ Gebrauch machen. Wird nämlich Δ mit irgend einem Basiseckpunkte des Prisma, etwa mit **b'** verbunden, so stellt die Verbindungsgerade $b'\Delta$ den Schnitt von $L'_v L'_b$ mit der durch die Kante $b'b'_1$ und den Pyramidenscheitel **S** gelegten Hilfsebene vor. Zieht man ferner durch den Schnittpunkt ρ von $\Delta b'$ mit **dv**, als der den beiden Basisebenen gemeinsamen Geraden, eine vertikale Gerade $\rho\rho_1$, so stellt diese den Schnitt der genannten Hilfsebene (**S**, $b'b'_1$) mit der Basisebene $L_v L_b$ dar. Besagte Trace $\rho\rho_1$ trifft die Pyramidenbasis **abcd** in zwei Punkten β und γ, welche mit **S** verbunden, die Schnittgeraden der Pyramide mit der Hilfsebene (**S**, $b'b'_1$) in $S\beta$ und $S\gamma$

ergeben. Diese Geraden $S\beta$ und $S\gamma$ treffen weiter die Prismenkante $b'b'_1$ in deren Schnittpunkten **B** und **C** mit der Pyramide, d. i. in zwei Eckpunkten des Durchdringungspolygons.

In gleicher Weise kann die Konstruktion der Durchstosspunkte aller übrigen Prismenkanten mit der Pyramide vorgenommen und dasselbe Verfahren auch verwendet werden, um die Schnittpunkte der Pyramidenkanten mit dem Prisma zu ermitteln.

Denken wir uns beispielsweise durch die Pyramidenkante **Sd** eine zu den Prismenkanten parallele Hilfsebene gelegt, so wird sie die Basisebene $L_v L_b$ in der durch **d** gehenden vertikalen Geraden $d\sigma$ und die Basisebene $L'_v L'_b$ in der Geraden $\sigma\Delta$ schneiden. Ferner wird die bezeichnete Hilfsebene das Prisma in zwei zu dessen Kanten parallelen Geraden δD und εE schneiden, welche durch die Schnittpunkte δ und ε der Prismenbasis mit der Trace $\Delta\sigma$ gehen. Diese Schnittgeraden treffen endlich die oberwähnte Pyramidenkante **Sd** in den beiden gesuchten Durchstosspunkten **D** und **E** der besagten Kante **Sd** mit den bezüglichen Seitenebenen $b'b'_1 c'c'_1$ und $e'e'_1 d'd'_1$ des Prisma. Sind derart alle Eckpunkte des Durchdringungspolygons gefunden, so hat man sie schliesslich entsprechend zu verbinden.

§ 251.

92. Aufgabe: **Es ist die Durchdringung zweier Prismen zu konstruieren, deren Basispolygone in der Bildebene liegen.**

Die beiden Basispolygone der Prismen seien **abc** und **a'b'c'd'** [Fig. 199, Taf. XIII]; die bezüglichen Fluchtpunkte ihrer Kanten seien durch **v** und **v'** gegeben. Behufs Konstruktion der Eckpunkte des Durchdringungspolygons wird man wieder schneidende Hilfsebenen verwenden, welche der Einfachheit wegen zu den Kanten beider Prismen parallel sind oder durch die Kanten des einen Prisma gehen und zu den Kanten des zweiten Prisma parallel laufen, deren Fluchttrace h_v also durch die Verbindungsgerade **vv'** dargestellt erscheint.

Führt man nun beispielsweise durch **b'** eine Parallele zu h_v, so stellt die letztere bereits die Bildflächtrace h_b jener Hilfsebene dar, welche durch die Kante **v'b'** parallel zu den Kanten des Prisma **v abc** gelegt ist; der Schnitt des letztbezeichneten Prisma mit der Hilfsebene $h_v h_b$ besteht aus den beiden zu den Prismenkanten parallelen Geraden $v\alpha$ und $v\beta$, welche durch die der Basis **abc**

und der Trace h_b gemeinschaftlichen Punkte α und β gehen. Die Geraden αv und βv treffen die Kante $b'v'$ in deren Schnittpunkten **A** und **B** mit dem Prisma **v abc**, repräsentieren somit zwei Eckpunkte des Durchdringungspolygons.

Legt man umgekehrt durch irgend eine Kante des Prisma **v abc**, etwa durch **cv**, eine Hilfsebene h' parallel zu den Kanten des Prisma **v' a'b'c'd'**, so ist deren Bildflächtrace h'_b die durch **c** parallel zu h_v gezogene Gerade. Die durch die Schnittpunkte γ und δ von h'_b mit der Basis **a'b'c'd'** zu den Prismenkanten parallel geführten Geraden $\gamma v'$ und $\delta v'$ sind die Schnitte der genannten Hilfsebene $h'_v h'_b$ mit dem Prisma **v' a'b'c'd'**, während deren Treffpunkte **C** und **D** mit der Kante **cv** wieder zwei Eckpunkte des Durchdringungspolygons bestimmen.

Auf gleiche Weise hat man alle übrigen Eckpunkte des Durchdringungspolygons als die Schnittpunkte der Kanten des einen Prisma mit den Seitenflächen des anderen und umgekehrt zu ermitteln, und diese Punkte unter Beachtung der an früherer Stelle gebotenen Anhaltspunkte richtig zu verbinden. Hierbei ist selbstverständlich auch der sichtbare Teil der Schnittfigur von dem unsichtbaren (gedeckten) Teile derselben durch voll gezogene oder beziehungsweise strichulierte Linien zu unterscheiden. Als diesbezügliches Merkmal hat man bloss zu beachten, ob der betreffende Eckpunkt des Durchdringungspolygons einer sichtbaren oder gedeckten Seitenebene resp. Kante der zum Schnitte gelangenden Flächen angehört. Ist ein Punkt der Seite des Schnittpolygons nicht sichtbar, so gilt das Gleiche von der ganzen Seite derselben.

§ 252.

93. Aufgabe: **Es ist ein Würfel darzustellen, von welchem eine Seite in der Ebene $e_v e_b$ [Fig. 200, Taf. XIII] liegt und die in dieser Ebene gegebene begrenzte Gerade ab zur Kante haben soll; ferner ist der Schnitt dieses Würfels mit der Ebene $E_v E_b$ zu bestimmen.**

Die in der Ebene $e_v e_b$ liegende Würfelseite wird jenes Quadrat sein, welches über **ab** als Kante beschrieben werden kann.

Denkt man sich das Projektionscentrum um e_v nach C_0 umgelegt und den umgelegten Fluchtstrahl $C_0 v$ der Geraden **ab** gezogen, so hat man bloss durch C_0 eine Senkrechte $C_0 v_1$ und weiter

eine Gerade C_0v_2 unter 45° gegen C_0v zu ziehen, um in den Schnittpunkten v_1 und v_2 derselben mit e_v die bezüglichen Fluchtpunkte der zu ab senkrechten Quadratseiten resp. einer Diagonale des Quadrates zu erhalten. Das Bild des Quadrates wird einfach dadurch vervollständigt, dass man die zu ab senkrechten Quadratseiten av_1 und bv_1 zieht, in av_1 mittels der Diagonale bv_2 den Eckpunkt c ermittelt und die vierte Quadratseite vc zeichnet, welche auf bv_1 den Eckpunkt d bestimmt.

Konstruiert man ferner den Fluchtpunkt v_s der Normalen zur Ebene $e_v e_b$, so erhält man in av_s, bv_s, cv_s und dv_s die Centralprojektionen der zur Seitenebene $e_v e_b$ resp. $abcd$ senkrechten Würfelkanten, und es erübrigt somit nur noch die zweiten Eckpunkte auf denselben zu bestimmen.

Vervollständigen wir zu diesem Zwecke zunächst das Quadrat $v_s ab$. Die Fluchttrace seiner Ebene ist die Gerade $h_v = vv_s$. Das um h_v umgelegte Projektionscentrum C'_0 ergibt sich, wie leicht einzusehen, im Schnitte jener beiden Kreise, die beziehungsweise aus v und v_s mit den Strecken vC_0 und v_sC' als Radien beschrieben werden. Hierbei ist selbstverständlich der Winkel $vC'_0v_s = 90°$. Halbiert man diesen Winkel vC'_0v_s, so erhält man in h_v den Fluchtpunkt v'_2 der einen Diagonale des gesuchten Quadrates. Das Bild derselben ist demnach bv'_2. Das letztere bestimmt auf av_s den Eckpunkt a', so dass man in va' die fehlende Quadratseite $a'b'$ dargestellt erhält. Die in den Kanten cv_s und dv_s liegenden zweiten Eckpunkte c' und d' ergeben sich im Schnitte mit den Würfelkanten v_1a' und v'_1b'; die letzte Würfelkante $c'd'$ muss sodann notwendig durch v gehen.

Die gegebene Ebene $E_v E_b$ schneidet die Seitenebene $e_v e_b$ resp. $abcd$ des Würfels in der Geraden $\delta\varphi$, und der von dem Quadrate $abcd$ begrenzte Teil AB dieser Schnittgeraden ist bereits eine Seite des Polygons, in welchem der Würfel von der Ebene $E_v E_b$ geschnitten wird.

Der in der Kante ab liegende Punkt A ist gleichzeitig ein der Ebene $E_v E_b$ und der Seitenebene $aba'b'$ gemeinschaftlicher Punkt. Der Schnitt dieser beiden letztgenannten Ebenen hat zum Fluchtpunkte den Schnittpunkt φ' ihrer Fluchttracen E_v und h_v, ist mithin in $\varphi'A$ dargestellt. Der durch das Quadrat $aba'b'$ begrenzte Teil AC von $\varphi'A$ ist folglich eine zweite Seite des Schnittpolygons.

Nachdem ferner der Punkt C auch der Seitenfläche $a'b'c'd'$

angehört, diese aber mit der Seitenfläche $abcd = e_v e_b$ parallel ist, so ist der Schnitt von $a'b'c'd'$ mit $E_v E_b$ durch $C\varphi$ dargestellt. Der innerhalb des Quadrates $a'b'c'd'$ liegende Teil CD von $C\varphi$ bildet also die dritte Seite des Schnittpolygons, während die vierte Seite des letzteren dann notwendig durch die Verbindungsgerade BD als Schnitt der Seitenebene $aca'c'$ mit $E_v E_b$ bestimmt erscheint.

§ 253.

94. Aufgabe: **Es ist das centralprojektivische Bild eines regelmässigen Tetraeders darzustellen, von welchem eine Seite in der gegen die Bildebene geneigten Ebene $e_v b_b$ [Fig. 201, Taf. XIII] liegt; ferner sind die Schnittpunkte des Tetraeders mit einer gegebenen Geraden DV zu konstruieren.**

Da das reguläre Tetraeder von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist, so werden wir ein beliebiges gleichseitiges Dreieck $a_0 b_0 c_0$ als die Umlegung der in $e_v e_b$ liegenden Tetraederseite um e_b betrachten und deren Centralprojektion abc auf bekannte Weise durch „Zurückführen“ ermitteln.

Denken wir uns ferner in der Umlegung an $a_0 b_0 c_0$ ein zweites gleichseitiges Dreieck $a_0 c_0 d_0$ angereiht und dieses um $a_0 c_0$ so lange gedreht, bis d_0 senkrecht über den Mittelpunkt o_0 des Dreieckes $a_0 b_0 c_0$ zu liegen kommt, so wird die Entfernung des Punktes d_0 von o_0 (in wahrer Grösse durch $o_0 d_0'$ dargestellt) die wahre Grösse des Abstandes des vierten Tetraedereckpunktes d von der Seitenebene $e_v e_b$ resp. abc darstellen. Bestimmt man daher die Centralprojektion o des Mittelpunktes o_0 (durch Zurückführen) und führt man die Senkrechte ov_s zu $e_v e_b$, so hat man auf dieser (etwa mittels des Teilpunktes T von ov_s) in einer durch ov_s gelegten Hilfsebene $h_v h_b$ von o aus die Strecke od, deren wahre Grösse $o_0 d_0' = o'd'$ ist, aufzutragen, um in d das Bild des genannten Eckpunktes, und in ad, bd, cd die noch fehlenden Kanten des Tetraeders zu erhalten.

Um endlich die Schnittpunkte der gegebenen Geraden DV mit dem Tetraeder zu bestimmen, betrachten wir das letztere als eine Pyramide mit der Basis abc und dem Scheitel d.

Wir haben demgemäss (§ 248) zunächst durch DV und den Scheitel d eine Hilfsebene zu legen, was im vorliegenden Falle am einfachsten folgendermassen geschehen kann.

Der Scheitel **d** liegt bekanntlich in der zum Zwecke seiner Konstruktion bereits früher gezeichneten Hilfebene $h_v h_b$. Bestimmen wir den Schnittpunkt Δ dieser Ebene mit der Geraden **DV**, und verbinden wir **d** mit Δ, wodurch die Gerade $\varphi'\delta'$ in der Ebene $h_v h_b$ erhalten wird, so ist die durch $\varphi'\delta'$ und **VD** gehende Ebene $H_v H_b$ die gesuchte, obbezeichnete Hilfsebene. Dieselbe schneidet die Basisebene $e_v e_b$ in der Geraden $\delta''\varphi''$, welche **abc** in den beiden Punkten μ und ν trifft. Es sind sonach μ**d** und ν**d** die Schnitte des Tetraeders mit der genannten Hilfsebene $H_v H_b$. Besagte Schnittgeraden treffen die gegebene Gerade **DV** in **M** und **N**, welche die verlangten Schnittpunkte der letzteren mit dem Tetraeder darstellen.

§ 254.

95. Aufgabe: **Ein Oktaeder ist in allgemeiner Lage gegen die Bildebene centralprojektivisch darzustellen.**

Da die sechs Eckpunkte eines Oktaeders erhalten werden, wenn man auf drei in einem Punkte sich schneidenden und paarweise aufeinander senkrecht stehenden Geraden — den Achsen des Oktaeders — von dem bezeichneten Schnittpunkte aus zu beiden Seiten eine und dieselbe Strecke aufträgt, so können wir zum Zwecke der Darstellung folgends verfahren.

Wir wählen die Centralprojektionen $d_1 v_1$, $d_2 v_2$, $d_3 v_3$ dreier in einem Punkte **O** [Fig. 202, Taf. XIII] sich schneidenden Geraden, bestimmen also die Hauptpunkte d_1, v_1; d_2, v_2, ... so, dass $h_v = v_1 v_2$ parallel zu $h_b = d_1 d_2$ und $h_v' = v_1 v_3$ parallel zu $h_b' = d_1 d_3$ ist.

Sollen die hierdurch dargestellten Geraden überdies aufeinander senkrecht stehen, so muss (wie in § 252 gezeigt wurde) der Höhenschnittpunkt **A** des Fluchtdreieckes $v_1 v_2 v_3$ den Hauptpunkt **A** vorstellen.

Zieht man durch **A** eine Senkrechte zu $v_1 v_2$ (eine Höhe des Dreieckes $v_1 v_2 v_3$) und durchschneidet sie in C_0 mit dem über $v_1 v_2$ beschriebenen Halbkreise **K**, so repräsentiert C_0 offenbar das um $h_v = v_1 v_2$ umgelegte Projektionscentrum. Mit Zuhilfenahme desselben sind unmittelbar die Teilpunkte T_1 und T_2 der Geraden $d_1 v_1$ und $d_2 v_2$ in der Fluchttrace h_v abzuleiten.

Projiziert man **O** von T_1 aus auf die Bildebene in die Trace h_b nach o_1, trägt zu beiden Seiten von o_1 die beliebig gewählte

Strecke $\lambda = o_1 a_1 = o_1 b_1$ ab, und projiziert die Endpunkte a_1 und b_1 wieder mittels T_1 nach **A** und **B** auf $d_1 v_1$, so erhält man bereits zwei Eckpunkte des Oktaeders.

Projiziert man ferner **O** von T_2 aus auf h_b nach o_2 und macht wieder $o_2 c_2 = o_2 d_2 = \lambda$, so ergeben die Schnitte der Strahlen $T_2 c_2$ und $T_2 d_2$ mit der Oktaederachse d. i. auf $d_2 v_2$ ein weiteres Paar **C** und **D** von Eckpunkten des Oktaeders.

Man hat somit nur noch die auf der dritten Achse $d_3 v_3$ liegenden Eckpunkte zu konstruieren. Führt man zu diesem Zwecke durch den Hauptpunkt **A** die Senkrechte $v_2 \sigma_2$ zu $h'_v = v_1 v_3$, so wird das um h'_v umgelegte Centrum C'_0 in derselben liegen müssen. Da weiter $C'_0 v_1 = C_0 v_1$ sein muss, erhält man C'_0 im Schnitte der besagten Senkrechten mit dem aus v_1 durch C_0 geführten Kreise. Mit Hilfe von C'_0 kann nun leicht der Teilpunkt T_3 der Geraden $d_3 v_3$ auf h'_v gefunden und mittels desselben, so wie vorher, die Strecke λ auf $d_3 v_3$ centralprojektivisch von **O** nach **E** und **F** aufgetragen werden, wodurch wir sofort in **E** und **F** die gesuchten Eckpunkte erhalten.

Schliesslich ergeben sich die Kanten des Oktaeders als die Geraden **AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CE, CF, DE, DF**, womit den gestellten Anforderungen Rechnung getragen ist.

§ 255.

96. Aufgabe: **Es ist das Bild eines Dodekaeders unter der Voraussetzung zu konstruieren und centralprojektivisch darzustellen, dass die eine Seitenfläche desselben in einer zur Bildebene senkrechten Ebene liege.**

Die zur Bildebene senkrechte (horizontale) Ebene, welche das eine Begrenzungsfünfeck enthalten soll, sei $e_v e_b$ [Fig. 203, Taf. XIII]. Das letztere werde zunächst (um e_b umgelegt) derart in $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ verzeichnet, dass die eine Fünfeckseite $A_0 B_0$ senkrecht zu e_b, die eine Höhe $O_0 D_0$ desselben folglich parallel zu e_b ist. Die Centralprojektion **ABCDE** dieses Fünfeckes, welches wir der Kürze halber das Basisfünfeck des Dodekaeders nennen wollen, kann durch Zurückführung leicht ermittelt werden.

Denken wir uns ferner in der Umlegung an die Kanten $A_0 B_0$ und $A_0 E_0$ zwei weitere regelmässige Fünfecke $B_0 A_0 (\alpha)(\beta) \ldots$ und $E_0 A_0 (\alpha')(\mu) \ldots$ angereiht, und dieselben um $A_0 B_0$ resp. um $A_0 E_0$ so weit aus der Bildebene herausgedreht, bis die Punkte (α) und

(α') im Raume zusammenfallen, so wird der Abstand der vereinigten Punkte (α) und (α') von der Bildebene gleichzeitig auch die Entfernung der den Eckpunkten **A**, **B**, . . **E** nächstgelegenen Dodekaedereckpunkte von der Basisebene $\mathbf{e_v}\,\mathbf{e_b}$ repräsentieren.

Bei der vorbezeichneten Drehung werden sich infolge der vorhandenen Symmetrieverhältnisse die beiden Punkte (α) und (α') in einem Punkte vereinigen, der seine orthogonale Bildflächprojektion α_0 im Schnitte der Fünfeckshöhe $\mathbf{A_0O_0}$ mit der durch (α) senkrecht zu $\mathbf{A_0B_0}$ gezogenen Trace (α)ζ der Drehungsebene von (α) hat, und von diesem Punkte α_0 eine Entfernung $\alpha_0\,\alpha''$ besitzt, welche sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $\alpha_0\zeta\alpha''$ (wobei $\zeta\alpha'' = \zeta(\alpha)$) sofort ergibt. Hierbei stellt offenbar der Winkel $\varphi = \measuredangle\,\alpha''\zeta\alpha_0$ gleichzeitig den Drehungswinkel des Punktes (α) vor.

Da dem Fünfeckspunkte (β) derselbe Drehungswinkel φ entspricht, so ist seine orthogonale Bildflächprojektion β_0 nach vollendeter Drehung, sowie sein Abstand $\beta_0\beta''$ von der Bildebene mittels des rechtwinkligen Dreieckes $\nu\beta_0\beta''$ (wobei $\nu\beta'' = \nu(\beta)$; $\measuredangle\,\beta''\nu\beta_0 = \measuredangle\,\varphi$) leicht zu bestimmen.

Wenn man in gleicher Weise, wie hier α_0 und β_0 gefunden wurden, für die an die übrigen Kanten des umgelegten Basisfünfeckes $\mathbf{A_0\,B_0\,C_0\,D_0\,E_0}$ angereihten Fünfecke die gedrehten Punkte γ_0, δ_0, ε_0 . . . μ_0 bestimmt, so wird sich herausstellen, dass sie mit α_0 und β_0 ein regelmässiges Zehneck bilden, welches mit $\mathbf{A_0B_0C_0D_0E_0}$ konzentrisch ist.

Nachdem das Dodekaeder von zwölf regelmässigen Fünfecken begrenzt wird, von welchen je zwei einander gegenüber liegende in parallelen Ebenen, jedoch in um 180° verwendeter Stellung gegeneinander sich befinden, so werden wir weiter zum Behufe der Darstellung dieses Polyeders das vorbezeichnete Basisfünfeck um seinen Mittelpunkt $\mathbf{0_0}$ um 180° drehen, dasselbe also in die Lage $\pi_0\rho_0\sigma_0\tau_0\omega_0$ bringen.

Durch entsprechende Zurückführung all der vorgenannten Punkte erhält man deren Centralprojektionen in $\alpha \ldots \varkappa$, $\pi \ldots \omega$.

Die zwanzig Ecken des Dodekaeders liegen bekanntlich in vier parallelen Ebenen, deren Entfernungen bereits festgestellt wurden; je fünf in einer Ebene befindliche Ecken bestimmen ein regelmässiges Fünfeck, von welchen die in den beiden äussersten Ebenen liegenden einander gleich sind und die Dodekaederkante zur Seite haben, während die in den beiden mittleren Höhenebenen

gelegenen, gleichfalls kongruenten Fünfecke mit einer Sehne des ersteren Fünfeckes als Seite zu verzeichnen sein werden und, sowie die beiden vorgenannten, eine um 180° gegeneinander verwendete Lage haben. Die Mittelpunkte der diesen Fünfecken umschriebenen Kreise liegen sämtlich in einer Geraden. Hiernach ist bei der vorzunehmenden centralprojektivischen Darstellung noch folgendes zu beachten:

a) Die Punkte α, γ, ε, δ und λ repräsentieren die orthogonalen Projektionen der den Basiseckpunkten zunächst gelegenen Dodekaedereckpunkte auf die Ebene $\mathbf{e_v e_b}$. Die besagten Eckpunkte selbst liegen in jener Ebene $\mathbf{e_v e_b'}$, welche zu $\mathbf{e_v e_b}$ parallel ist, und von derselben den Abstand $\Delta x = \alpha_0\alpha''$ besitzt.

b) Die Punkte β, δ, η, $\varkappa$, μ sind in gleicher Weise die Orthogonalprojektionen von fünf Dodekaedereckpunkten auf die Ebene $\mathbf{e_v e_b}$. Diese Eckpunkte liegen in einer Ebene $\mathbf{e_v e_b^2}$, welche zur Basisebene $\mathbf{e_v e_b}$ parallel ist, und von derselben den Abstand $\Delta y = \beta_0\beta''$ hat.

c) Die Punkte π, ρ, σ, τ, ω stellen gleichfalls die orthogonalen Projektionen von fünf Dodekaedereckpunkten auf die Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ dar, liegen jedoch in der zu $\mathbf{e_v e_b}$ parallelen Ebene $\mathbf{e_v e_b^3}$, welche von $\mathbf{e_v e_b}$ den Abstand $\Delta z = \alpha_0\alpha'' + \beta_0\beta''$ besitzt.

Mit Zugrundelegung der hiermit getroffenen Vorbereitungen wird es nun keinerlei Schwierigkeit bieten, die Centralprojektionen aller dieser Eckpunkte zu bestimmen.

So wird beispielsweise die durch δ senkrecht zur Ebene $\mathbf{e_v e_b}$ gezogene Gerade $\delta\mathbf{d}$ (die gleichzeitig, infolge der besonderen Annahme von $\mathbf{e_v e_b}$, zur Bildebene parallel ist) die Ebene $\mathbf{e_v e_b^2}$ in dem Eckpunkte **d** des Dodekaeders schneiden. Um besagten Punkt zu erhalten, legen wir durch eine den Punkt δ enthaltende Gerade, etwa durch $\delta\mathbf{0} = \mathbf{d_1 v_1}$, die zu $\mathbf{e_v e_b}$ senkrechte Ebene $\mathbf{h_v h_b}$; letztere schneidet die Ebene $\mathbf{e_v e_b^2}$ in der Geraden $\mathbf{v_1 d_1^2}$, und diese ergibt im Schnitte mit $\delta\mathbf{d}$ den Punkt **d**. Auf gleiche Weise können alle anderen Eckpunkte ermittelt werden.

Als Kontrole für die richtig durchgeführte Konstruktion kann man den Umstand benützen, dass fünf Dodekaederkanten, welche durch die Ecken eines Begrenzungsfünfeckes gehen, aber nicht Kanten des letzteren sind, sich stets in einem Punkte schneiden müssen; dass sich also beispielsweise die fünf Kanten **Aa**, **Bc**, **Ce**, **Dh**, **El** in einem Punkte **S**, die fünf Kanten **bp**, **dr**, **fs**, **kt** und **mw** dagegen in einem Punkte **S'** treffen.

§ 256.

97. Aufgabe: **Es ist das centralprojektivische Bild eines Ikosaeders, dessen eine Achse zur Bildebene parallel ist, zu verzeichnen.**

Behufs Erläuterung des diesfalls anzuwendenden Konstruktionsverfahrens wollen wir uns das gestellte Problem als bereits gelöst denken, und uns direkt auf das in Fig. 204, Taf. XIII, dargestellte Ikosaeder beziehen.

Ist **OZ** eine der Achsen des Ikosaeders und sind **S** und **S'** die in derselben liegenden einander gegenüberstehenden Eckpunkte desselben, so ist ohne weiteres ersichtlich, dass die fünf in einem dieser Eckpunkte zusammentreffenden gleichseitigen Dreiecke eine regelmässige Pyramide bilden. Ferner liegen die Basis **ABCDE** der Pyramide mit dem Scheitel **S**, und die Basis **abcde** der Pyramide mit dem Scheitel **S'** in zwei zu einander parallelen, zur Achse **OZ** senkrechten, und gegen den Ikosaedermittelpunkt **M** symmetrischen Ebenen; dieselben stellen zwei kongruente um den Winkel von 180° gegeneinander verwendete (gedrehte) regelmässige Fünfecke vor, deren Mittelpunkte **O** und **o** sich auf der Achse **OZ** befinden. Bedenkt man ferner, dass das Ikosaeder von zwanzig gleichseitigen Dreiecken gebildet wird, von welchen je fünf in einer Ecke zusammenstossen, so ist klar, dass durch die Darstellung der beiden vorerwähnten Pyramiden die sämtlichen zwölf Ecken dieses Polyeders fixiert erscheinen und dass die zwischen dem höchsten und tiefsten Eckpunkte liegenden zehn Ecken diesfalls in zwei Horizontalebenen liegen, deren Entfernungen voneinander und von den äussersten Ecken **S** und **S'** leicht bestimmbar sind.

Auf Grund dieser Eigenschaften wird es weiter keinen Schwierigkeiten unterworfen sein, das Bild des Ikosaeders zu verzeichnen. Da die Achse **SS'** zur Bildebene parallel sein soll, nehmen wir als Ebene des Basisfünfeckes der einen Teilpyramide eine beliebige zur Bildebene senkrechte Ebene $e_v e_b$ an, konstruieren in derselben ein regelmässiges Fünfeck $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ von gegebener Kantenlänge, betrachten dieses als Umlegung des Basisfünfecks und bestimmen durch Zurückführung die Centralprojektion **ABCDE**.

Reihen wir ferner, allenfalls an $A_0 B_0$, das gleichseitige Dreieck $A_0 B_0 \Sigma_0$ an und drehen dasselbe um $A_0 B_0$ so lange aus der Bildebene heraus, bis Σ_0 senkrecht über den Mittelpunkt O_0 des

Fünfeckes zu stehen kommt, so wird die Entfernung dieses Punktes von $\mathbf{O}_0$ (deren wahre Grösse $\mathbf{O}_0\Sigma$ mittels des rechtwinkligen Dreieckes $\mathbf{O}_0\Sigma\mathbf{n}_0$, in welchem $\mathbf{n}_0\Sigma = \mathbf{n}_0\Sigma_0$ ist, erhalten wird) die Höhe der Teilpyramide vorstellen.

Führt man weiter durch den Halbierungspunkt ρ von $\mathbf{D}_0\Sigma$ eine Senkrechte zu $\mathbf{D}_0\Sigma$, welche die Gerade $\mathbf{O}_0\Sigma$ in einem Punkte μ trifft, so ist leicht einzusehen, dass die Strecke $\mathbf{O}_0\mu$ die Entfernung des Ikosaedermittelpunktes **M** von dem Mittelpunkte **O** des Basisfünfeckes **ABCDE** vorstellt.

Zieht man daher durch **O** (aus $\mathbf{O}_0$ durch Zurückführung abgeleitet) die Achse **OZ** des Ikosaeders senkrecht zur Ebene $\mathbf{e}_v\mathbf{e}_b$, also speziell auch senkrecht zur Trace $\mathbf{e}_b$, so wird man auf derselben von **O** aus die beiden Strecken $\mathbf{O}_0\Sigma$ und $\mathbf{O}_0\mu$ centralprojektivisch beziehungsweise noch **OS** und **OM** aufzutragen haben (was mittels des Hauptpunktes **A** als Teilpunkt und der Trace $\mathbf{h}_b$ der durch die Achse **OZ** senkrecht zur Bildebene gelegten Hilfsebene $\mathbf{h}_v\mathbf{h}_b$ leicht bewerkstelligt werden kann) um den unteren Scheitel **S** und den Mittelpunkt **M** des Ikosaeders zu erhalten.

Bestimmt man ferner die Punkte **o** und **S'**, welche mit **O** resp. **S** in bezug auf **M** symmetrisch liegen, so ist **o** der Mittelpunkt des oberen Basisfünfeckes und **S'** der Scheitel der zugehörigen Teilpyramide.

Um die Centralprojektion des oberen Basisfünfeckes **abcde** festzustellen, zeichnen wir das mit $\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0\mathbf{C}_0\mathbf{D}_0\mathbf{E}_0$ konzentrische, gegen dasselbe jedoch um 180° verwendete Fünfeck $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0\varepsilon_0$, und ermitteln dessen Centralprojektion $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ in der Ebene $\mathbf{e}_v\mathbf{e}_b$.

Da nun $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ offenbar die orthogonale Projektion des oberen Basisfünfeckes **abcde** auf die Ebene $\mathbf{e}_v\mathbf{e}_b$ darstellt, so werden die Ecken des letzteren auf den durch α, β, γ, δ, ε parallel zu **OZ** gezogenen Geraden liegen, und können, da sich die Fünfecke $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ und **abcde** überdies in zu einander parallelen Ebenen vorfinden, leicht bestimmt werden. So wird beispielsweise die Gerade $\mathbf{O}\varepsilon$ mit der Geraden **oe** den nämlichen Fluchtpunkt $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{e}_v$ besitzen; der Strahl $\mathbf{ov}_1$ schneidet daher die durch ε parallel zu **OZ** gezogene Gerade in dem verlangten Eckpunkte **e**. Auf gleiche Weise können nun auch die Eckpunkte **a**, **b**, **c** und **d** festgestellt werden. Werden die somit bestimmten Eckpunkte richtig verbunden, so erhält man die sämtlichen Kanten und somit auch das centralprojektivische Bild des Zwanzigflächners.

§ 257.

98. Aufgabe: **Irgend ein unregelmässiges Polyeder ist centralprojektivisch darzustellen, und sein Schnitt mit einer Ebene zu bestimmen.**

Als diesbezügliches Beispiel wählen wir ein Prismatoid, d. i. ein von sechs unregelmässigen Vierecken begrenztes Polyeder, welches in der Gestalt einem vierseitigen durch zwei Basisvierecke abgegrenzten Prisma ähnelt.

Ein derartiges Polyeder ist durch drei in einer Ecke zusammenstossende Vierecke, als Begrenzungspolygone, vollkommen gegeben.

Wir nehmen im vorliegenden Falle das eine Viereck **abcd** [Fig. 205, Taf. XIII] in der Bildebene an, betrachten **a** als den gemeinschaftlichen Eckpunkt, wählen ferner **abef** als das in der Ebene $\mathbf{e}_v^1\,\mathbf{e}_b^1$ ($\mathbf{e}_b^1$ zusammenfallend mit **ab**) gegebene zweite Begrenzungsviereck, und **adge** in der Ebene $\mathbf{e}_v^2\,\mathbf{e}_b^2$ ($\mathbf{e}_b^2 = \mathbf{ad}$) als das dritte Viereck des darzustellenden Polyeders. Hierbei ist zu beachten resp. die Annahme so zu treffen, dass die Schnittgerade $\mathbf{v}_1\mathbf{a}$ der beiden letztgenannten Ebenen thatsächlich die Kante **ae** des Prismatoides bilde.

Es ergeben sich nun unmittelbar der Fluchtpunkt $\mathbf{v}_2$ von **bf** in $\mathbf{e}_v^1$, der Fluchtpunkt $\mathbf{v}_3$ von **ef** in $\mathbf{e}_v^1$, der Fluchtpunkt $\mathbf{v}_4$ von **gd** in $\mathbf{e}_v^2$, während die noch fehlenden drei Seitenebenen folgendermassen erhalten werden.

Die durch **cd** und **dg** gehende Seitenebene $\mathbf{e}^3$ hat **cd** zur Bildflächtrace $\mathbf{e}_b^3$ und die durch $\mathbf{v}_4$ hierzu Parallele $\mathbf{e}_v^3$ zur Fluchttrace. Die durch **bc** und **bf** gehende Seitenebene $\mathbf{e}^4$ hat die Bildflächtrace $\mathbf{e}_b^4 = \mathbf{cb}$ und die zu **cb** durch $\mathbf{v}_2$ gezogene Parallele $\mathbf{e}_v^4$ zur Fluchttrace.

Die beiden Ebenen $\mathbf{e}^4$ und $\mathbf{e}^3$ bestimmen im Schnitte die durch **c** gehende Kante $\mathbf{cv}_5$ oder **ch**.

Die letzte Seitenebene ergibt sich als diejenige, welche durch die Kanten **ef** und **eg** geht. Nachdem **eg** parallel zu **ad**, also parallel zur Bildebene angenommen wurde, gehen die Tracen $\mathbf{e}_v^5$ und $\mathbf{e}_b^5$ beziehungsweise durch den Fluchtpunkt $\mathbf{v}_3$ und den Durchstosspunkt Δ_1 der Kante **ef** parallel zu **eg**.

Im Schnitte der Seitenebenen e^3 und e^5 erhält man die Kante gv_6, welche mit der Kante cv_5 den letzten Eckpunkt **h** des Prismatoides bestimmen. Desgleichen ist **hf** die letzte fehlende Kante.

Der Schnitt dieses Polyeders mit der Ebene $E_v E_b$ wird durch das Viereck **ABCD** dargestellt, welches direkt aus den Schnittgeraden der besagten Ebene **E** mit der Bildebene und den drei Seitenebenen e^2, e^4 und e^5 zusammengesetzt ist.

Fig. 1.

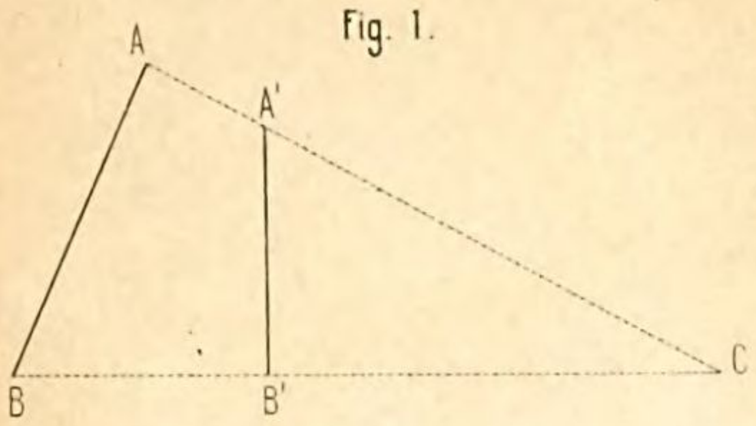


Fig. 2.

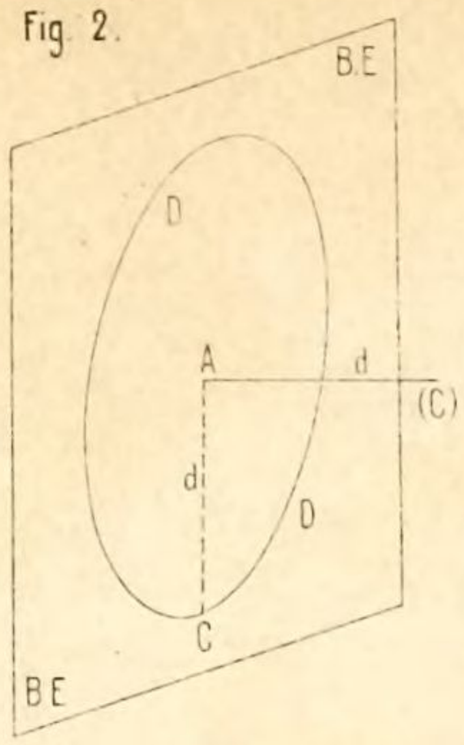


Fig. 3.

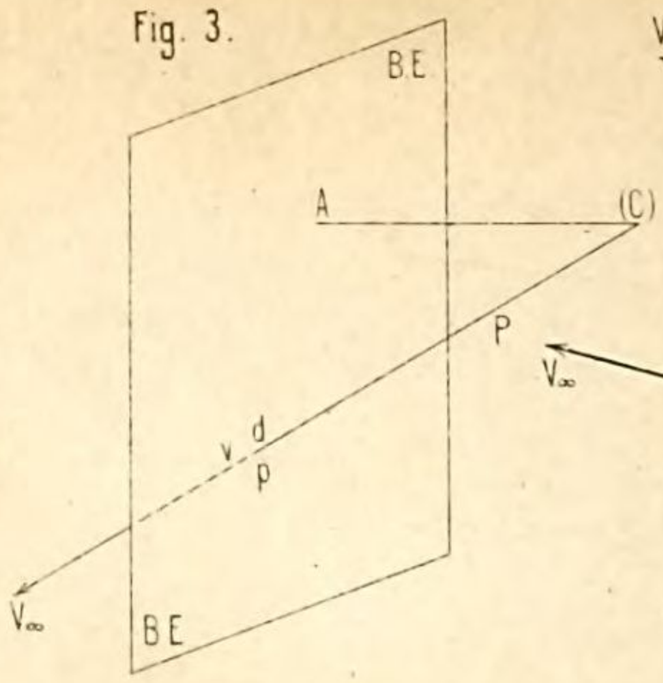


Fig. 4.

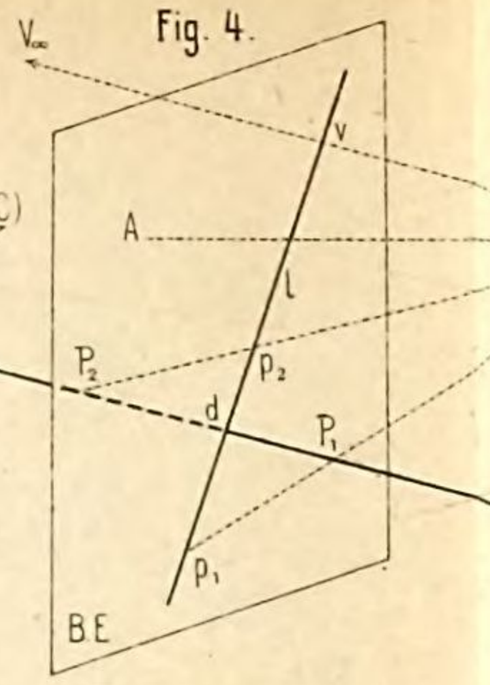


Fig. 9.

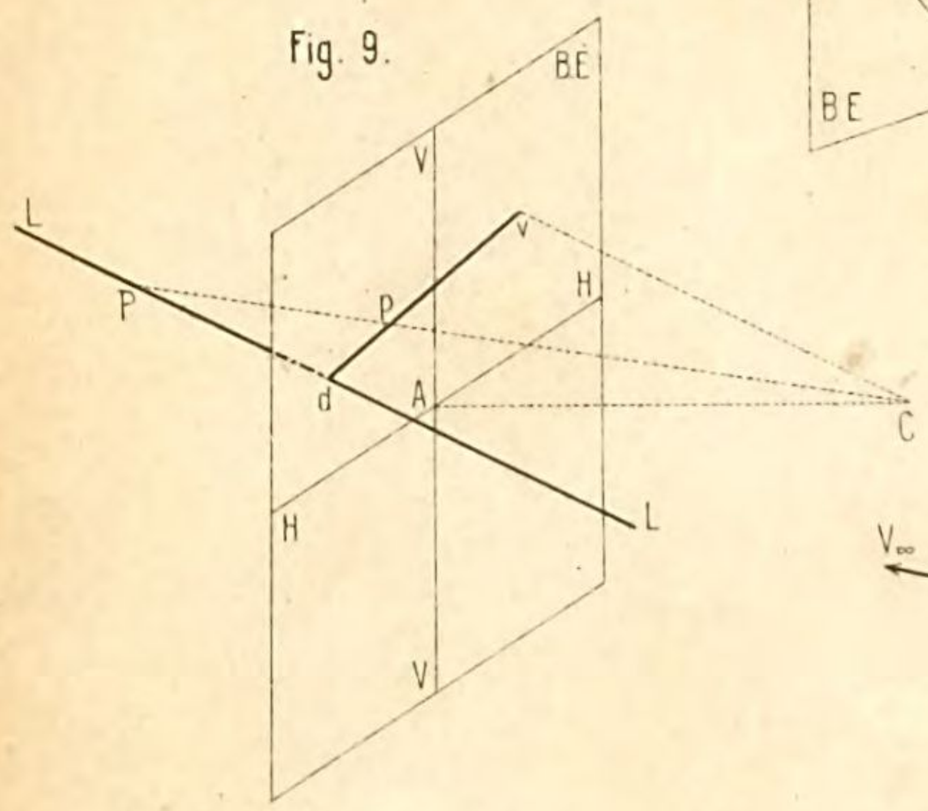


Fig. 10.

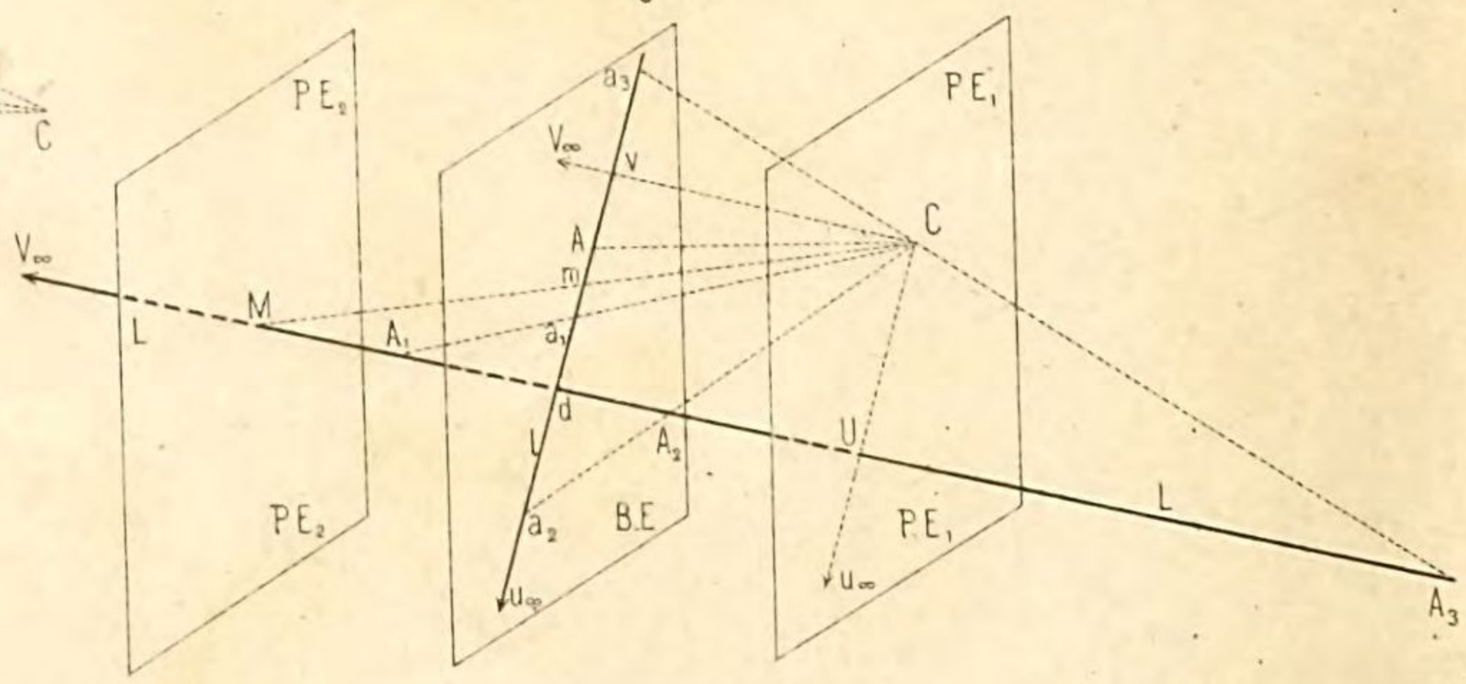


Fig. 12.

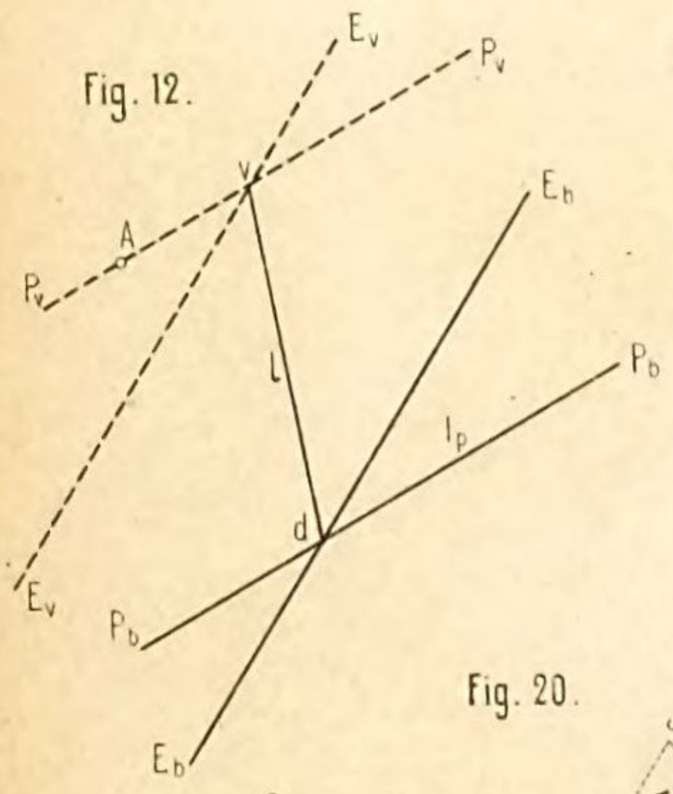


Fig. 13.

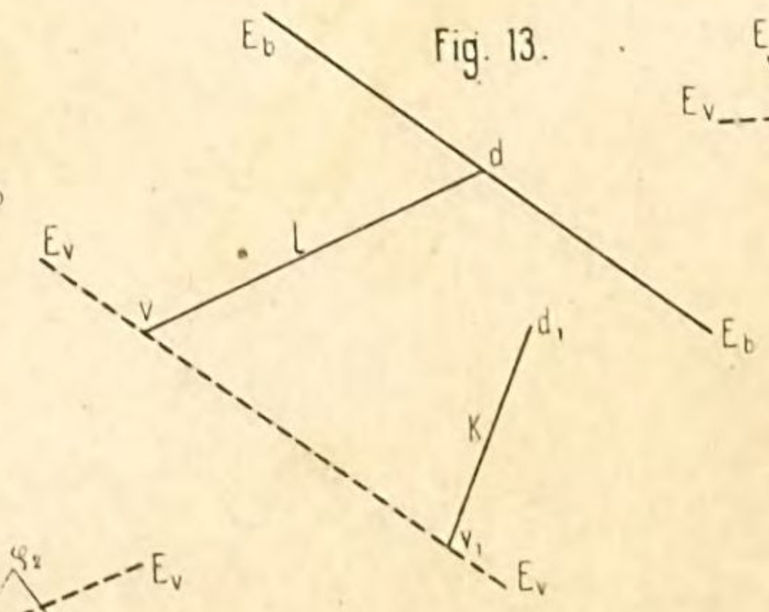


Fig. 14.

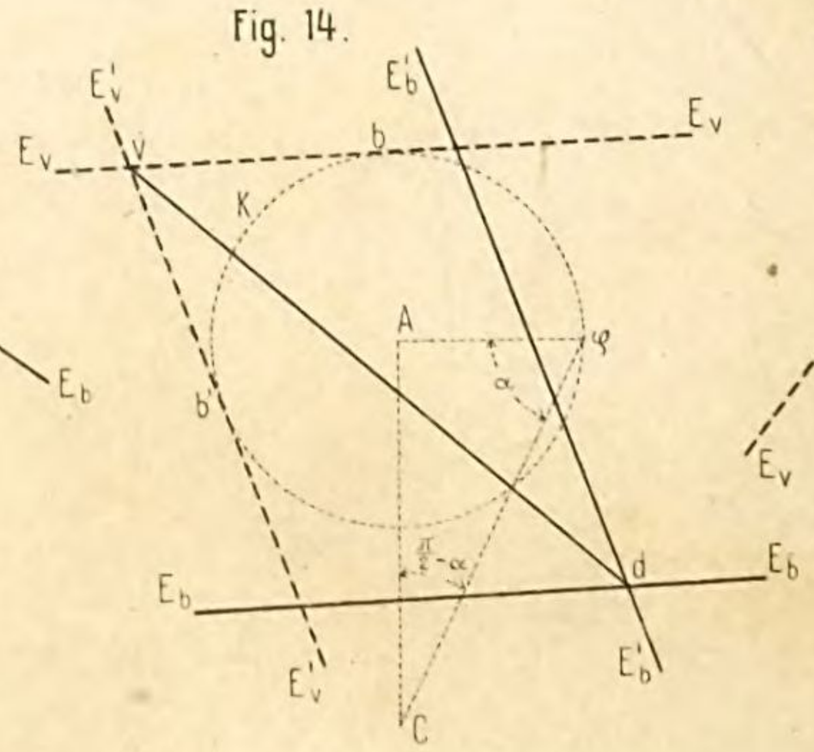


Fig. 15.

Fig. 20.

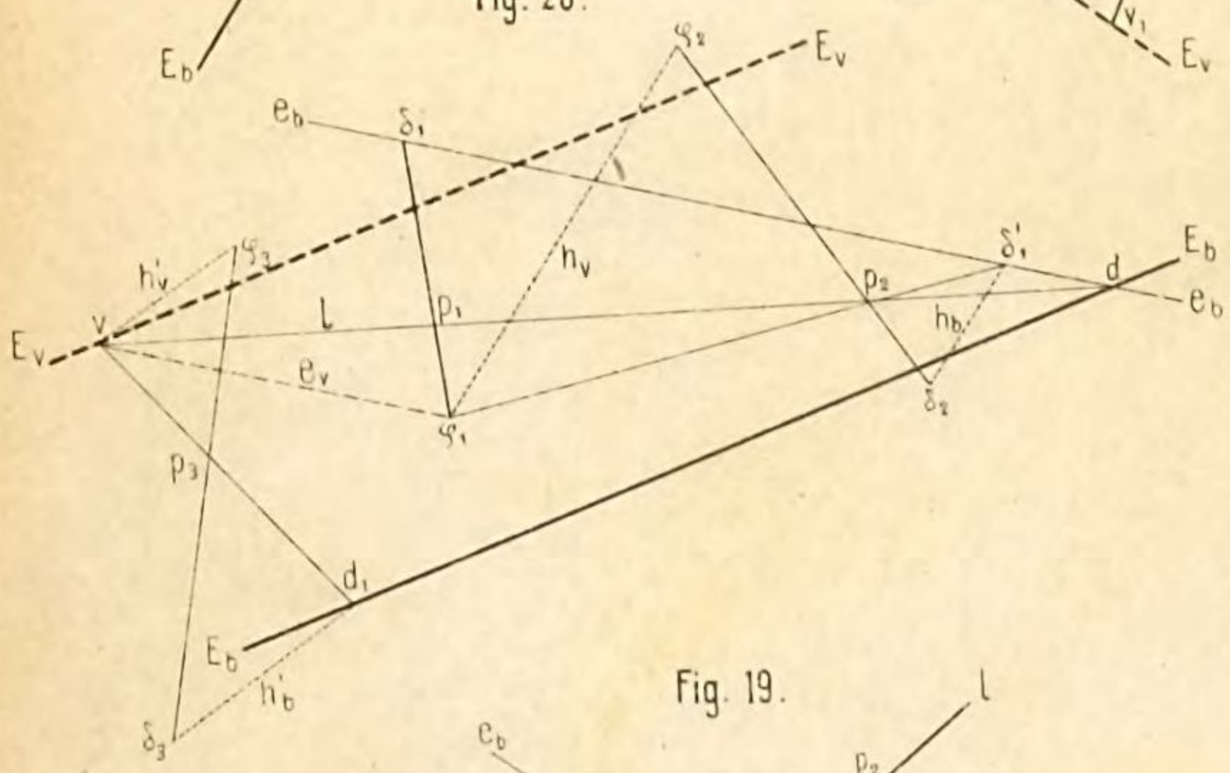


Fig. 19.

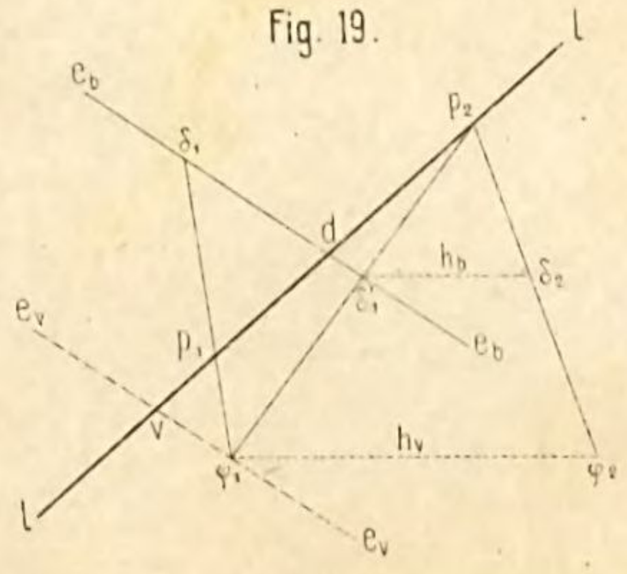


Fig. 21.

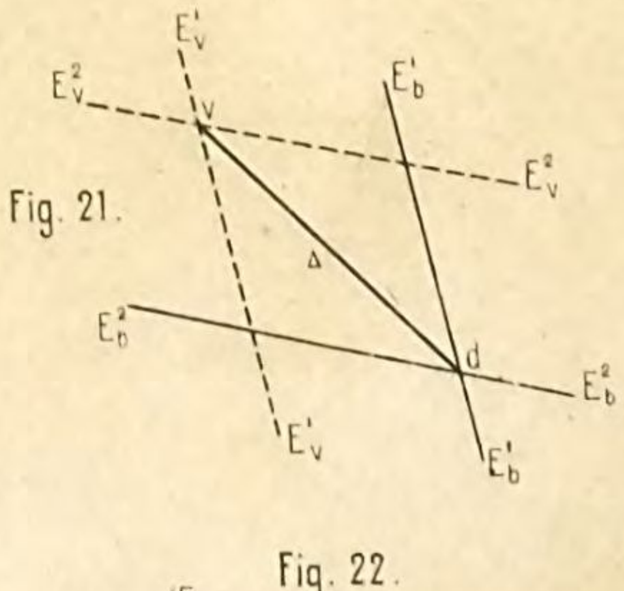


Fig. 22.

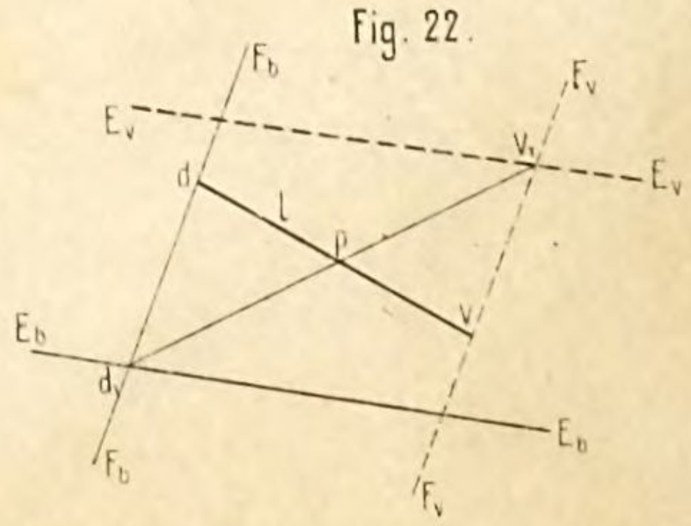
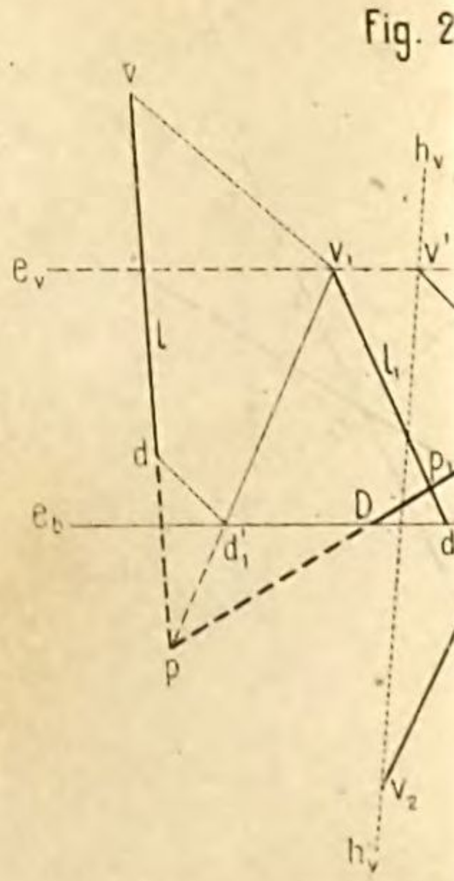


Fig. 2



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt

Verlag v. Baumgärtn

Fig. 5.

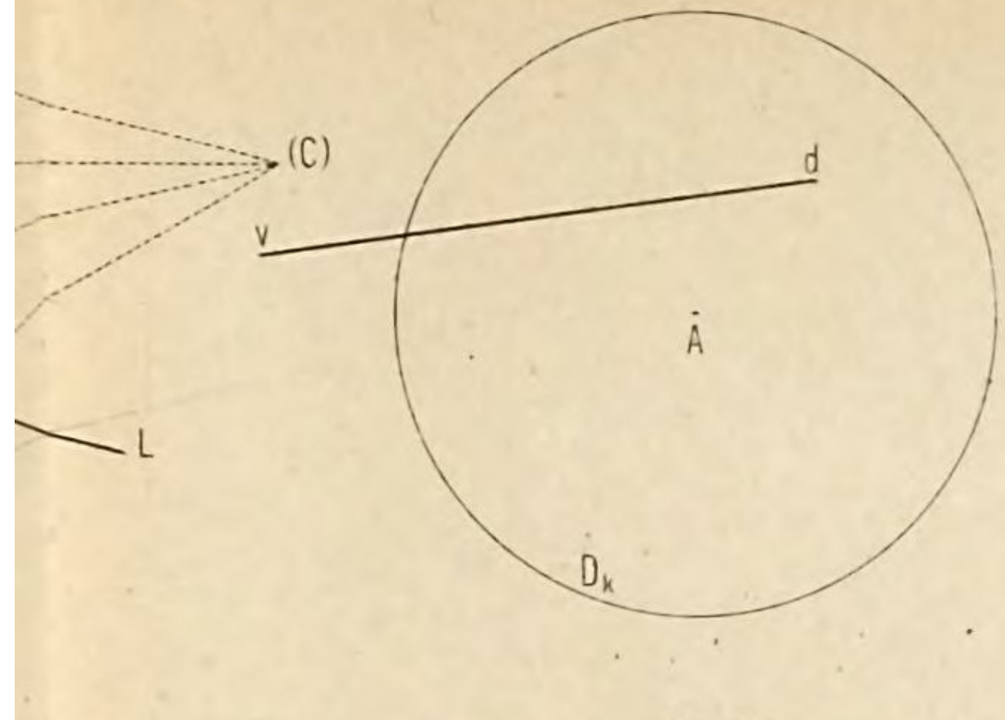


Fig. 6.

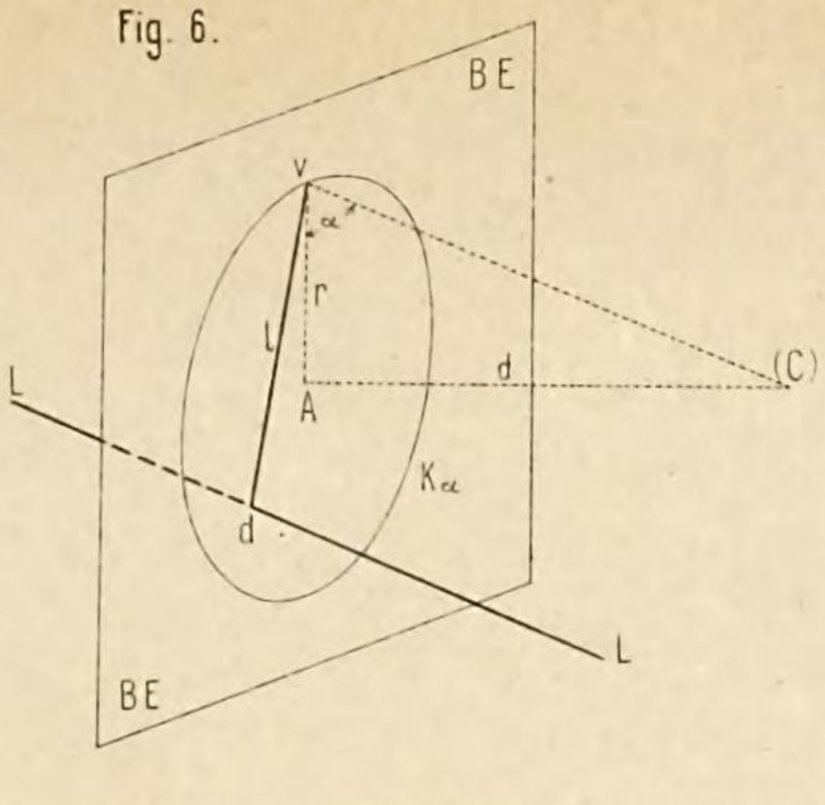


Fig. 8.

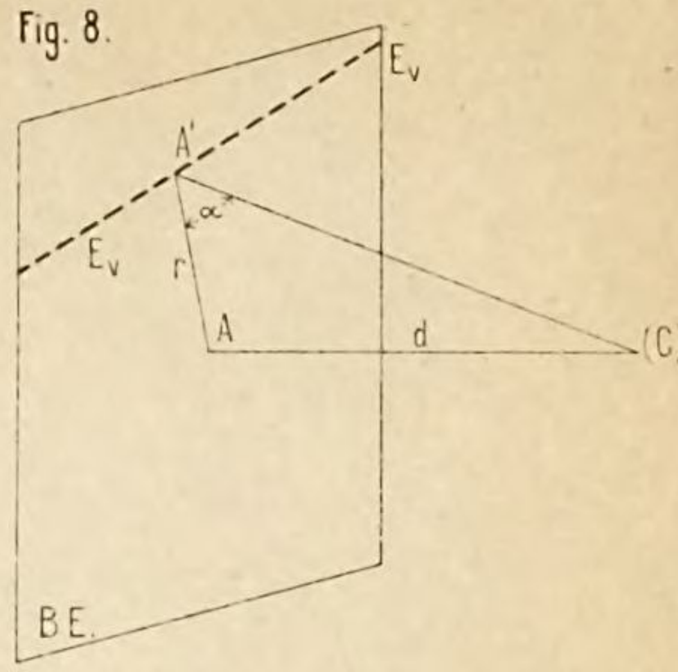


Fig. 7.

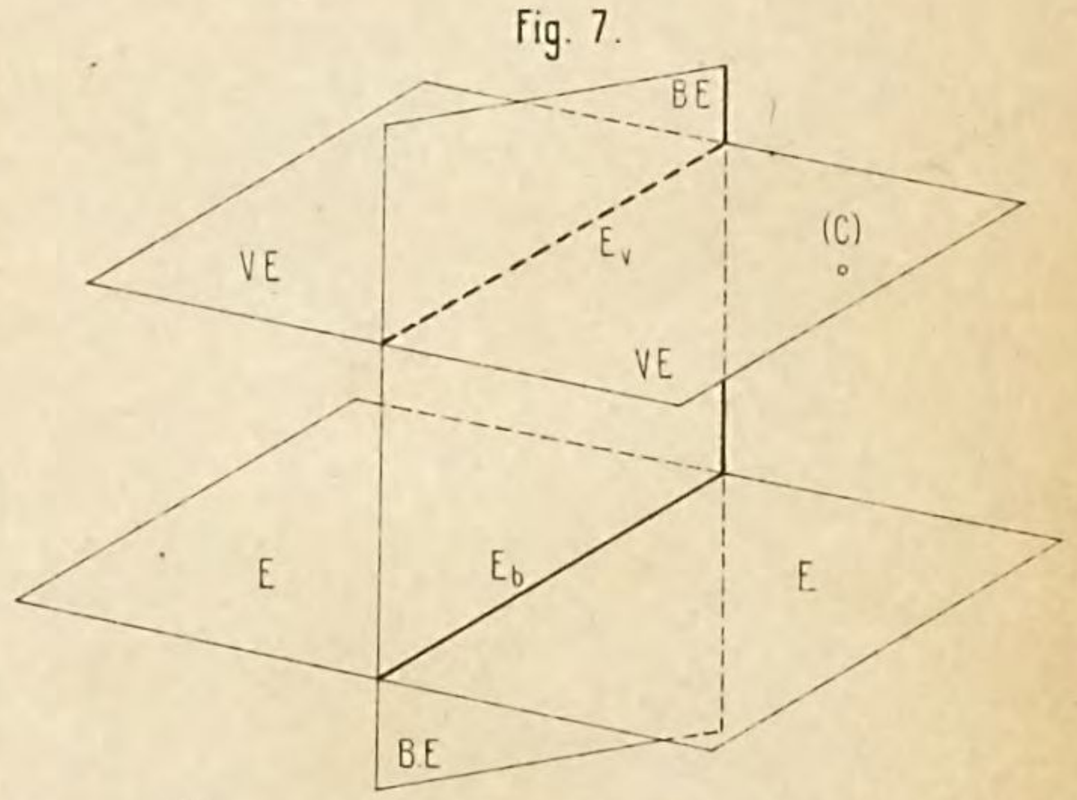
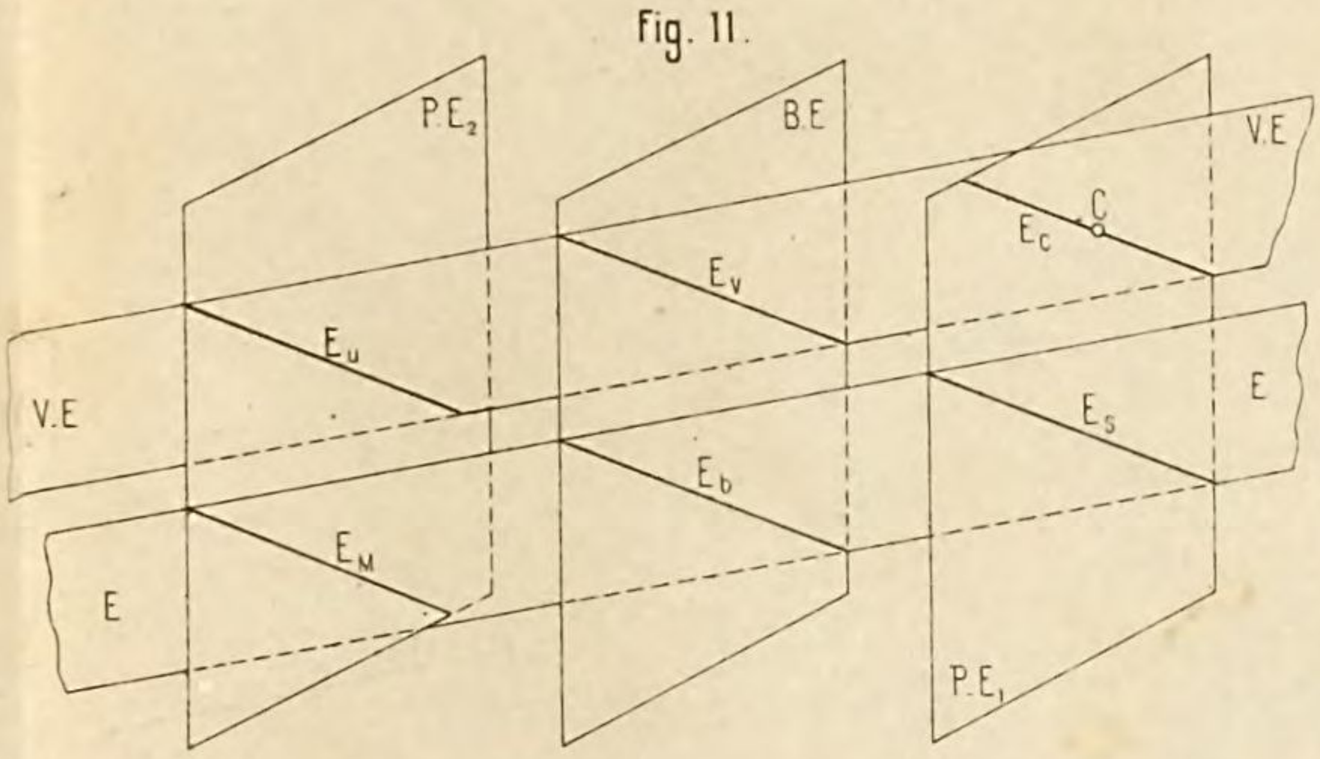


Fig. 11.



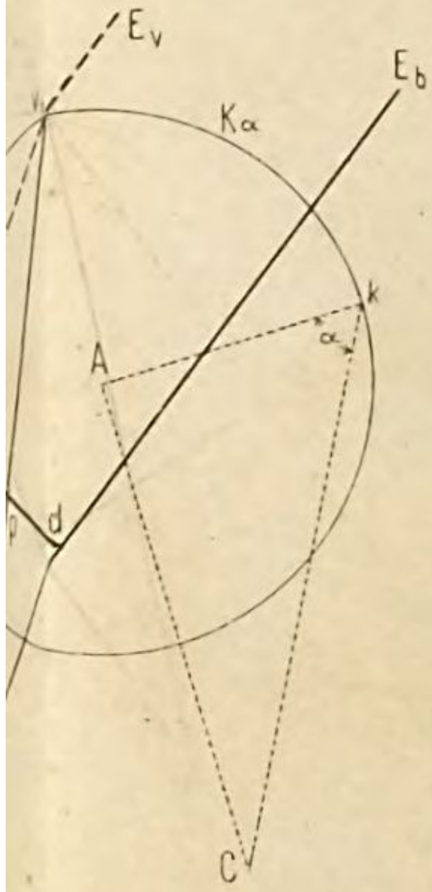


Fig. 17.

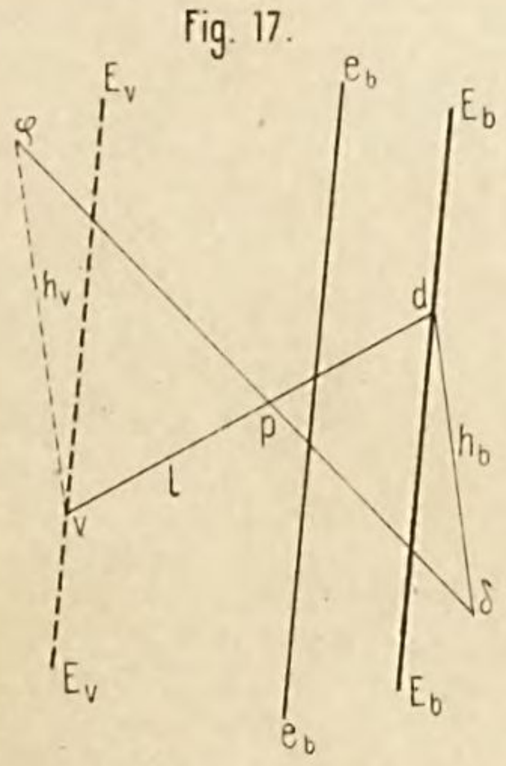


Fig. 18.

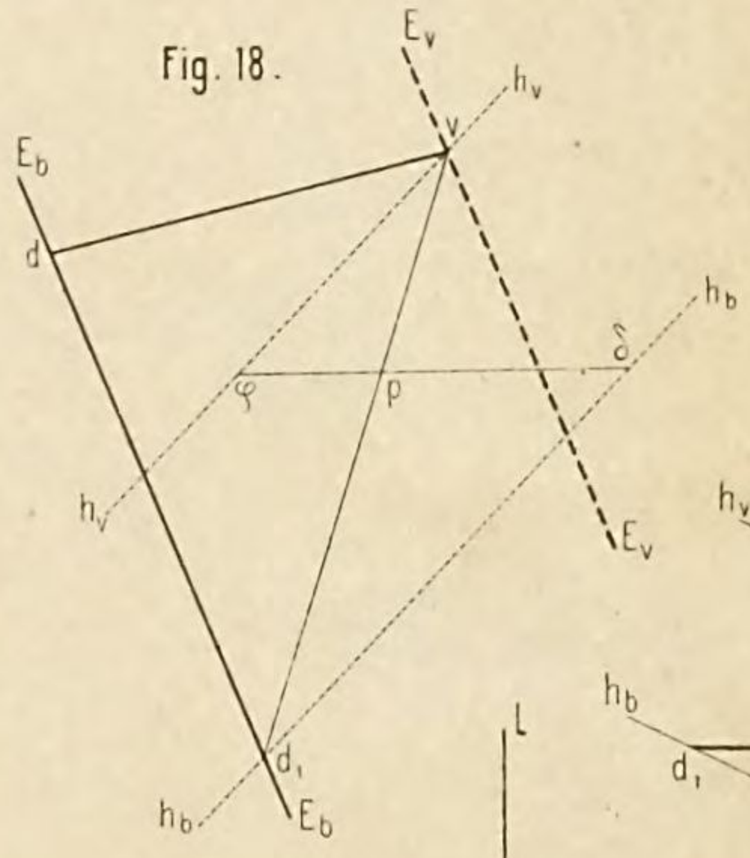


Fig. 16.

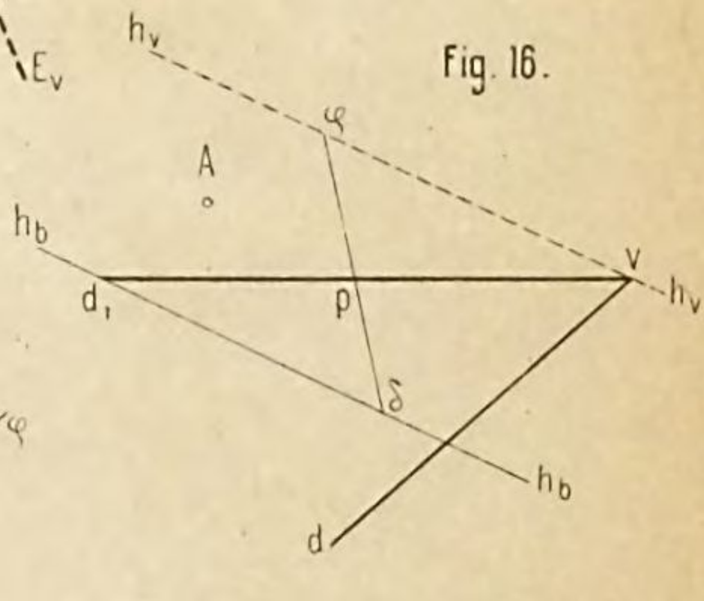


Fig. 25.

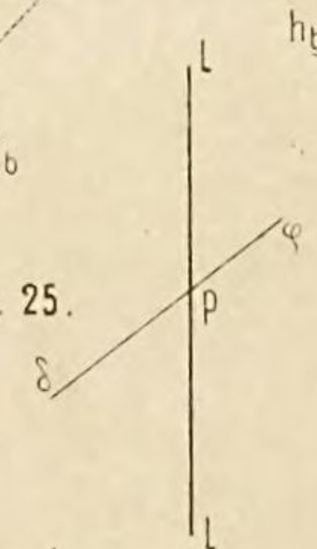


Fig. 24.

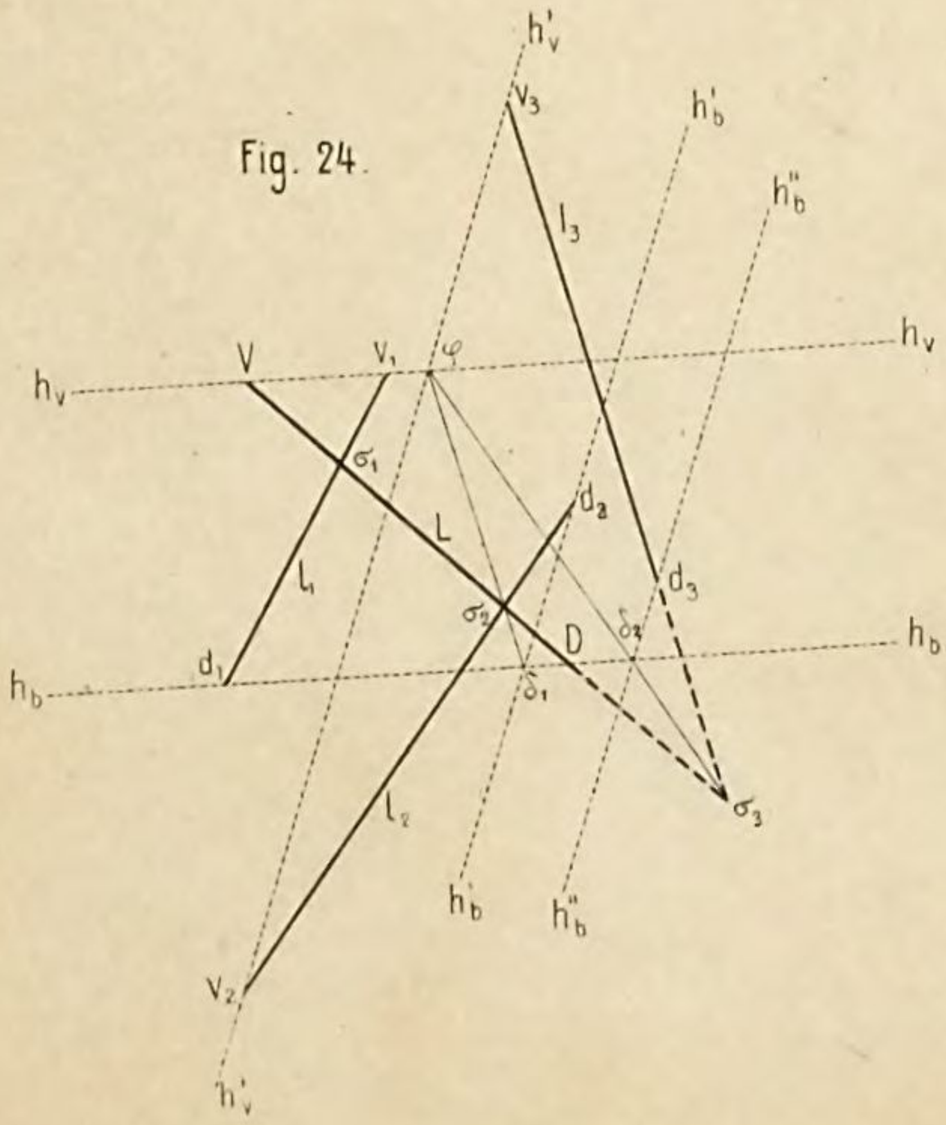


Fig. 23.

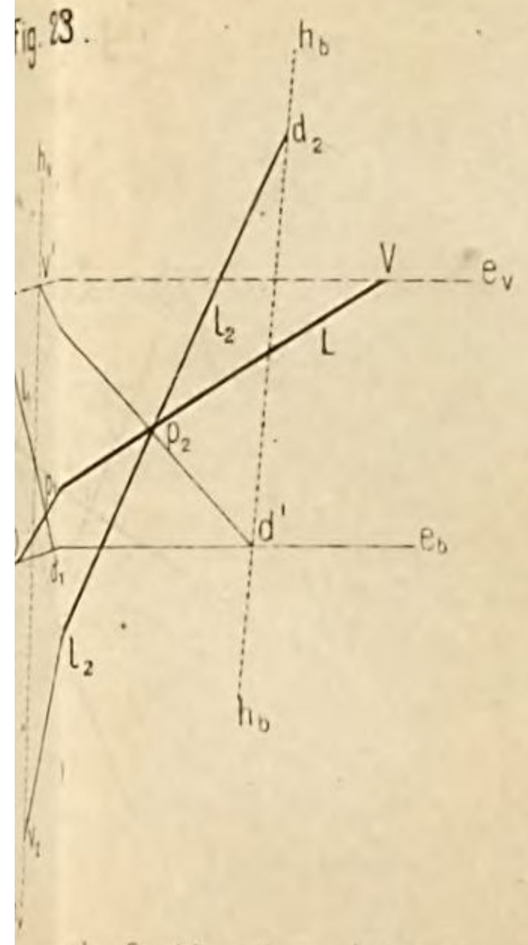
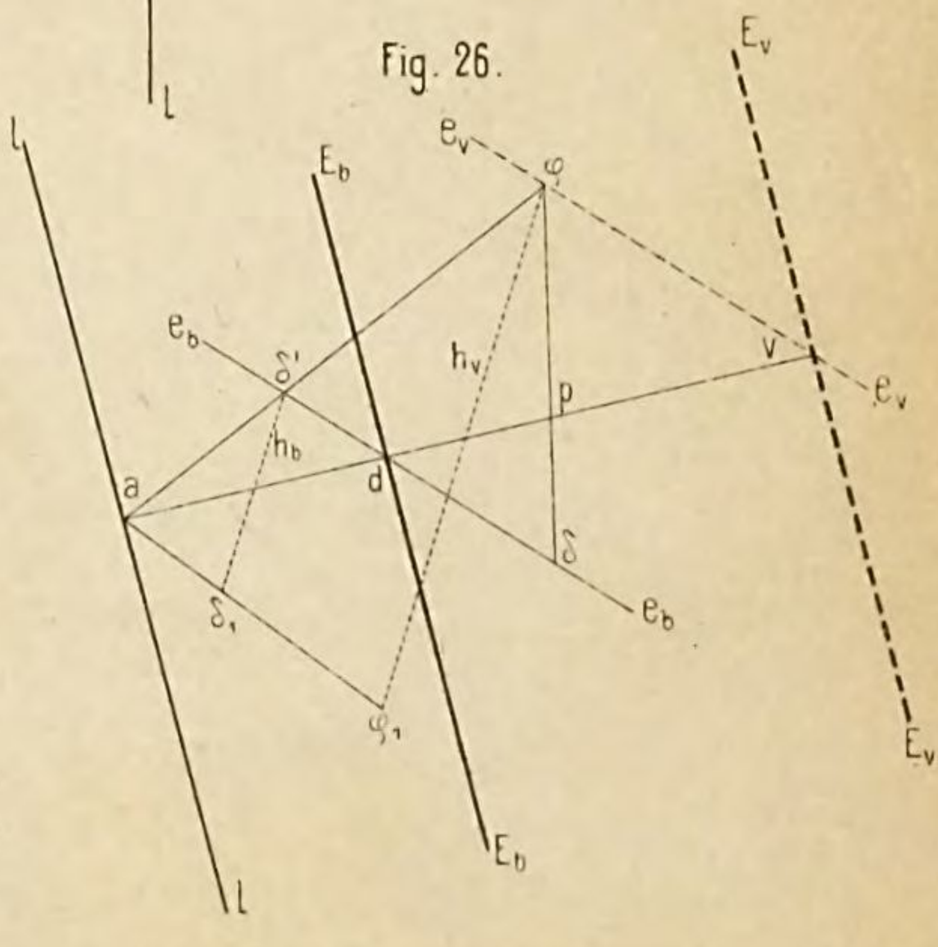


Fig. 26.



...er's Buchhandlung, Leipzig

Constr. u. gez. Peschka

Fig. 27.

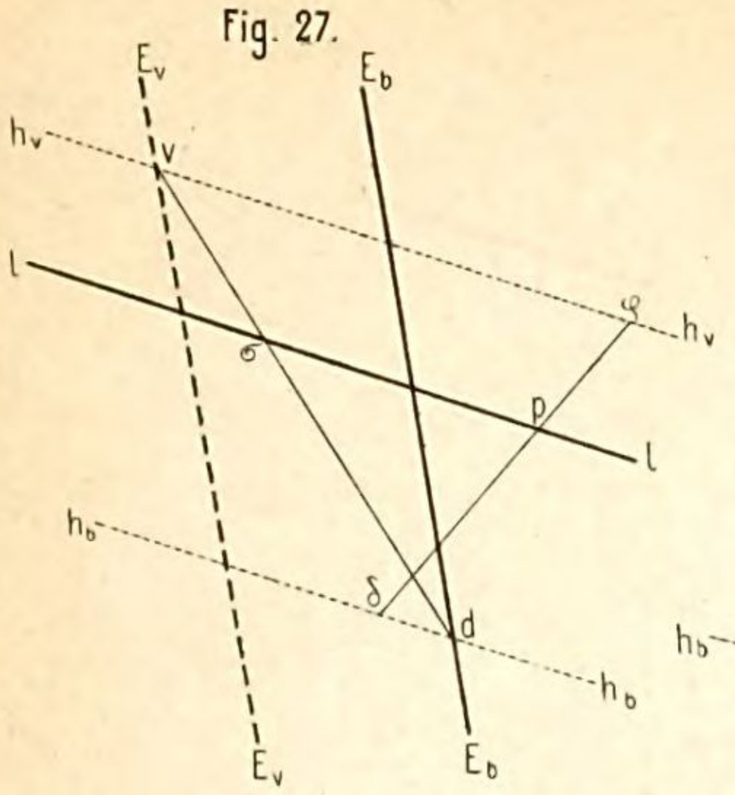


Fig. 28.

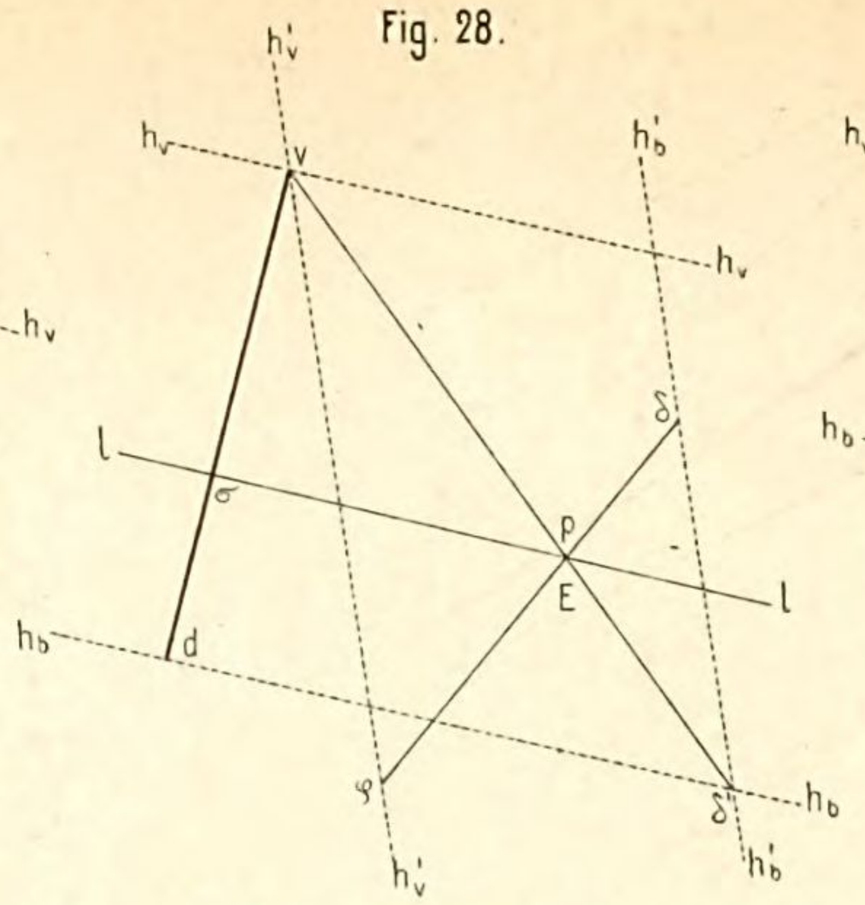
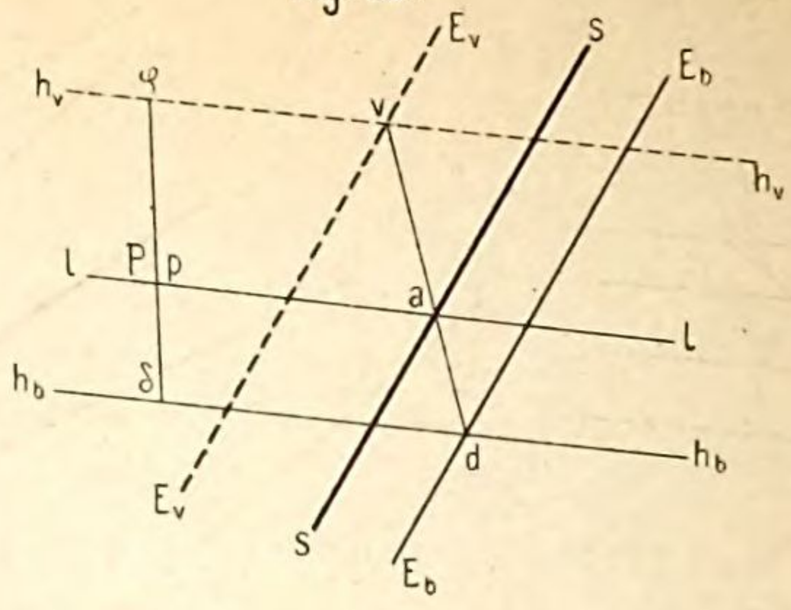


Fig. 29.



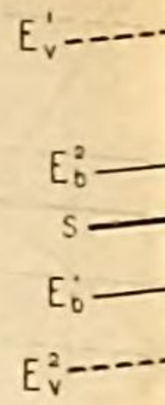
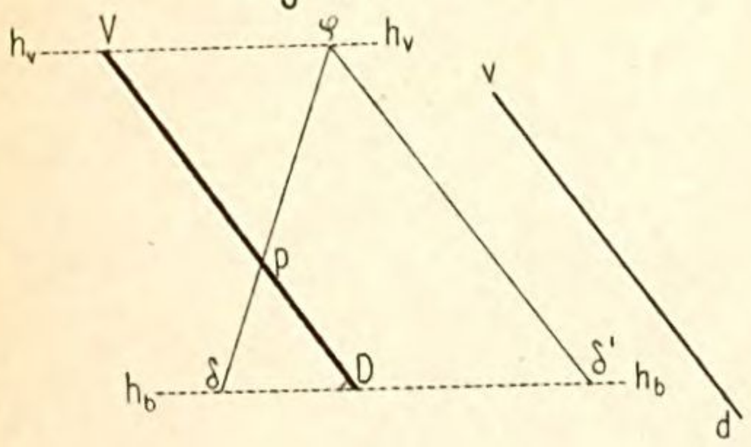
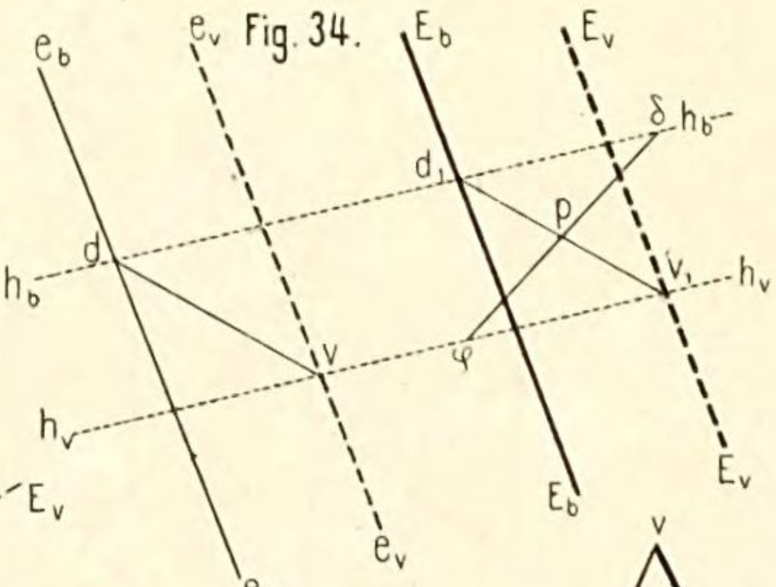
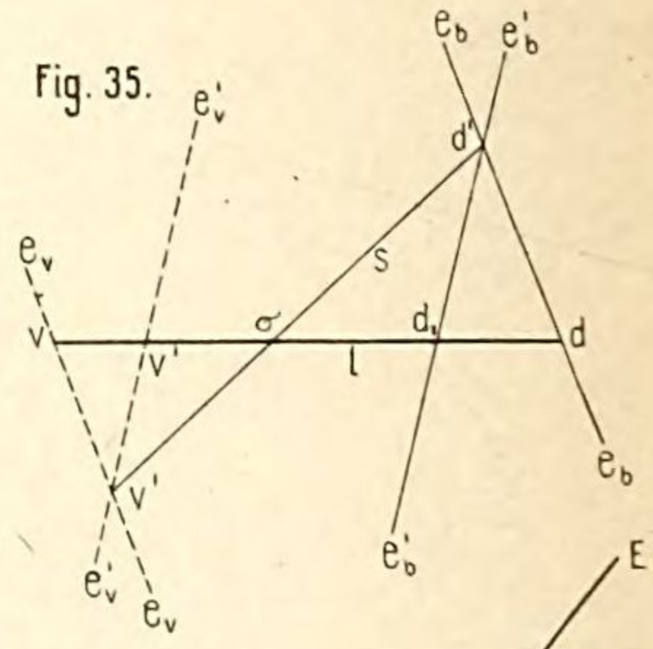
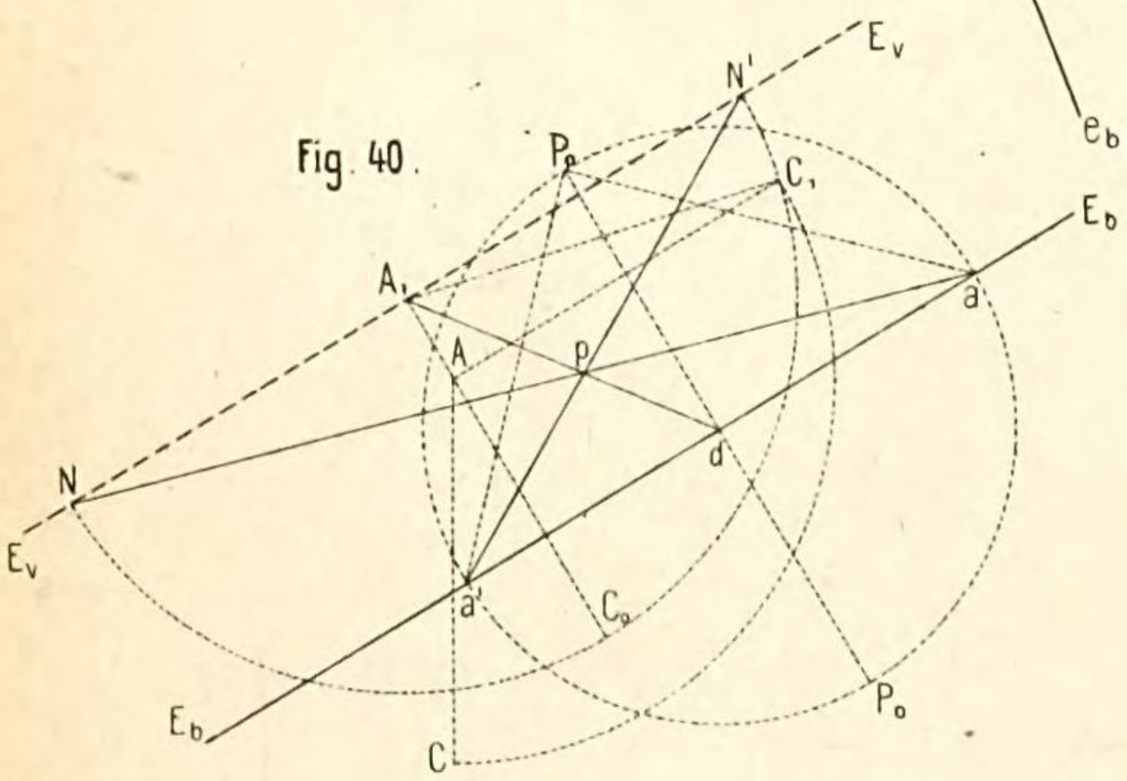


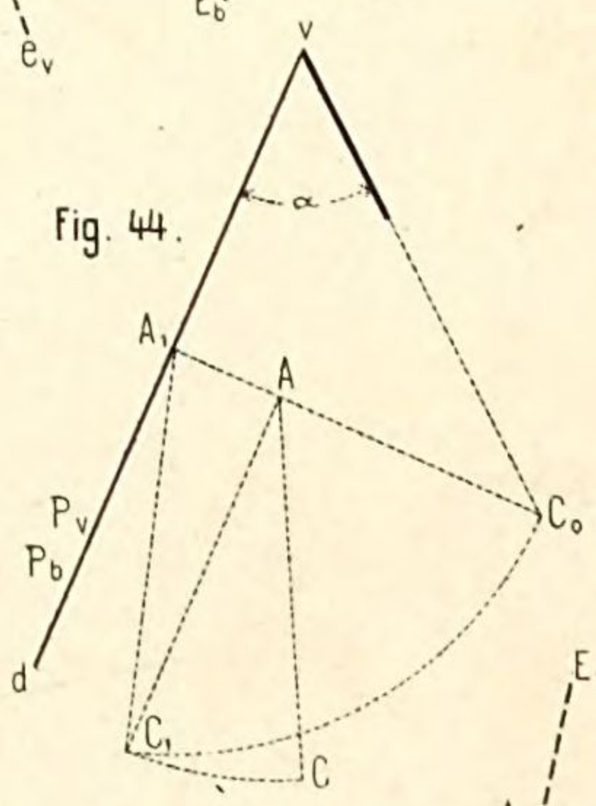
Fig. 33.

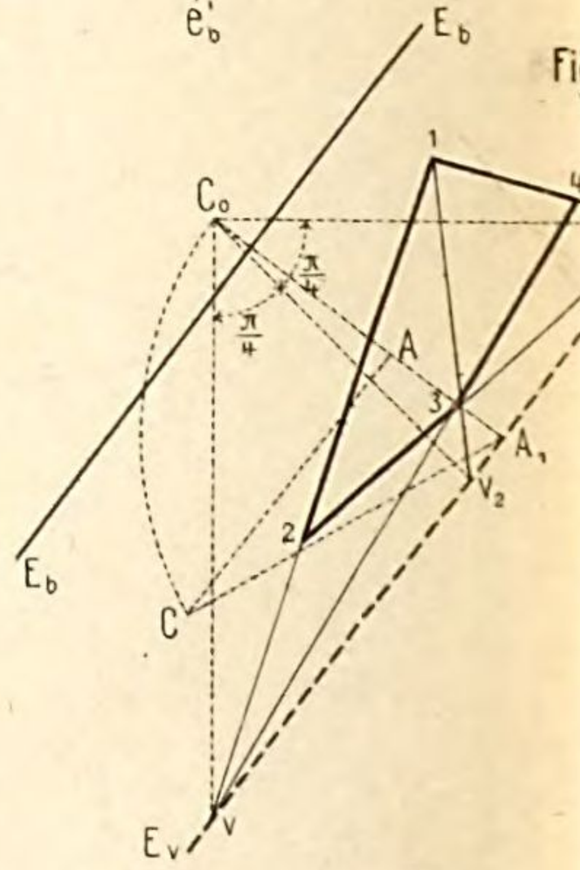


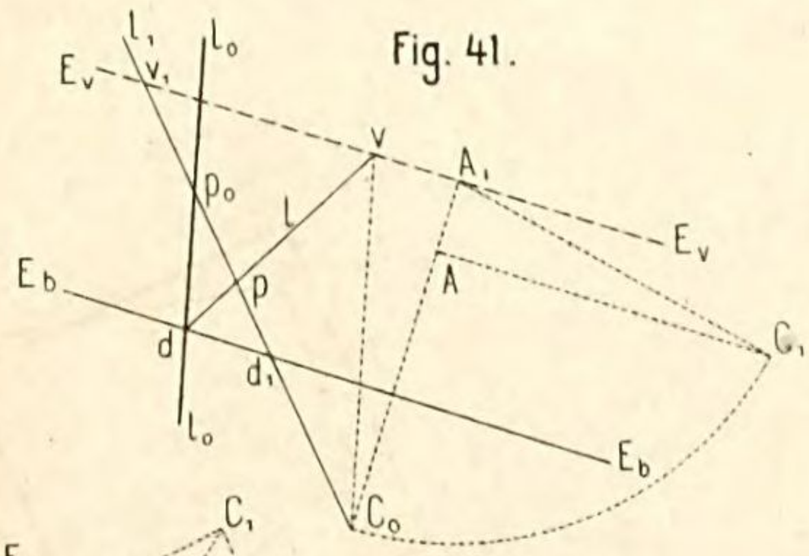


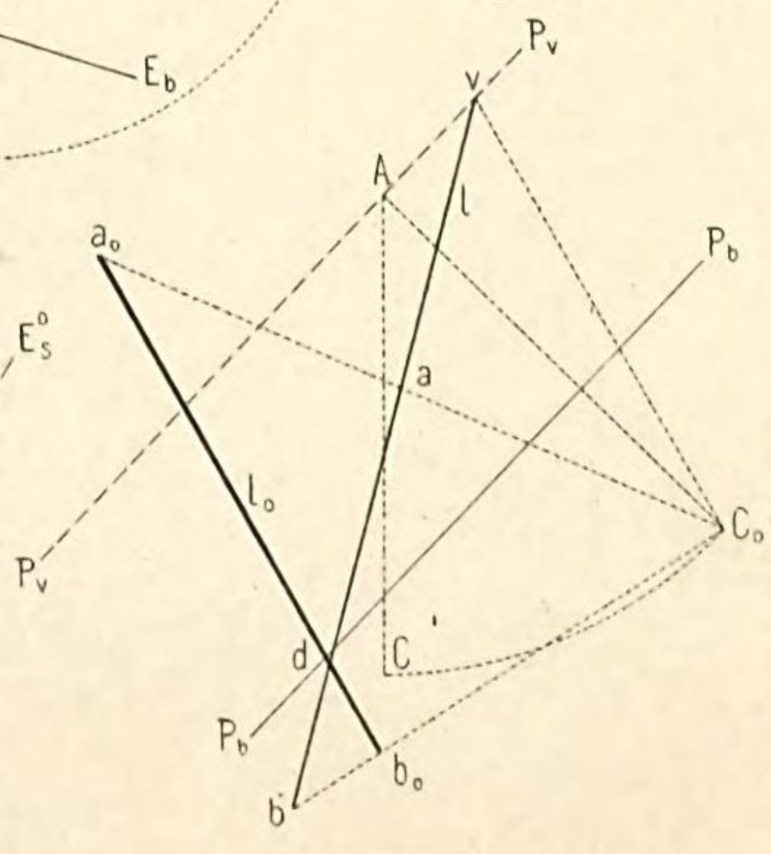


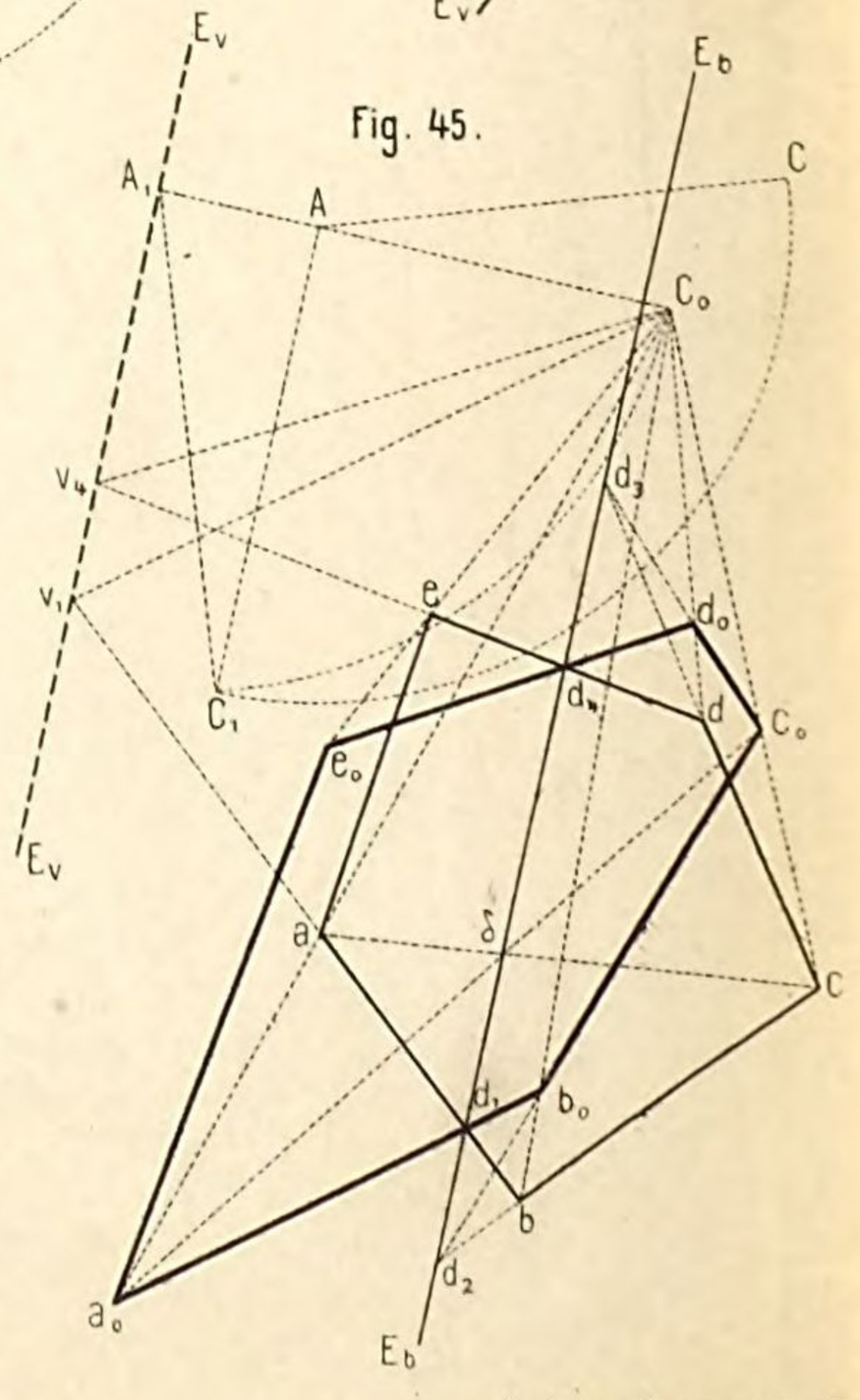


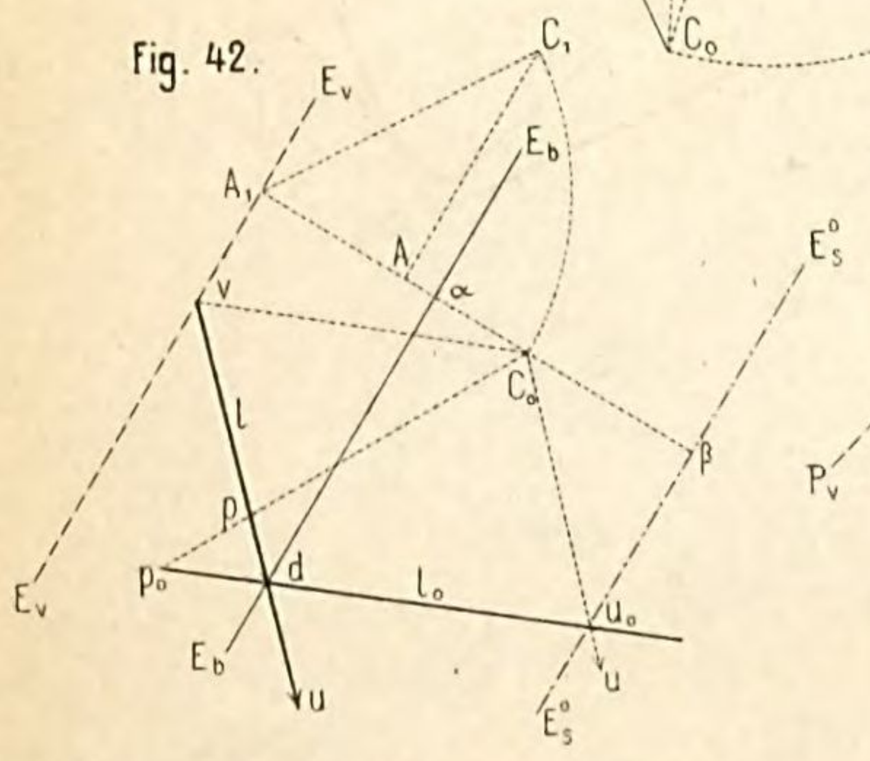












Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgärtner's

Fig. 30.

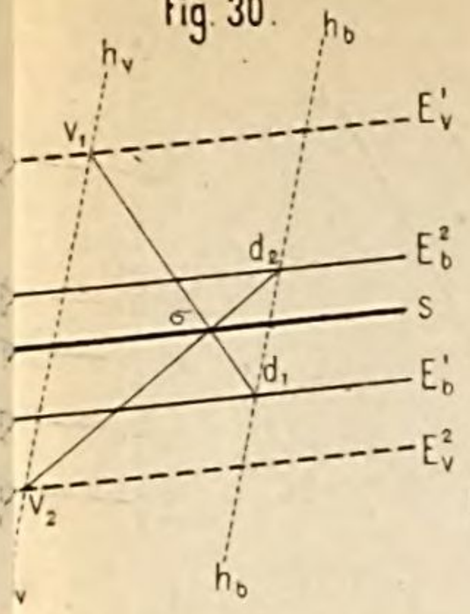


Fig. 31.

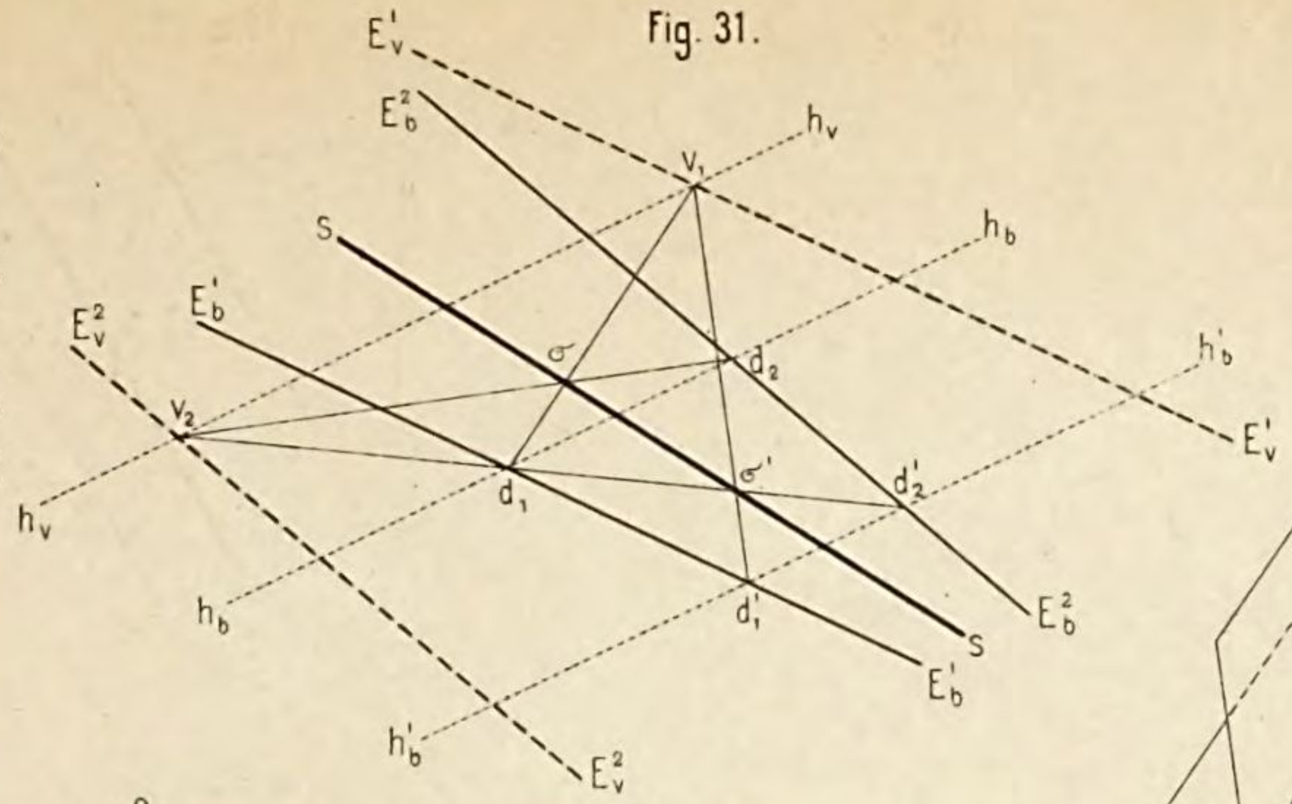


Fig. 32.

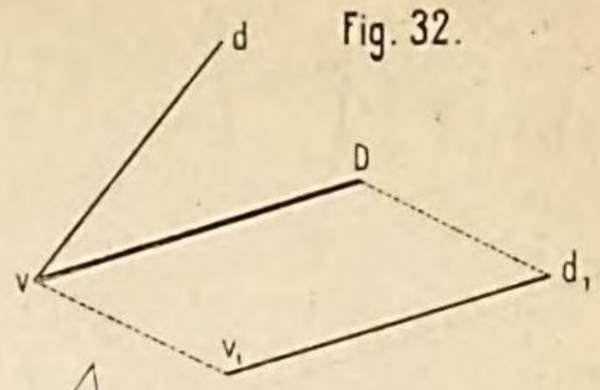


Fig. 38.

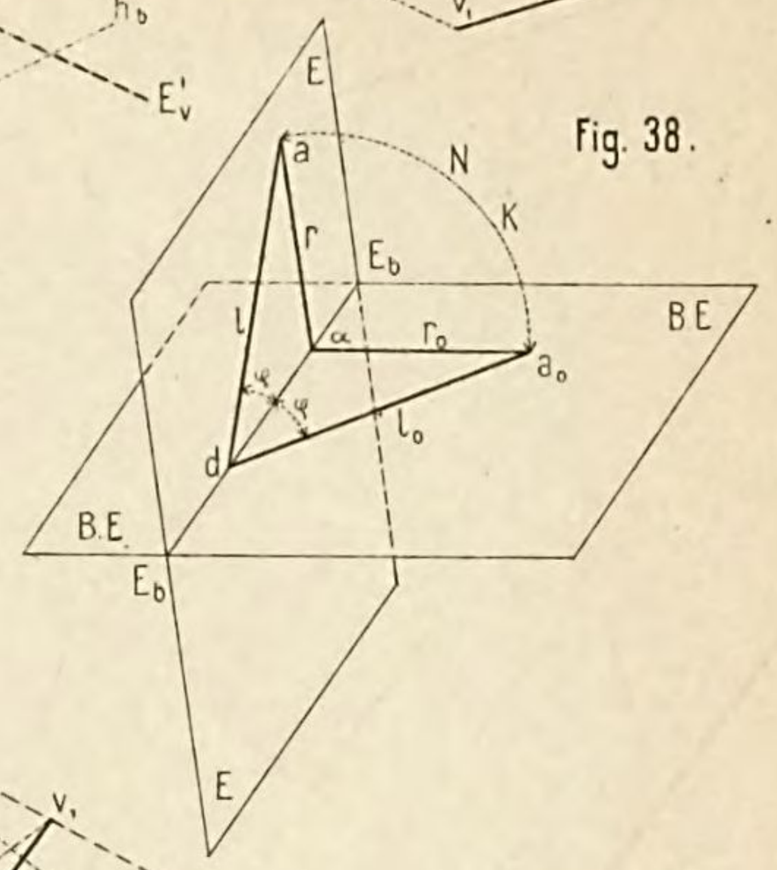


Fig. 36.

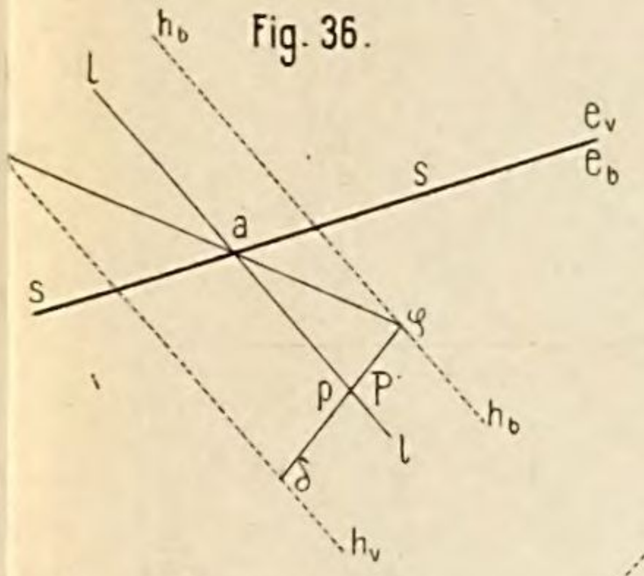


Fig. 37.

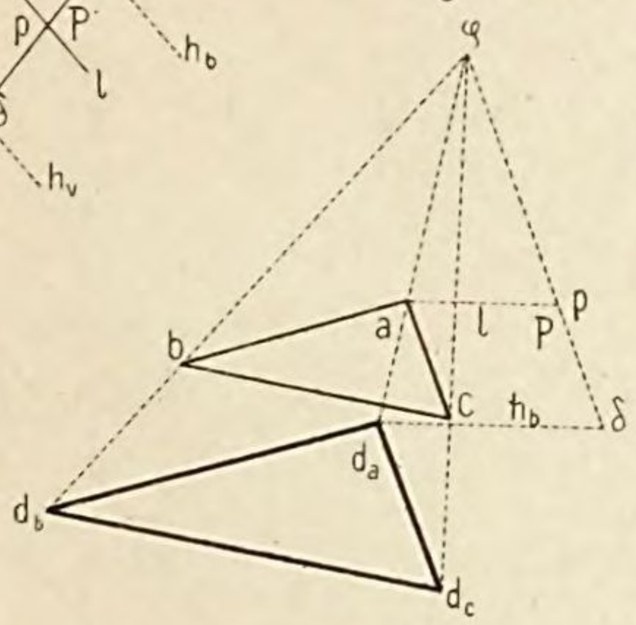


Fig. 39.

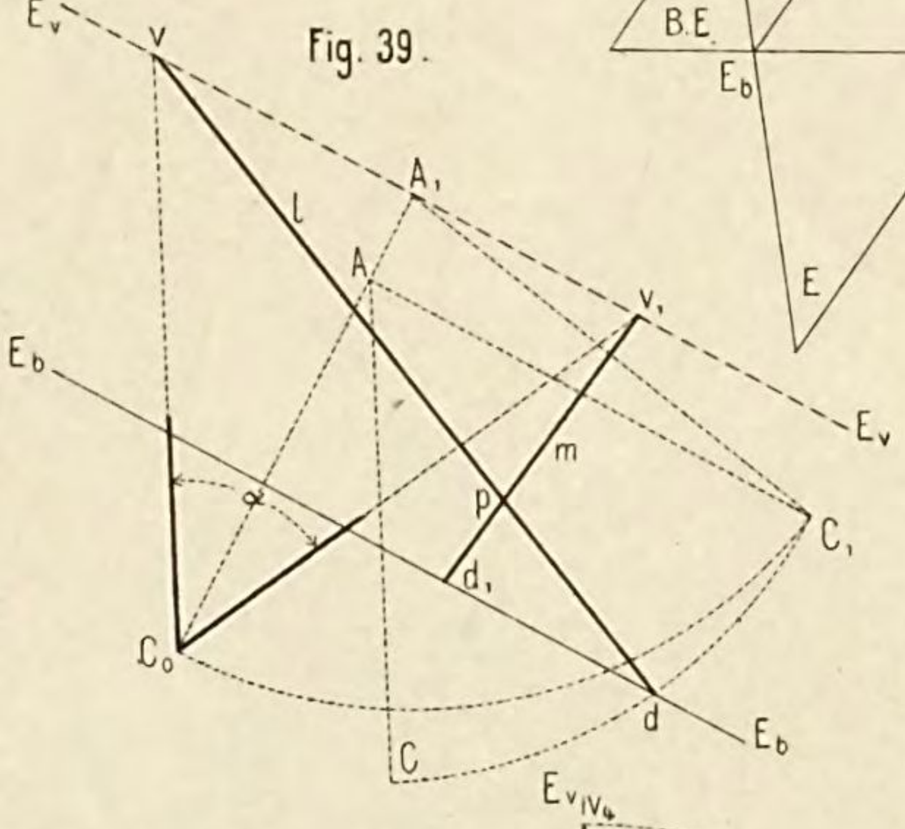


Fig. 46.

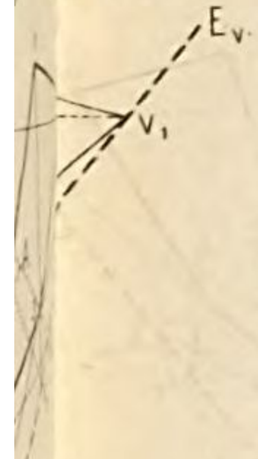


Fig. 47.

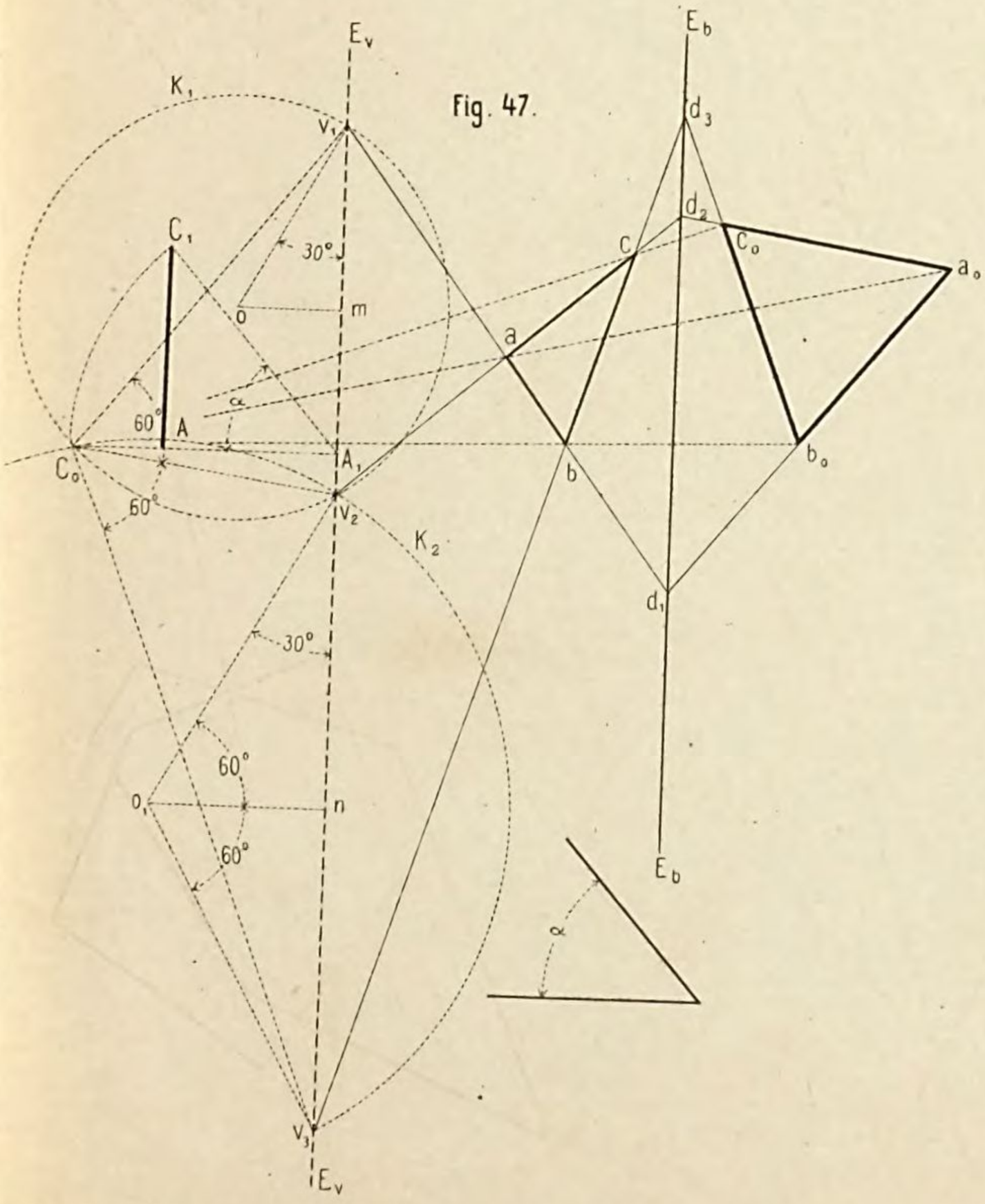
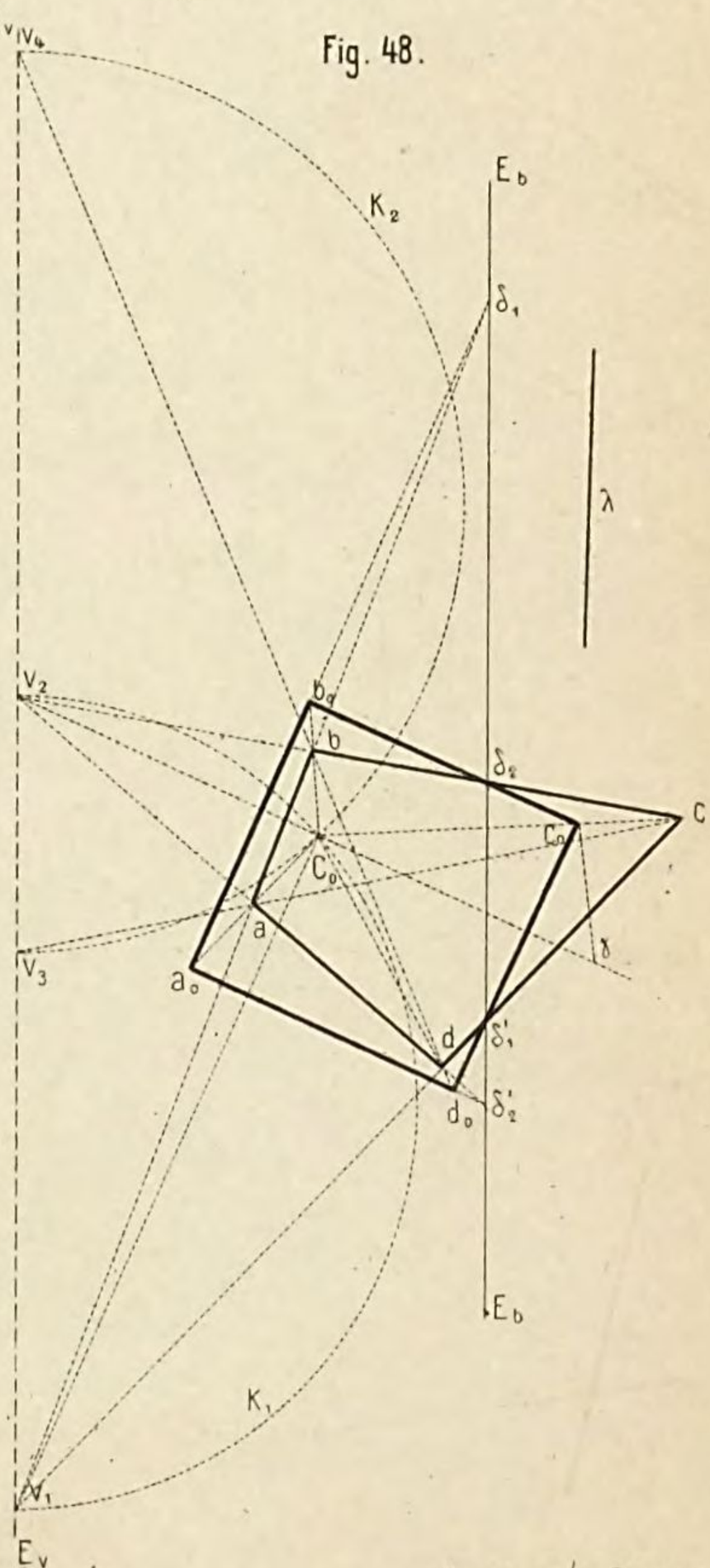


Fig. 48.



uchhandlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka.

Fig. 49.

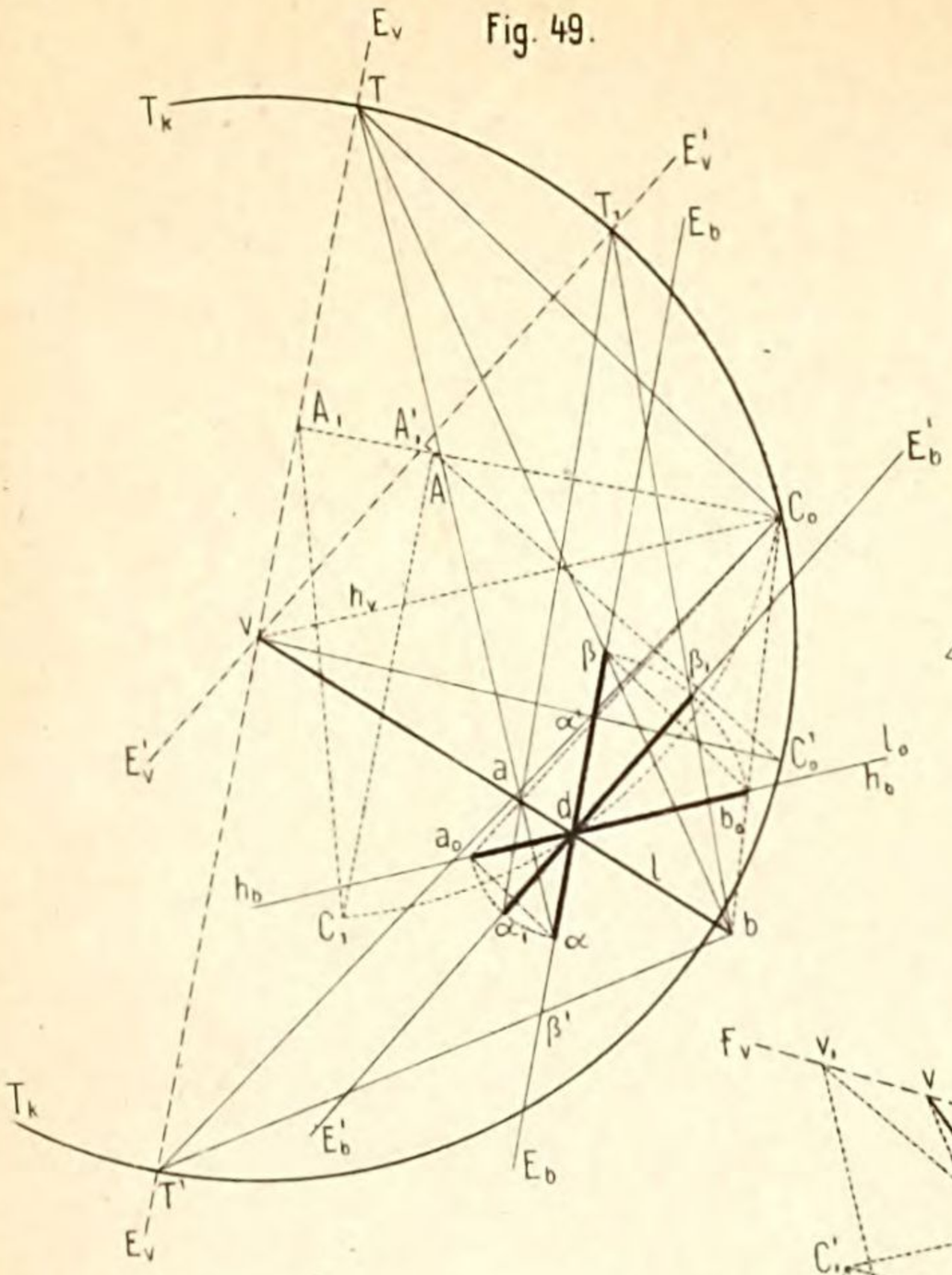


Fig. 51.

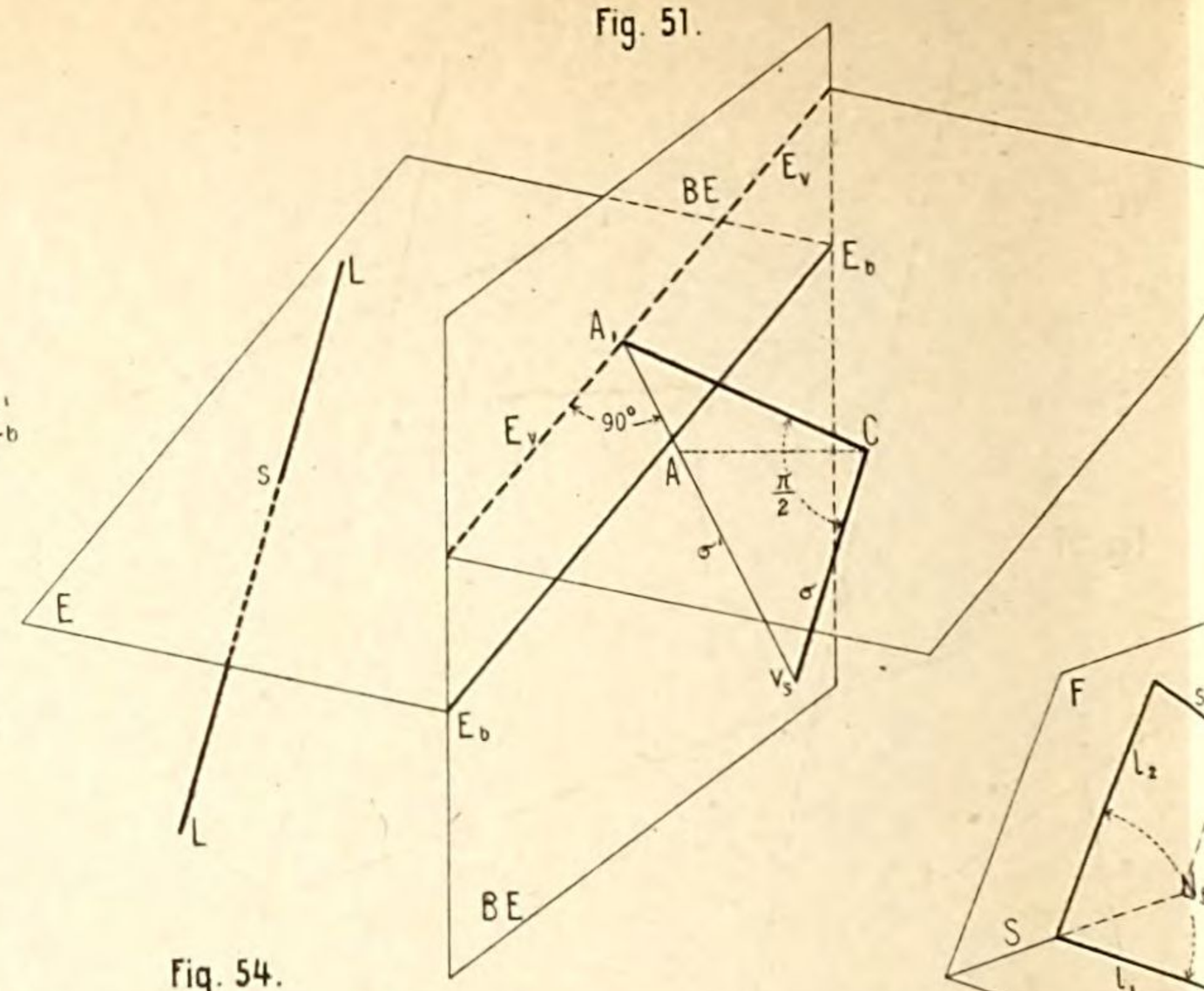


Fig. 54.

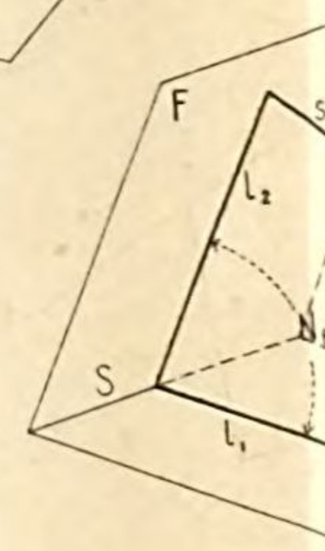


Fig. 52.

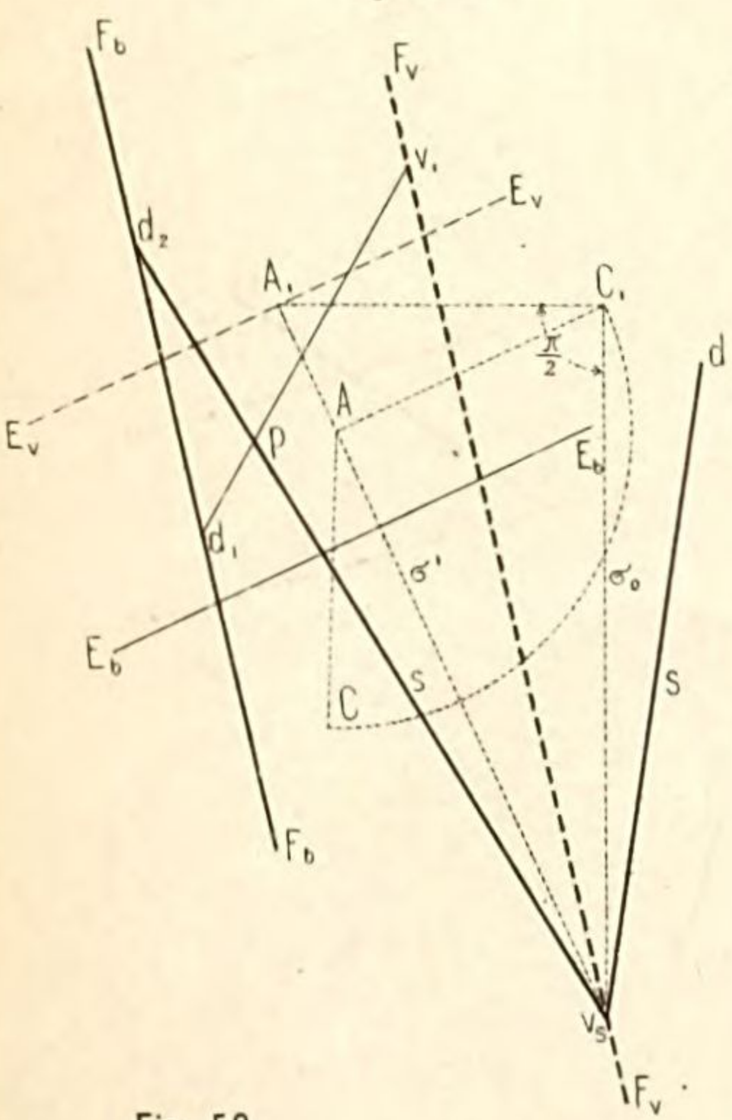


Fig. 50.

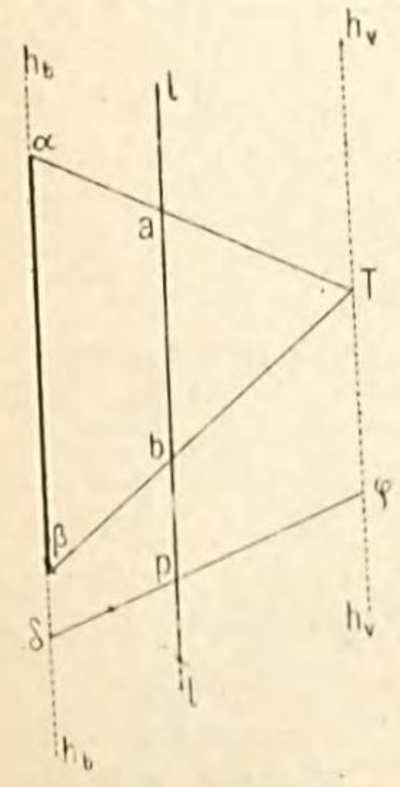


Fig. 53.

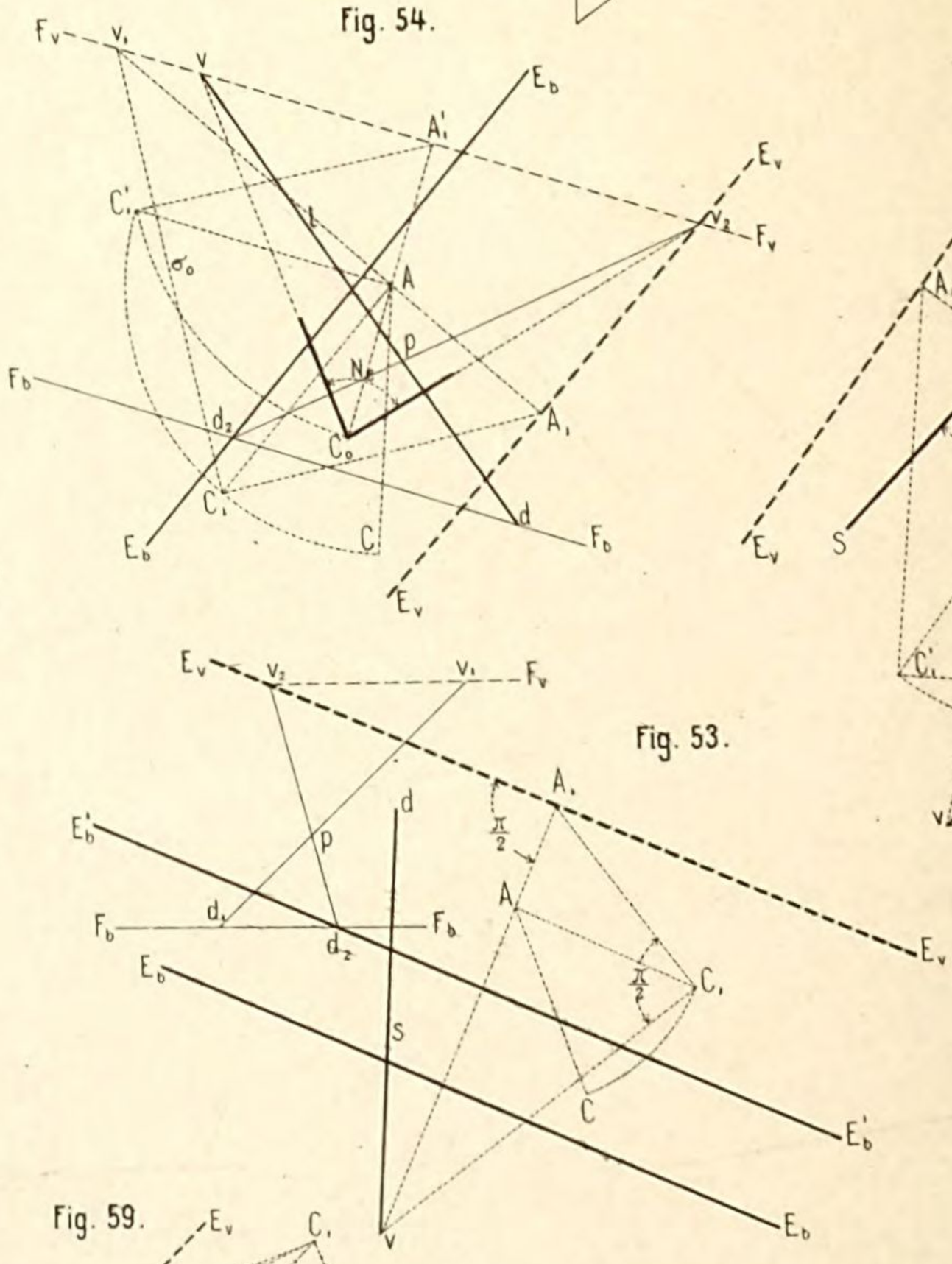


Fig. 55.

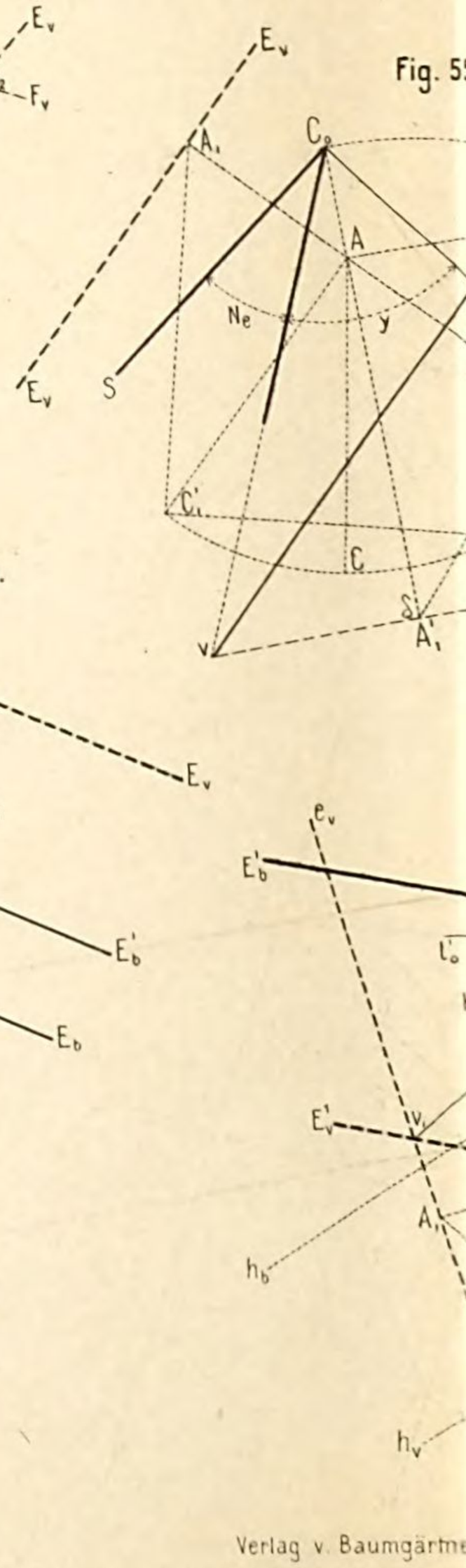
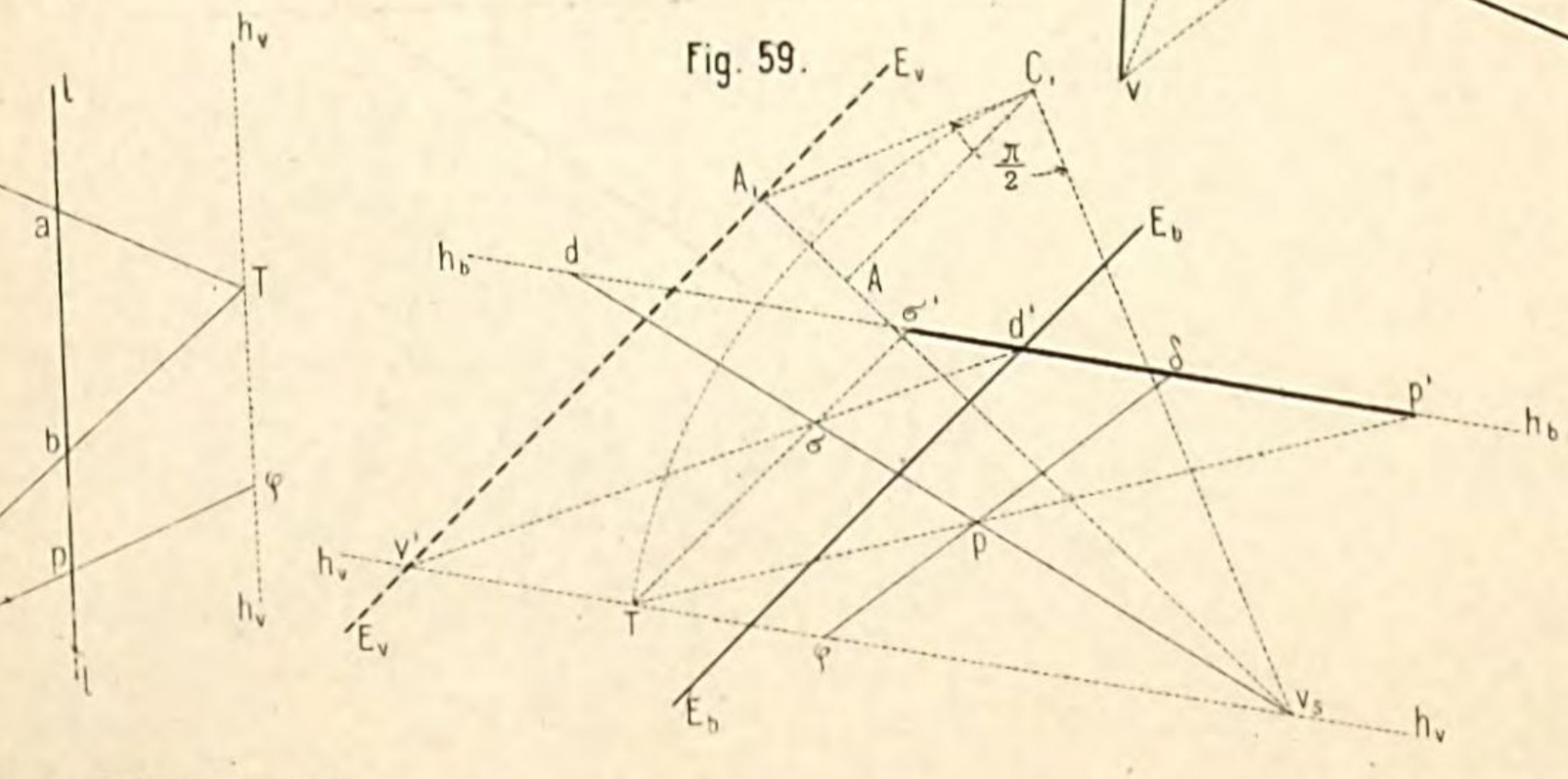


Fig. 59.



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgärtne

Fig. 56.

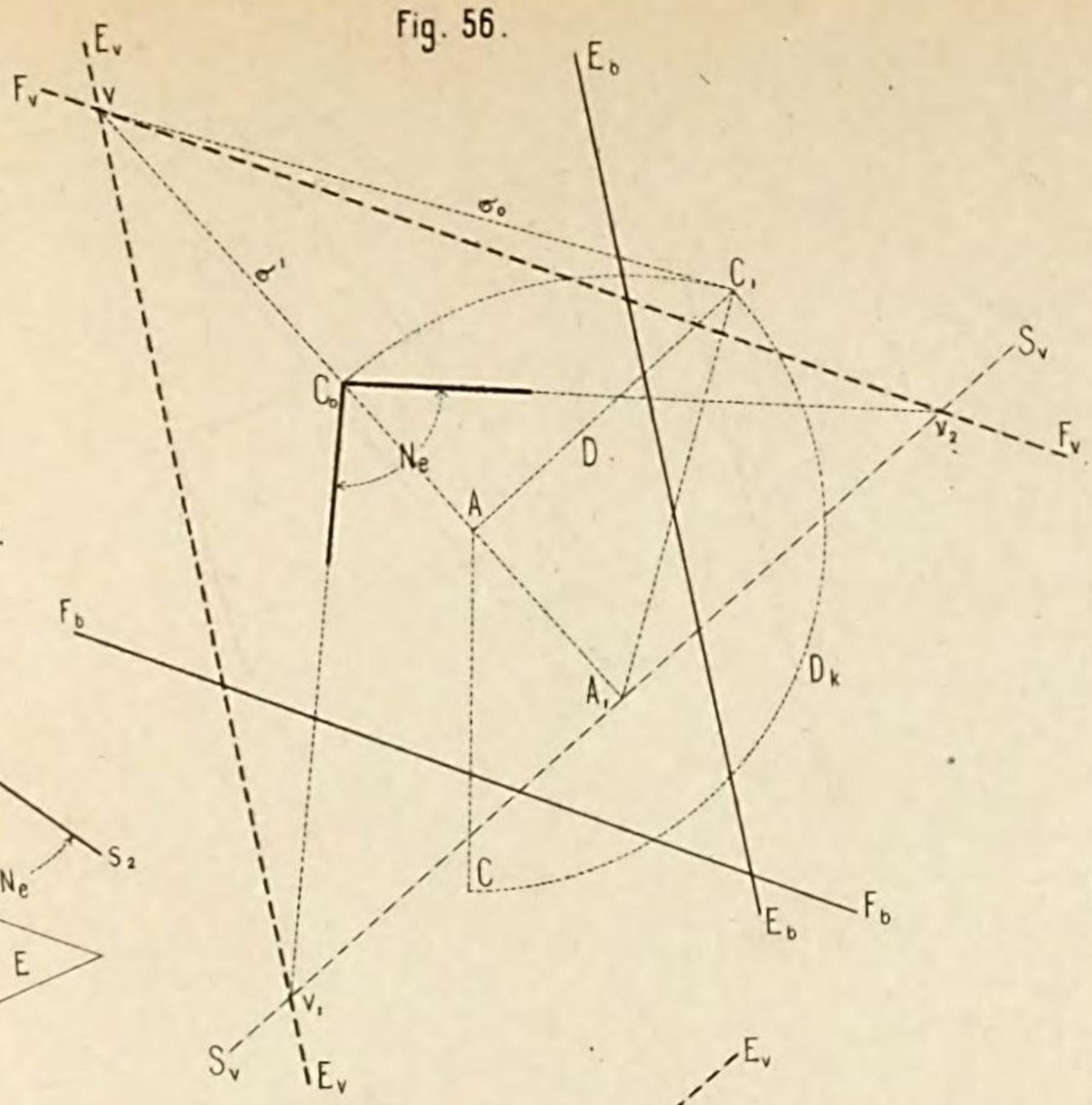


Fig. 57.

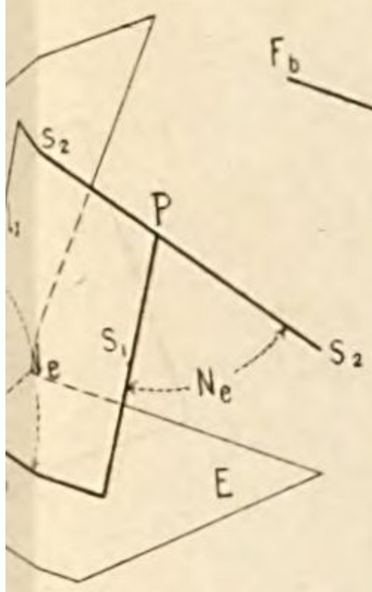


Fig. 61.

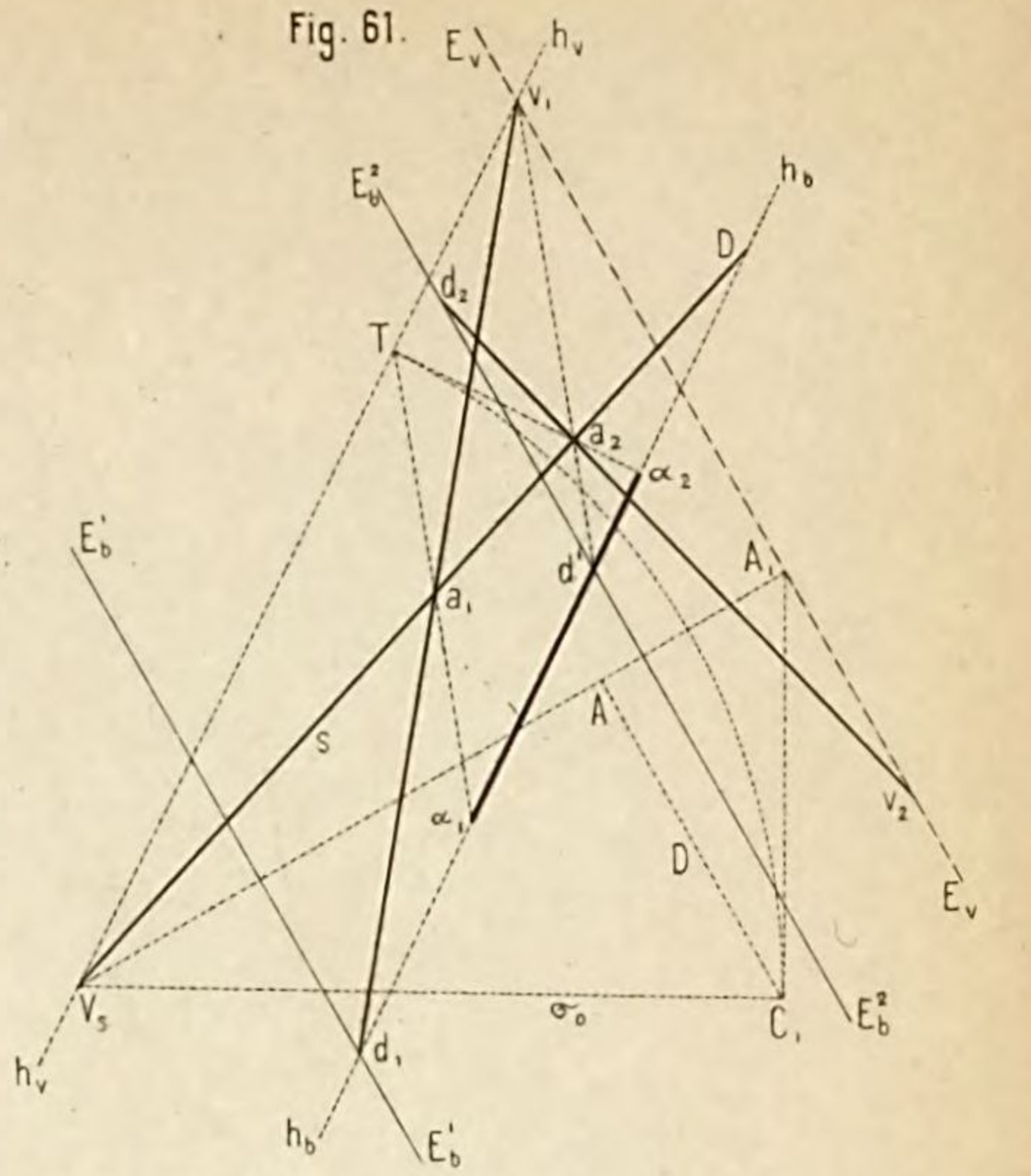


Fig. 55.

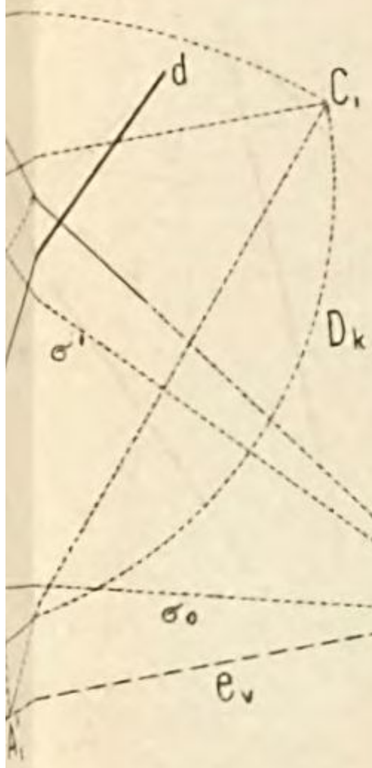


Fig. 58.

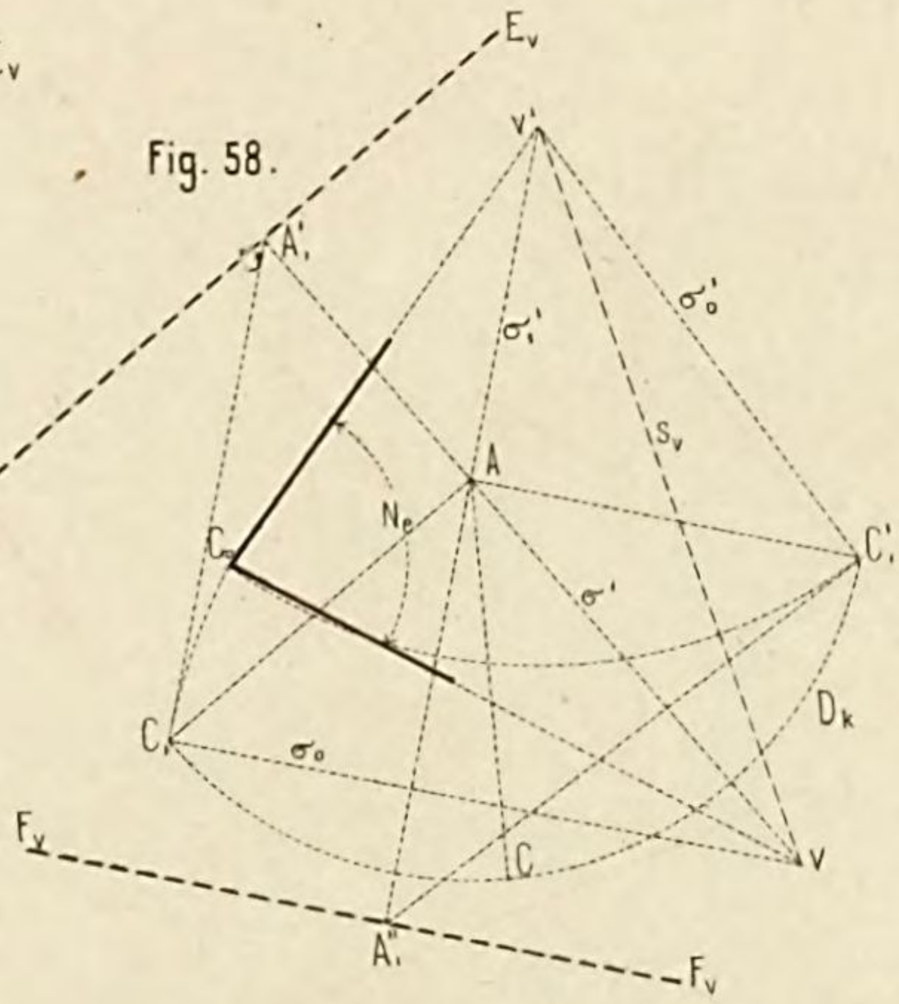


Fig. 60.

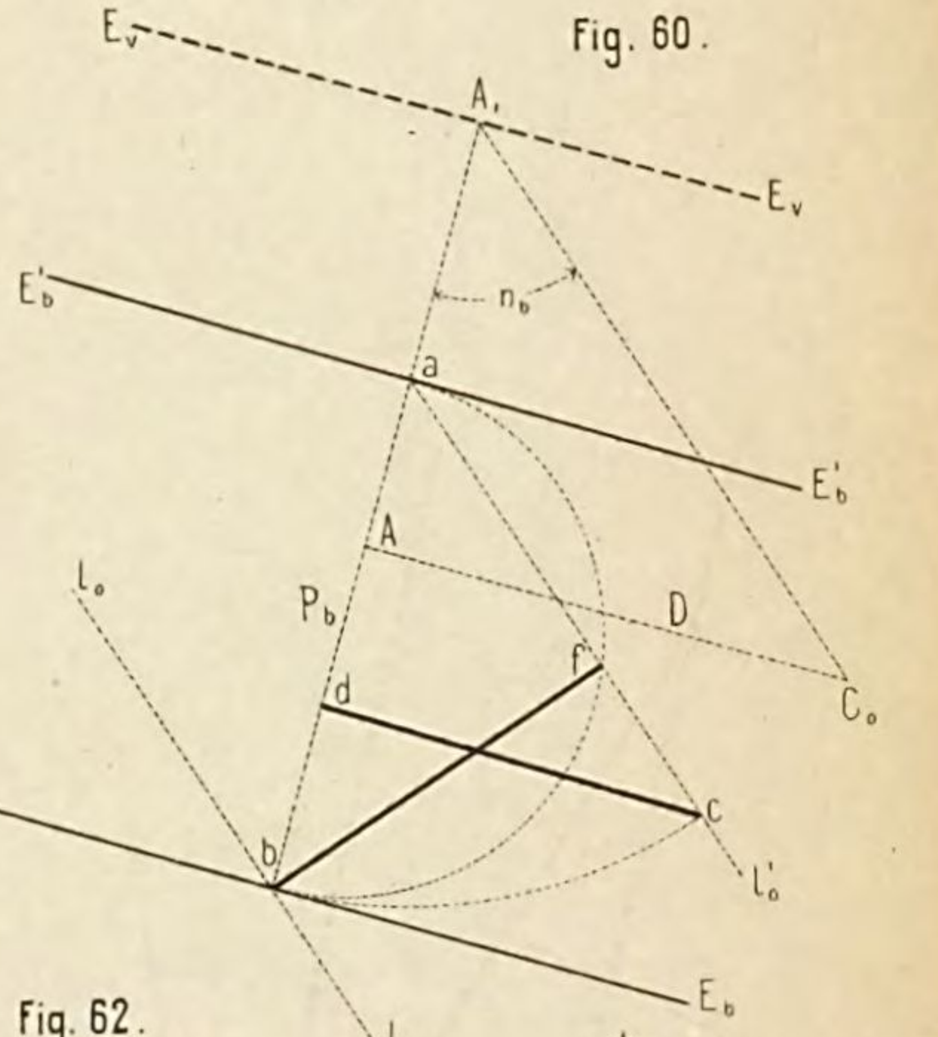
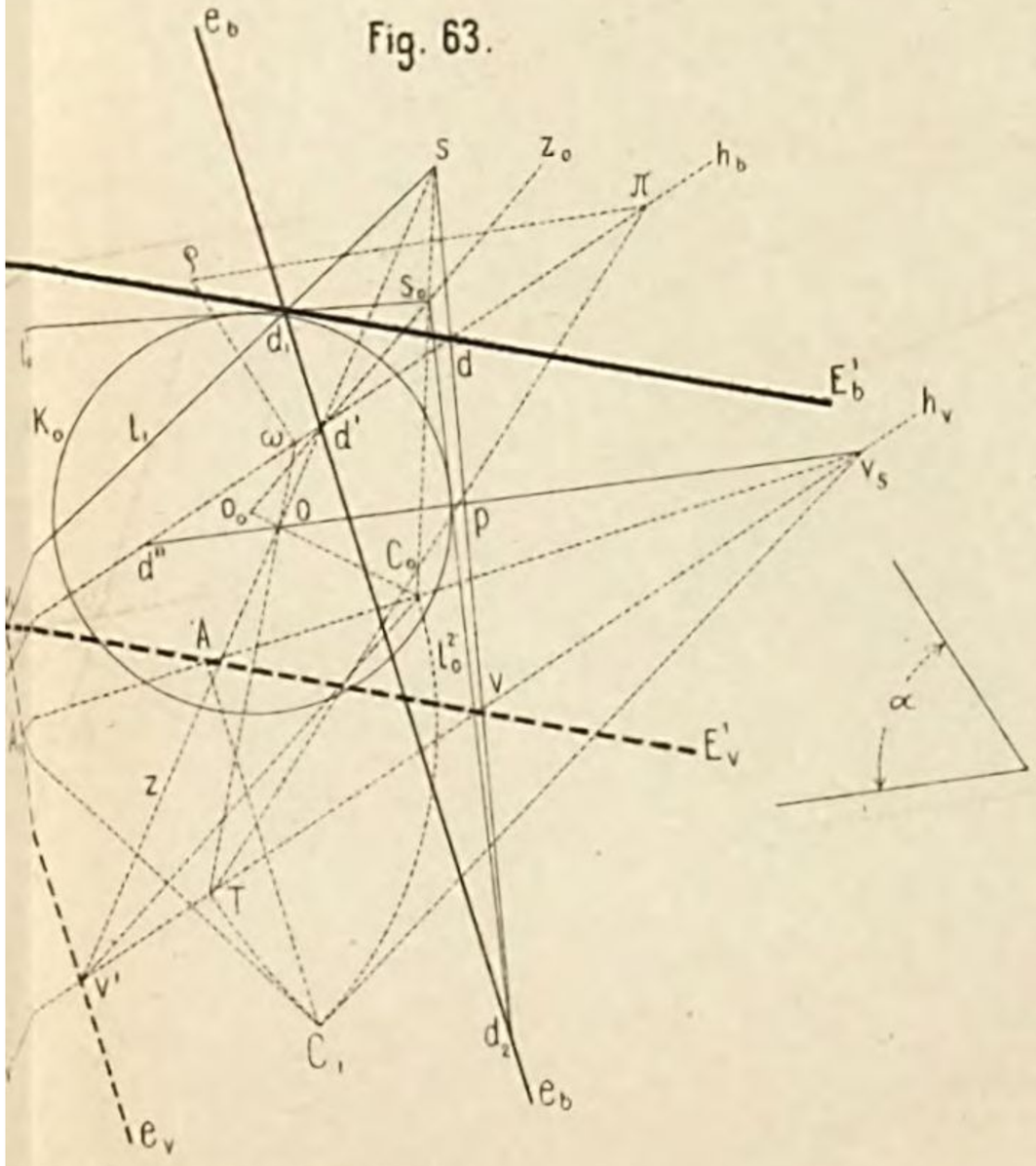
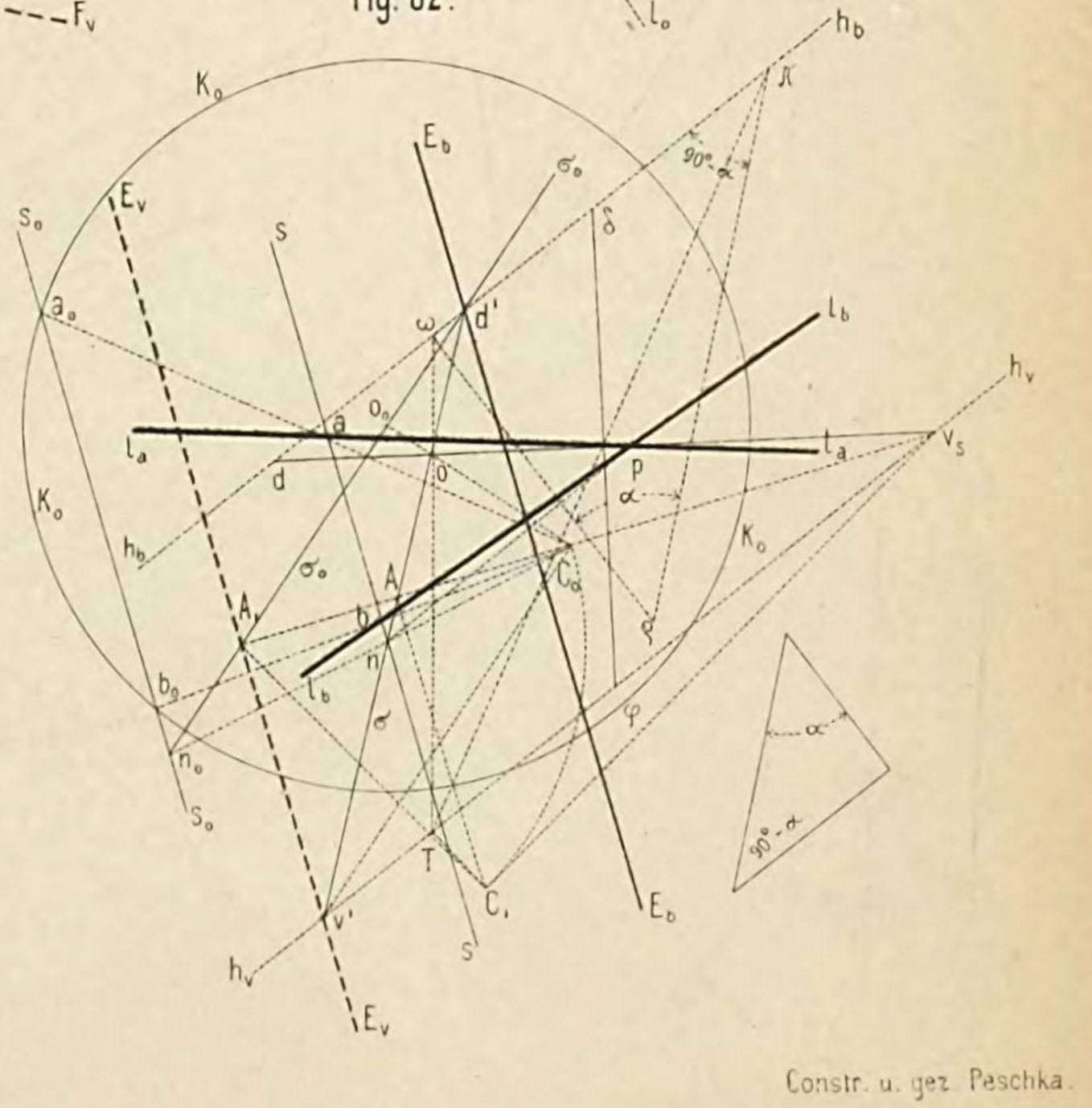


Fig. 62.

Fig. 63.





...er's Buchhandlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka.

Fig. 64.

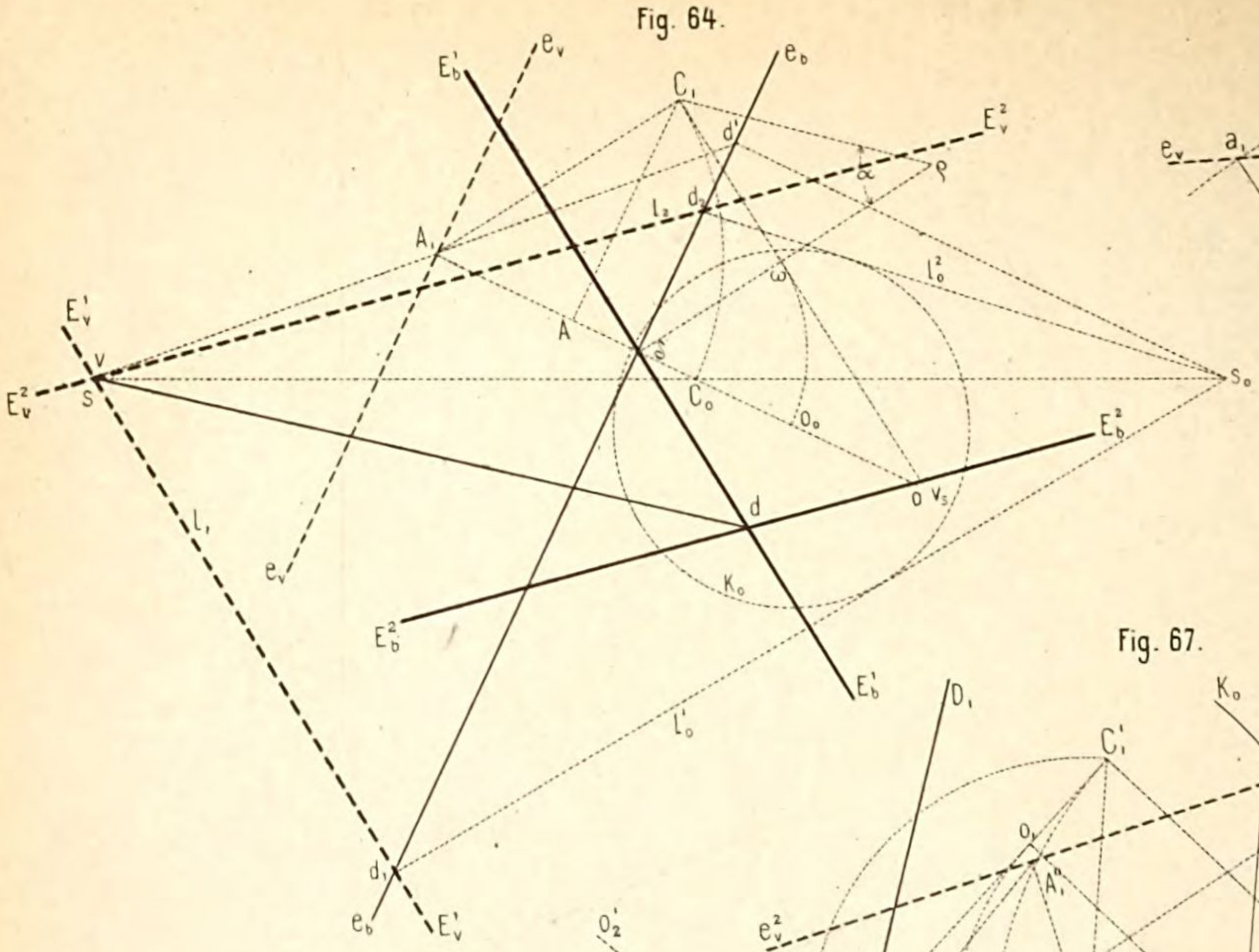


Fig. 65.

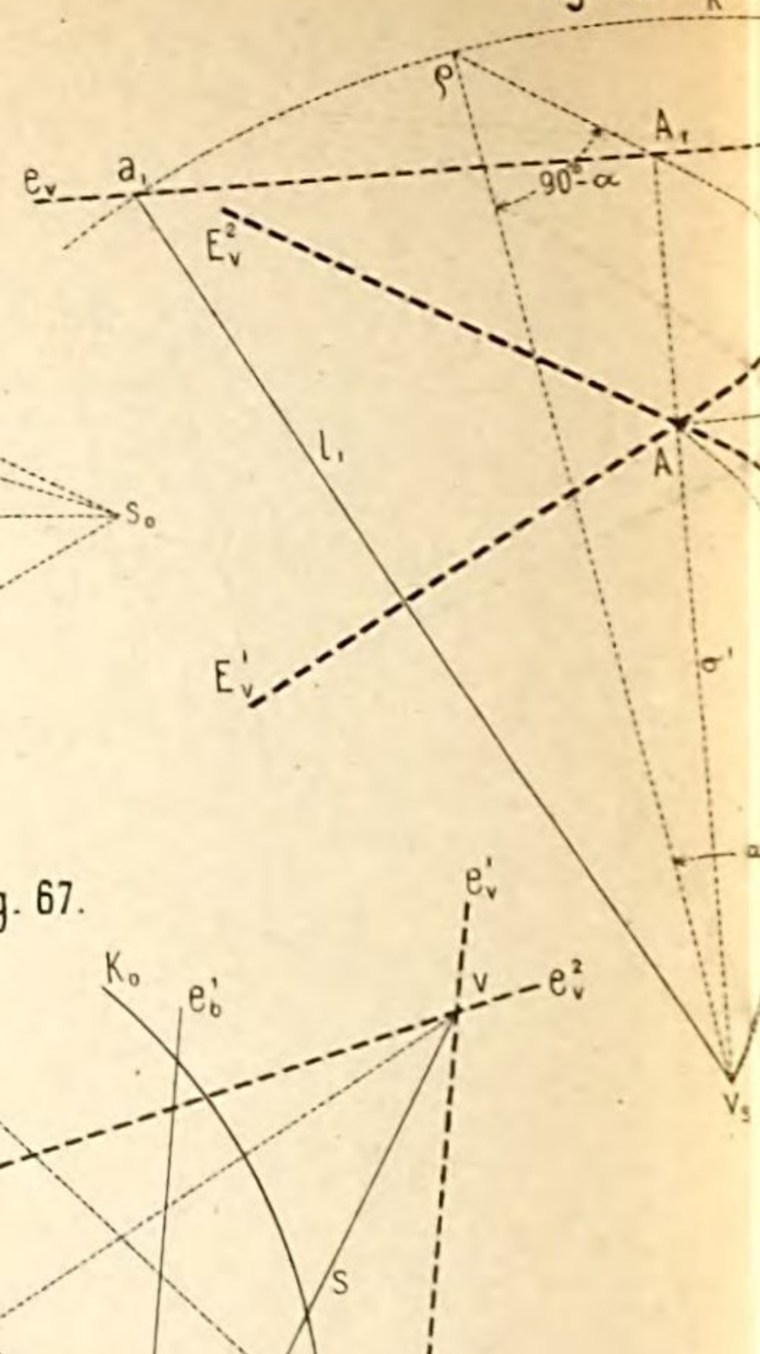


Fig. 67.

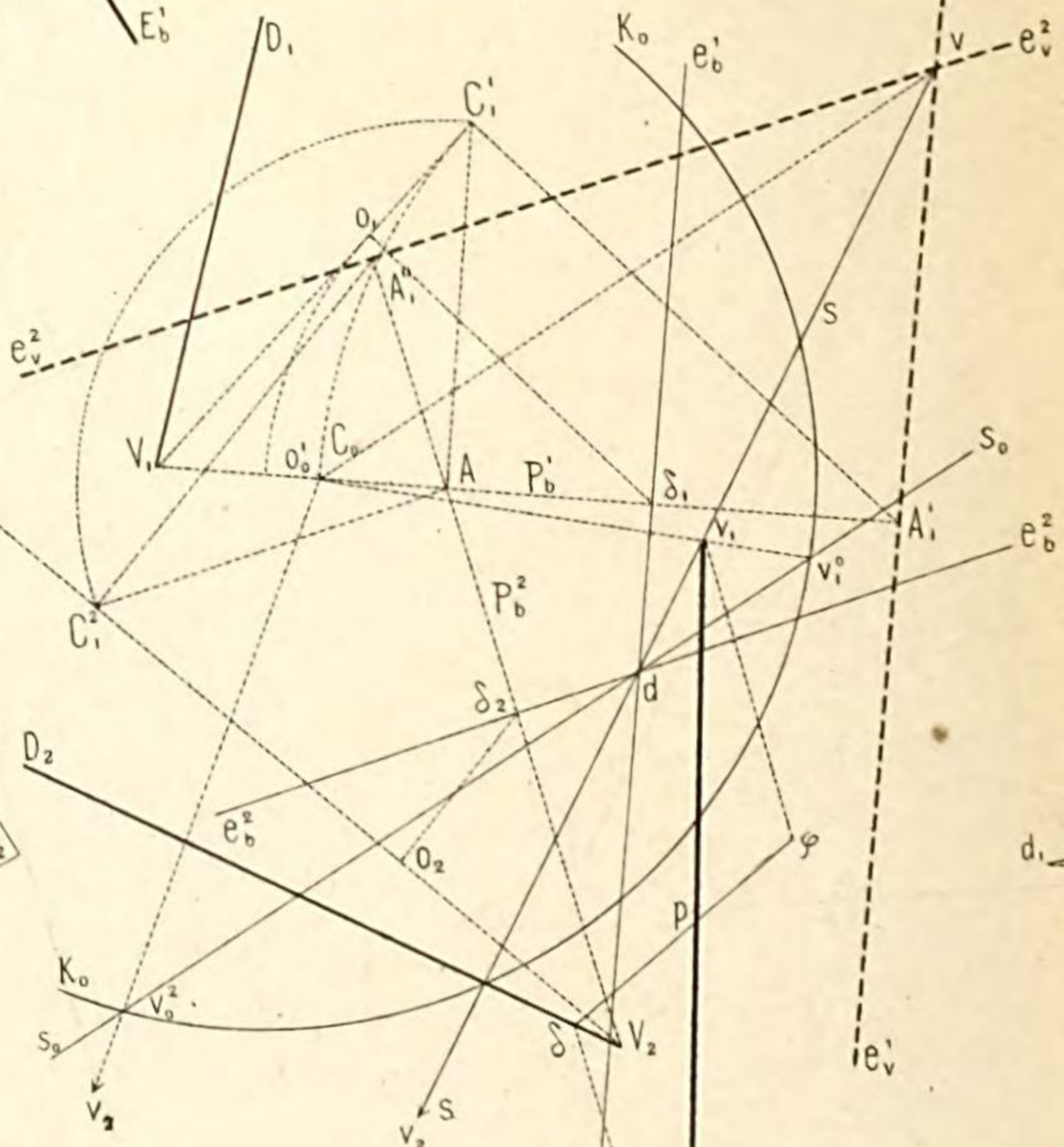
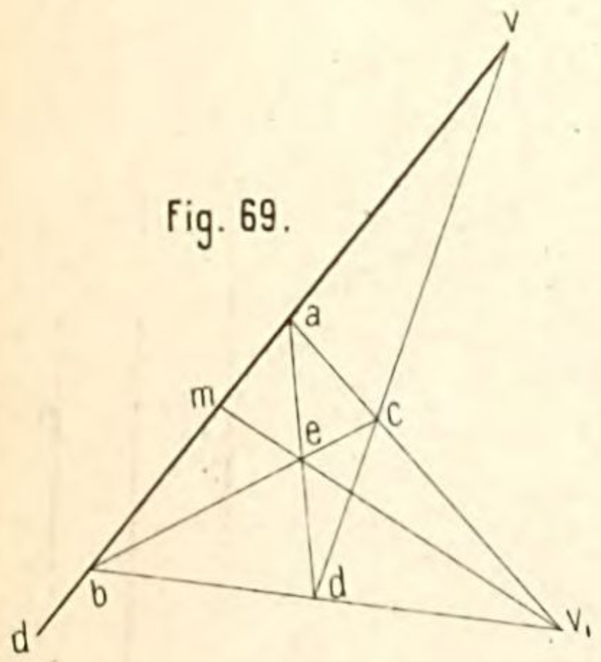


Fig. 69.



(zu Fig. 67).

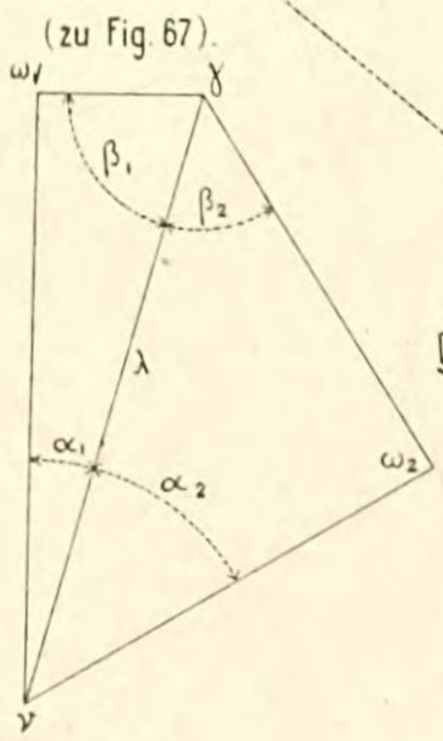
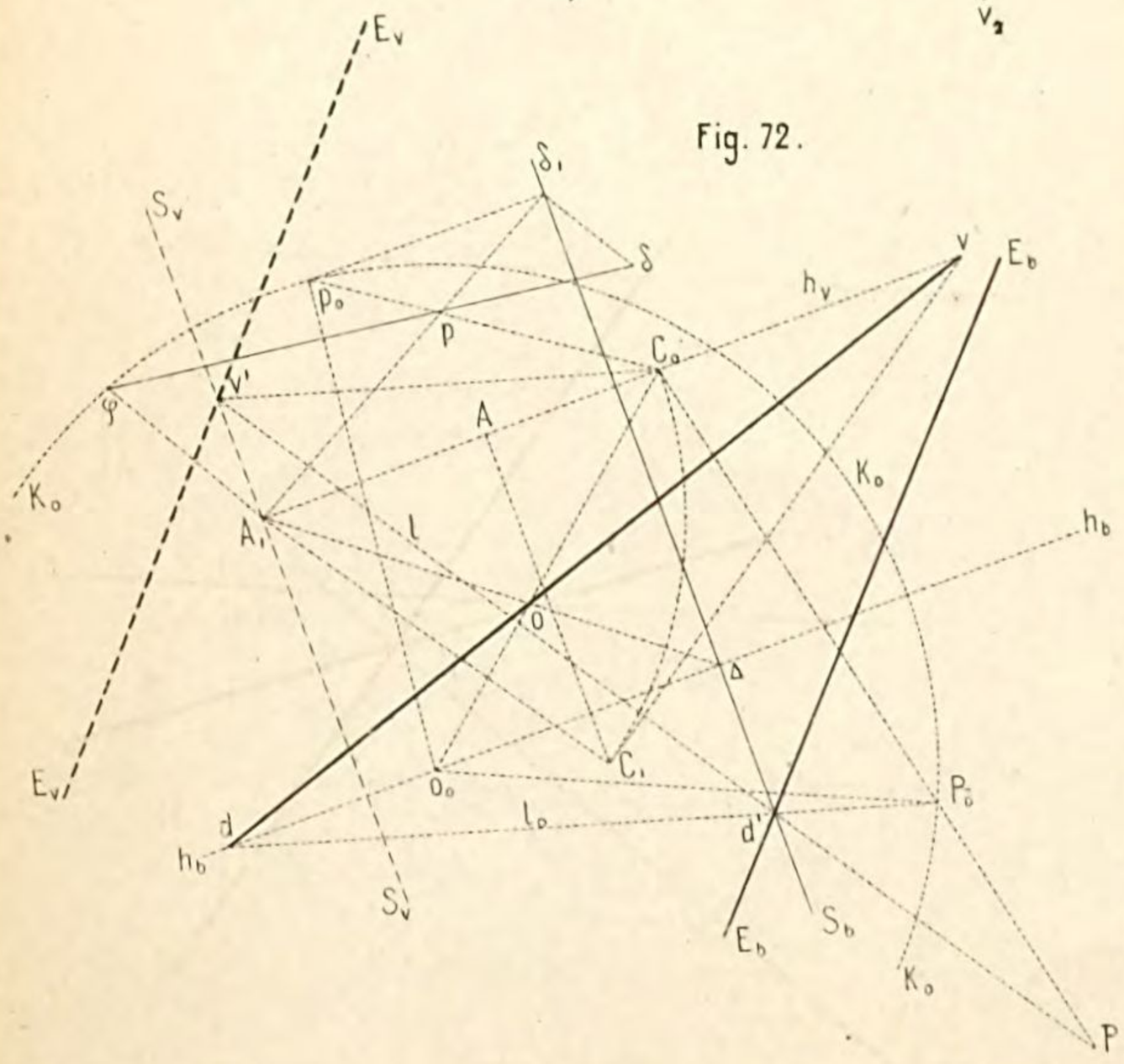
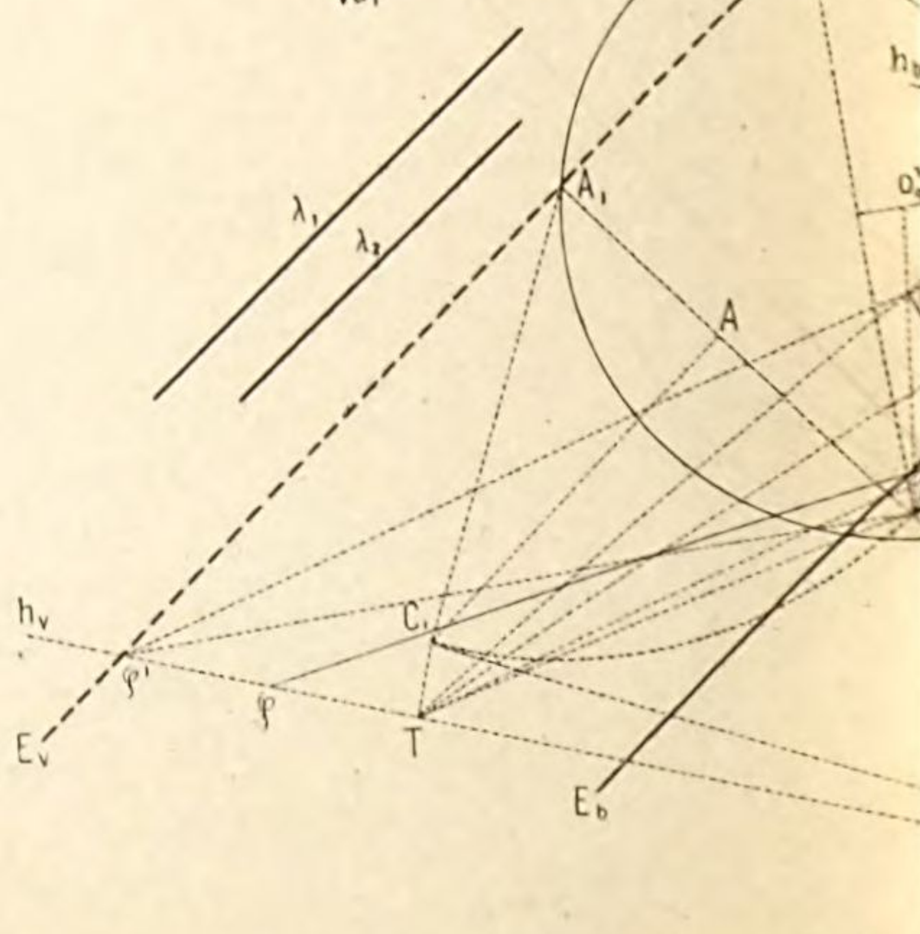


Fig. 72.





Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgärtner's B

Fig. 66.

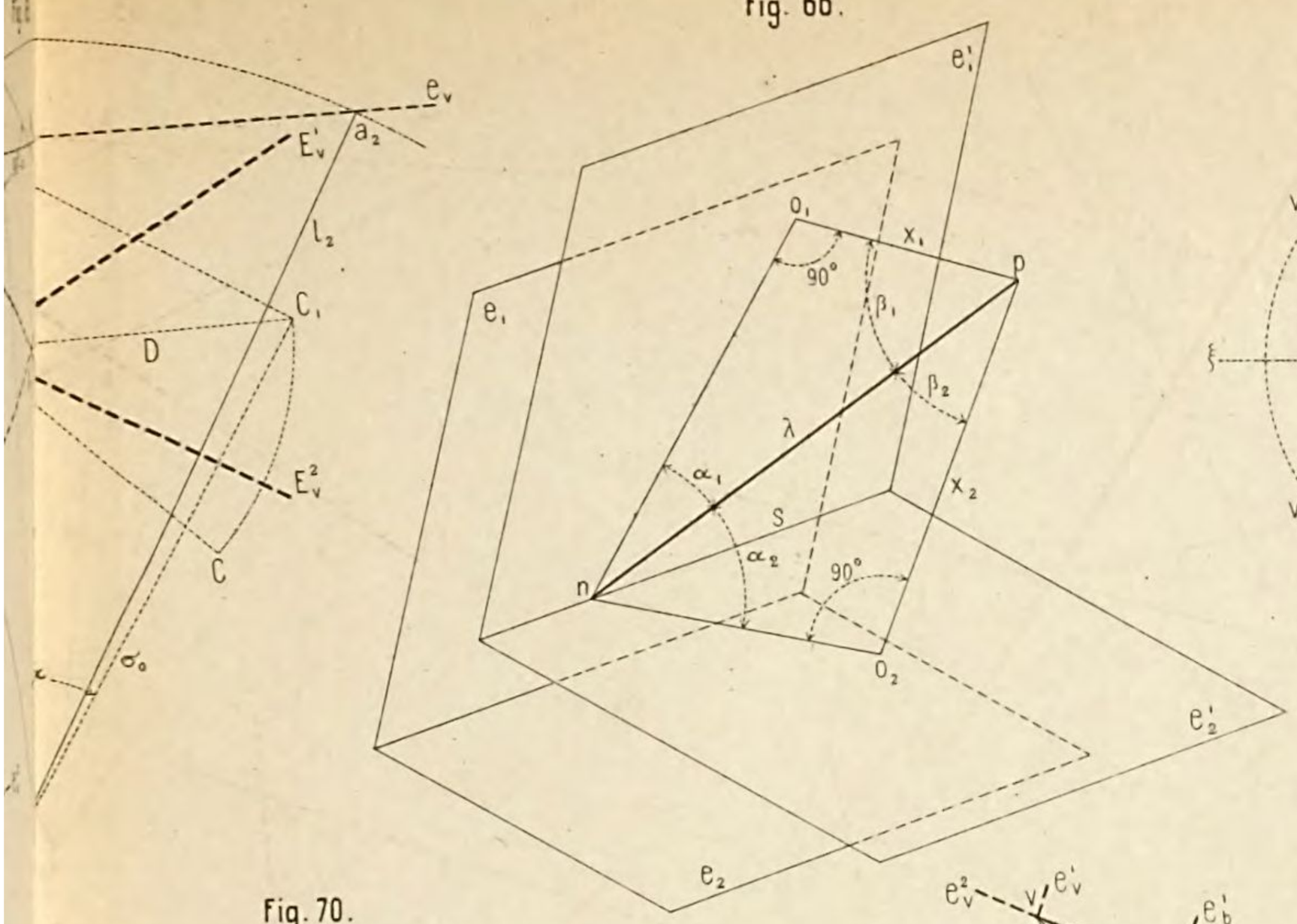


Fig. 68.

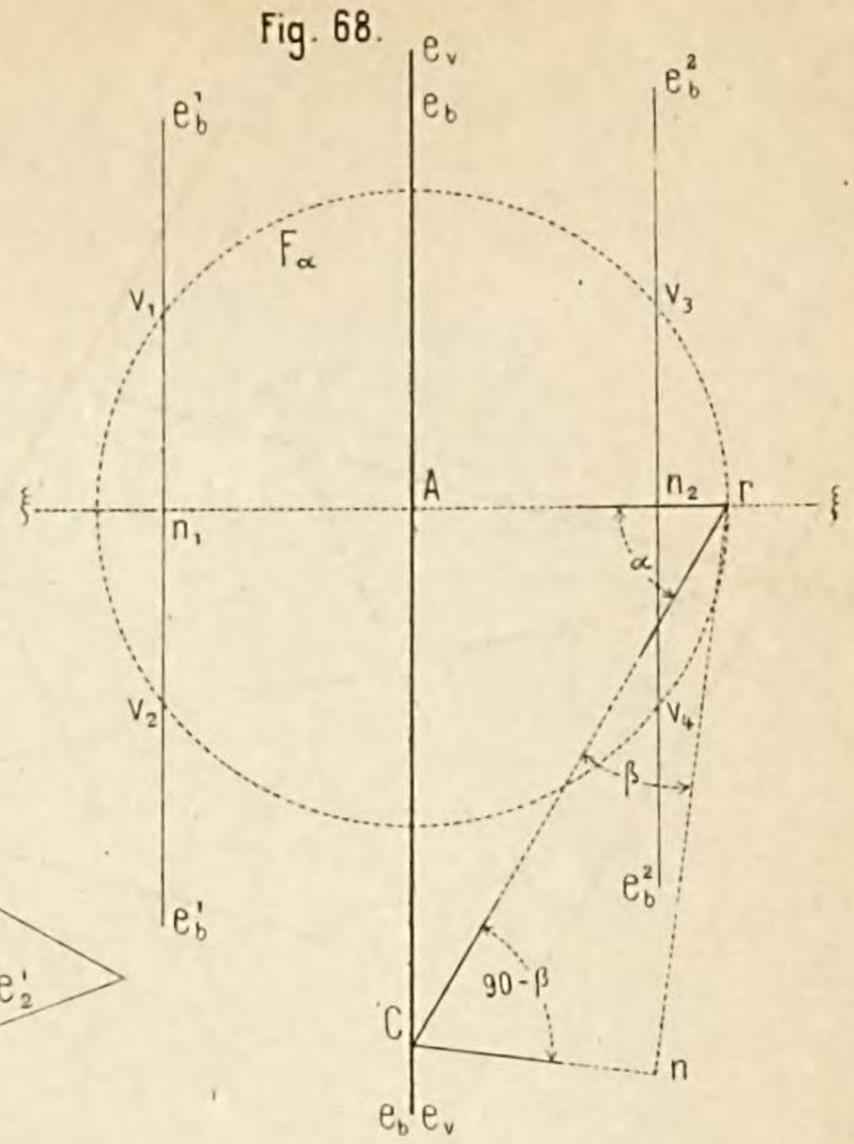


Fig. 70.

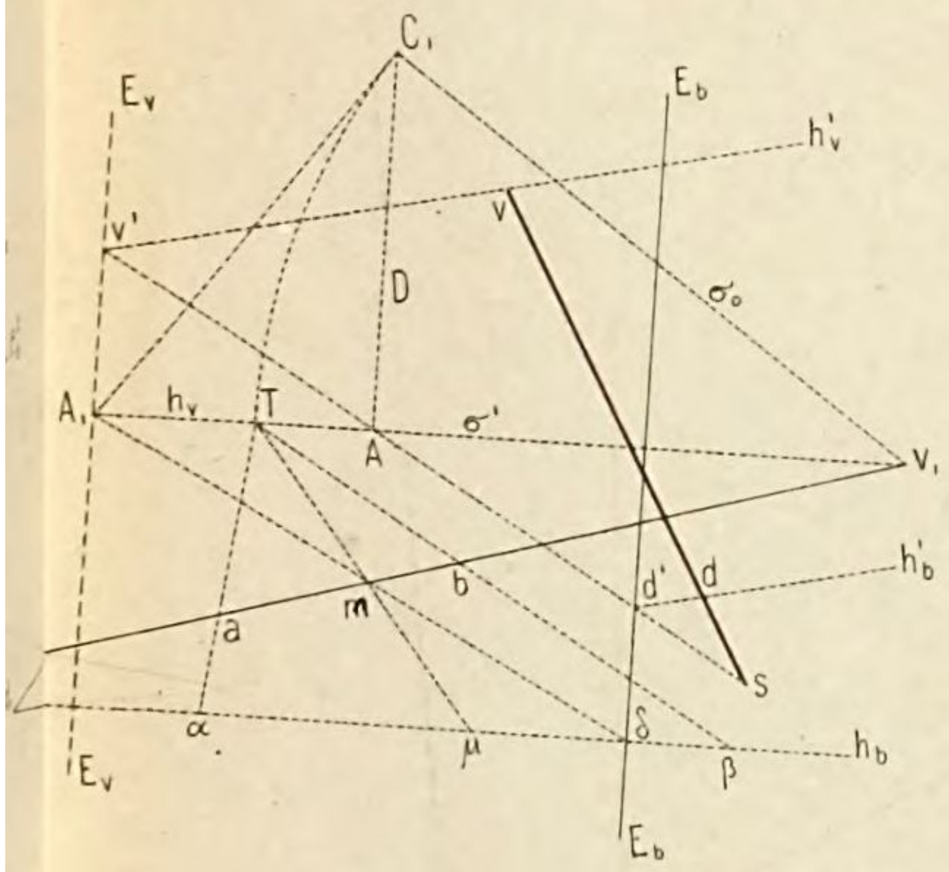


Fig. 71.

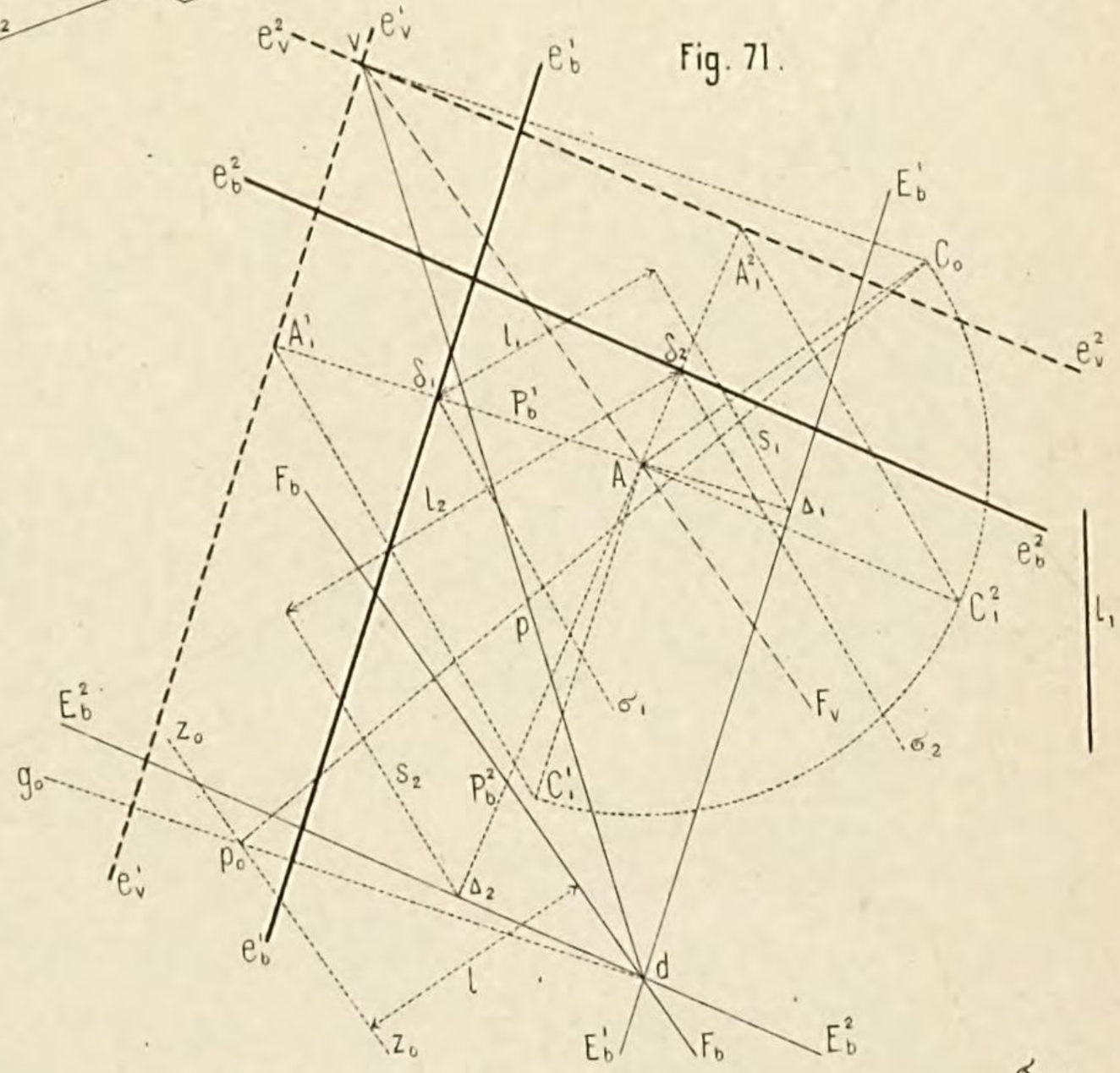


Fig. 74.

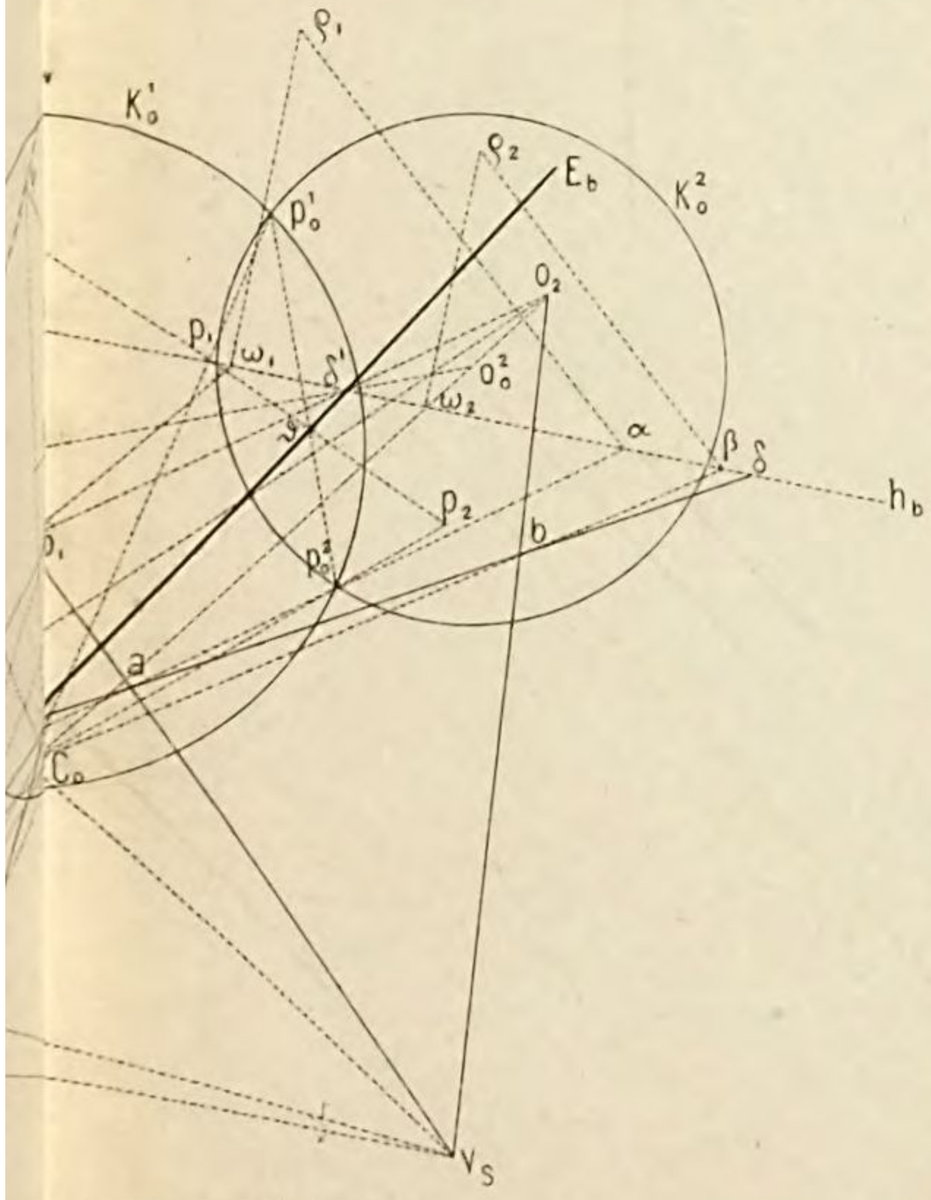
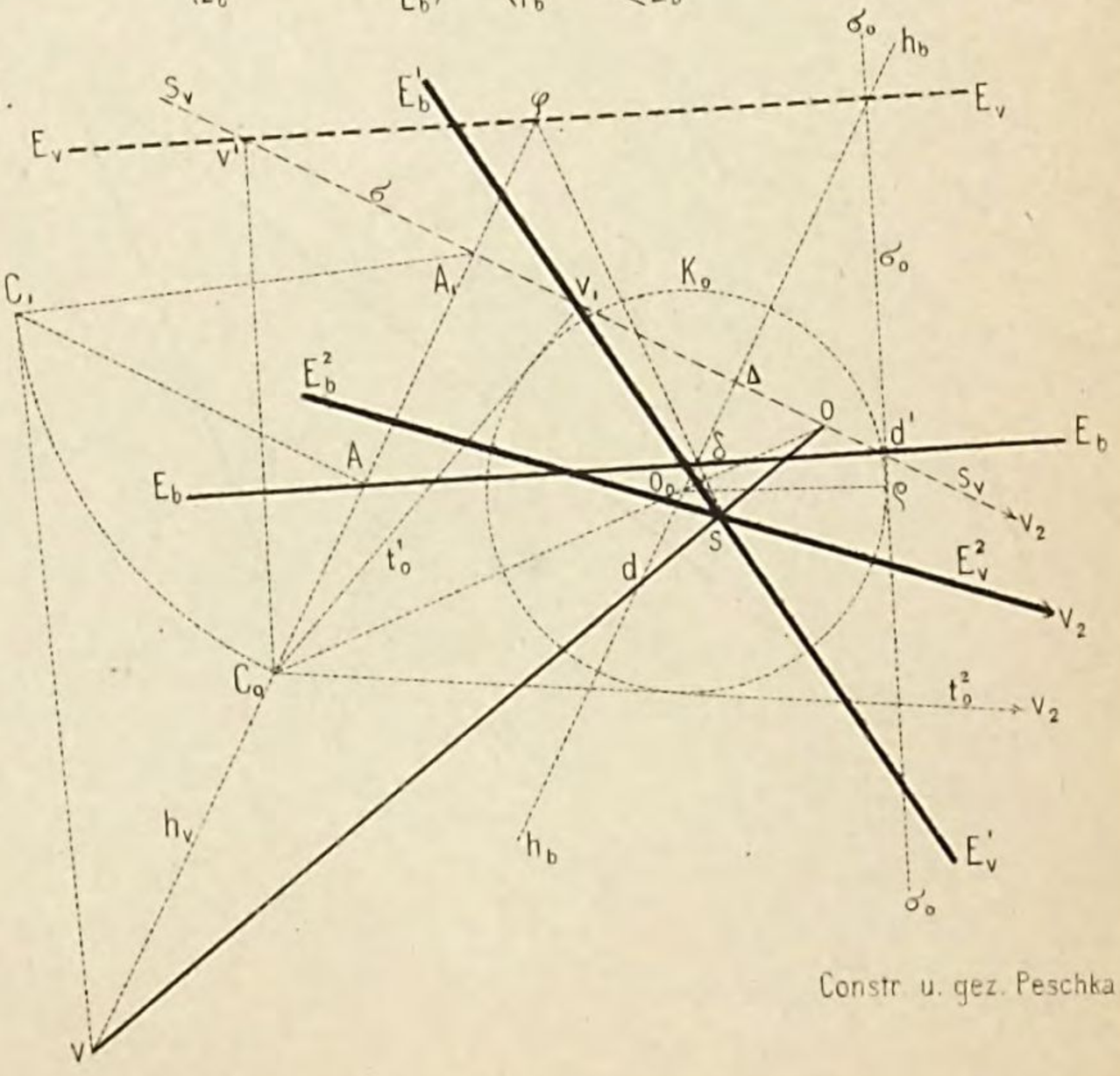


Fig. 73.



uchhandlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka

Fig. 75.

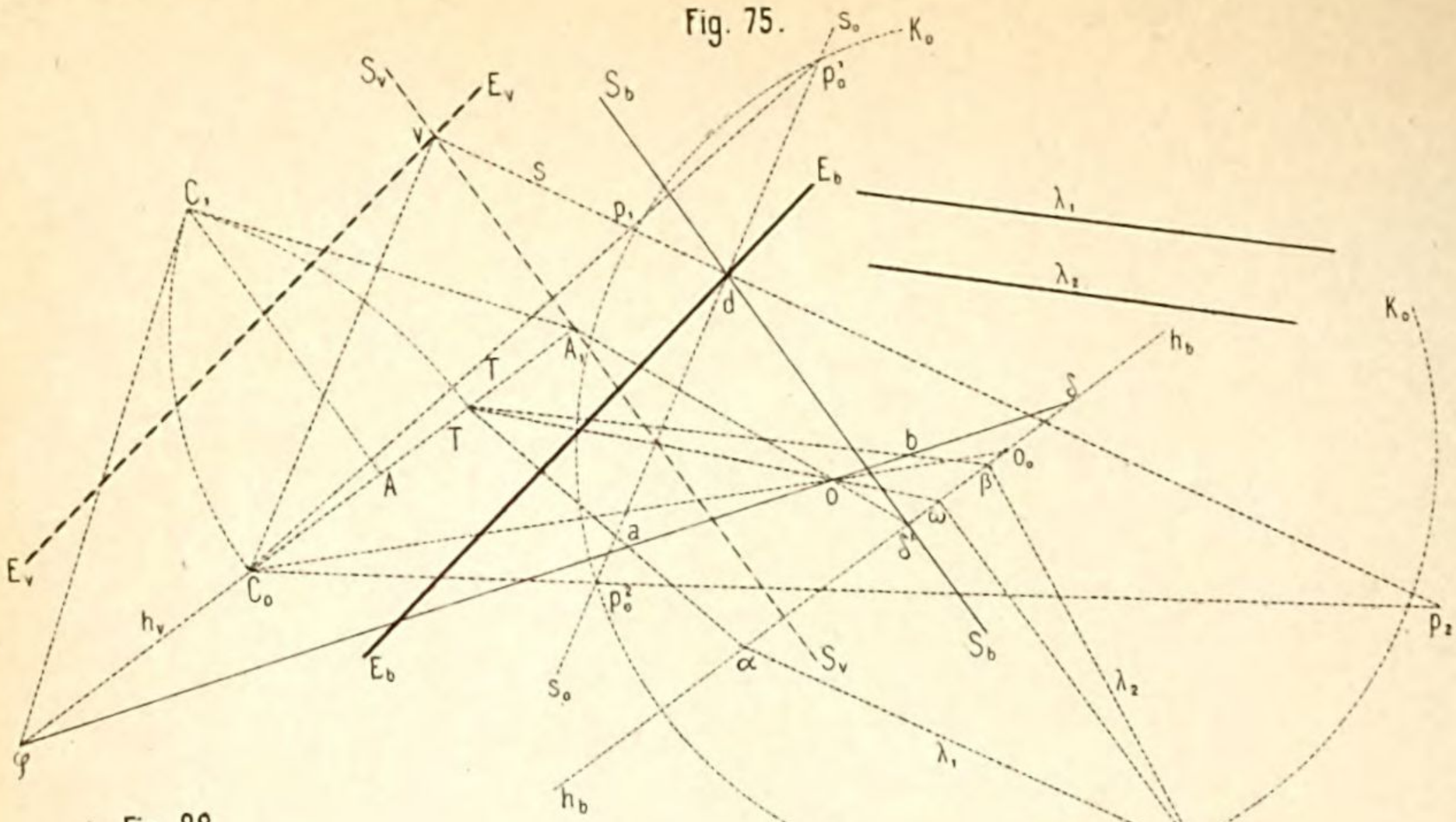


Fig. 82.

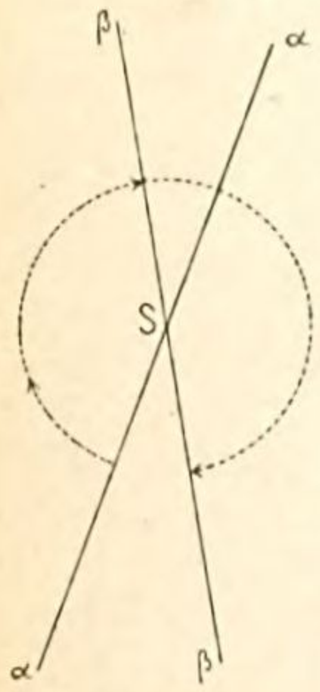


Fig. 83.

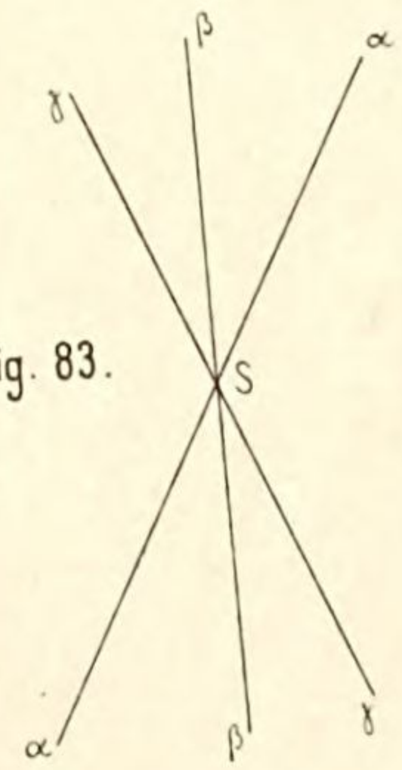


Fig. 84.

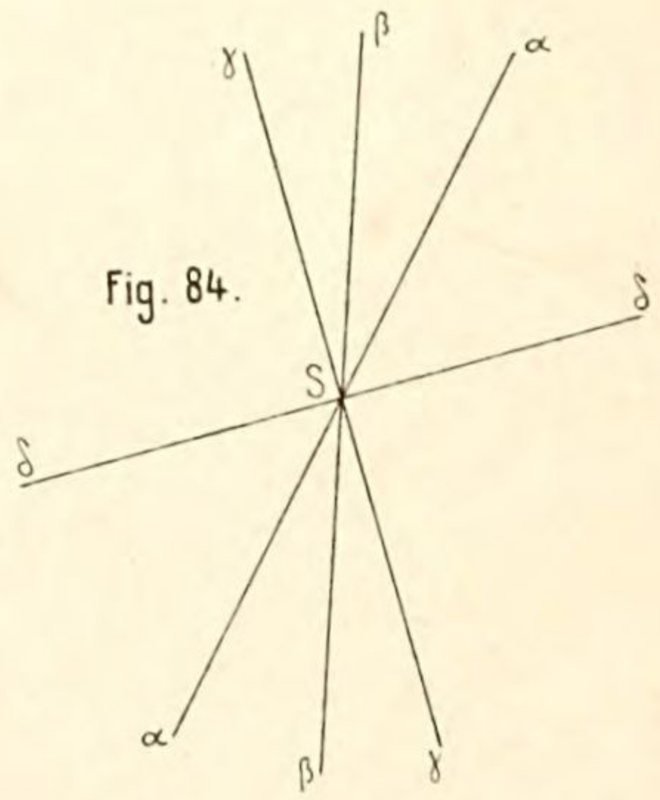


Fig. 85.

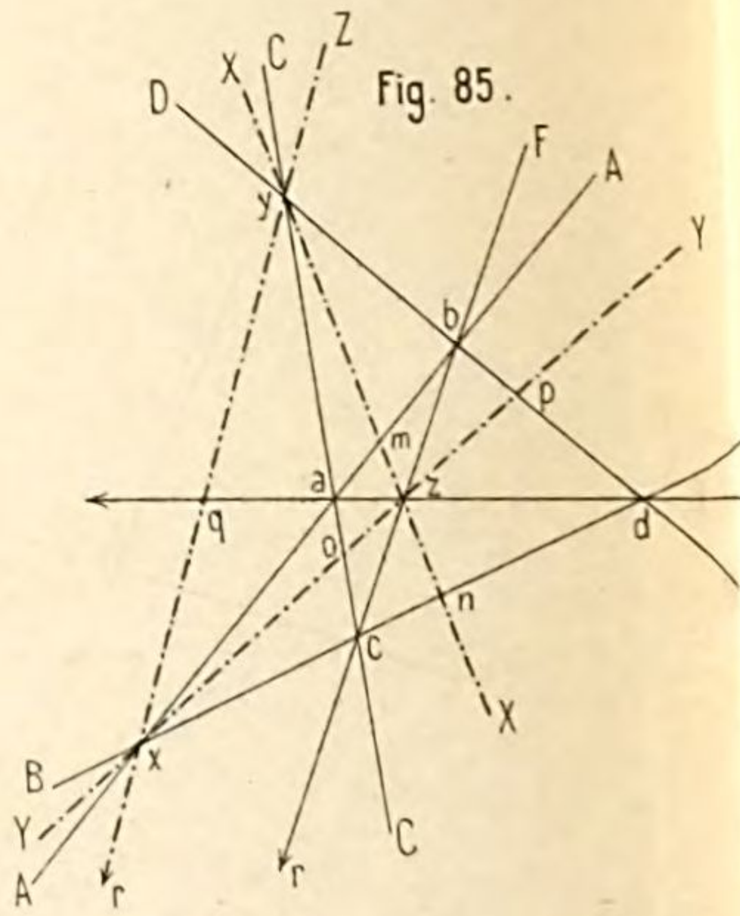


Fig. 89.

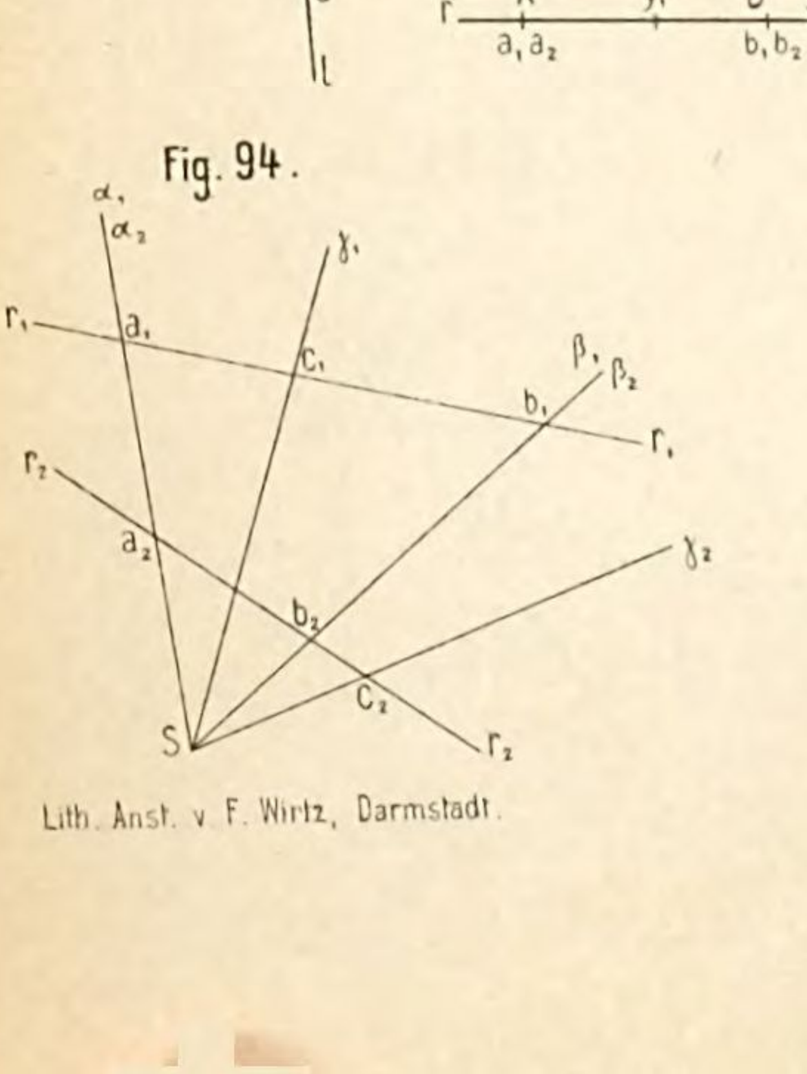


Fig. 90.

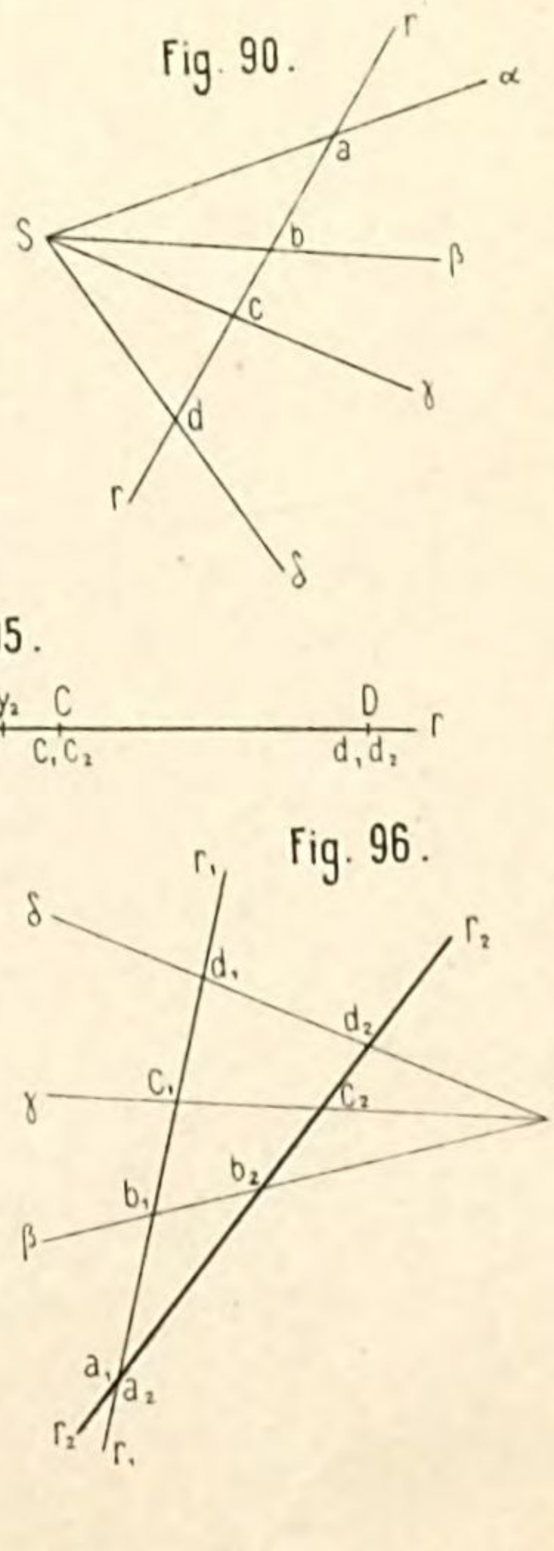


Fig. 92.

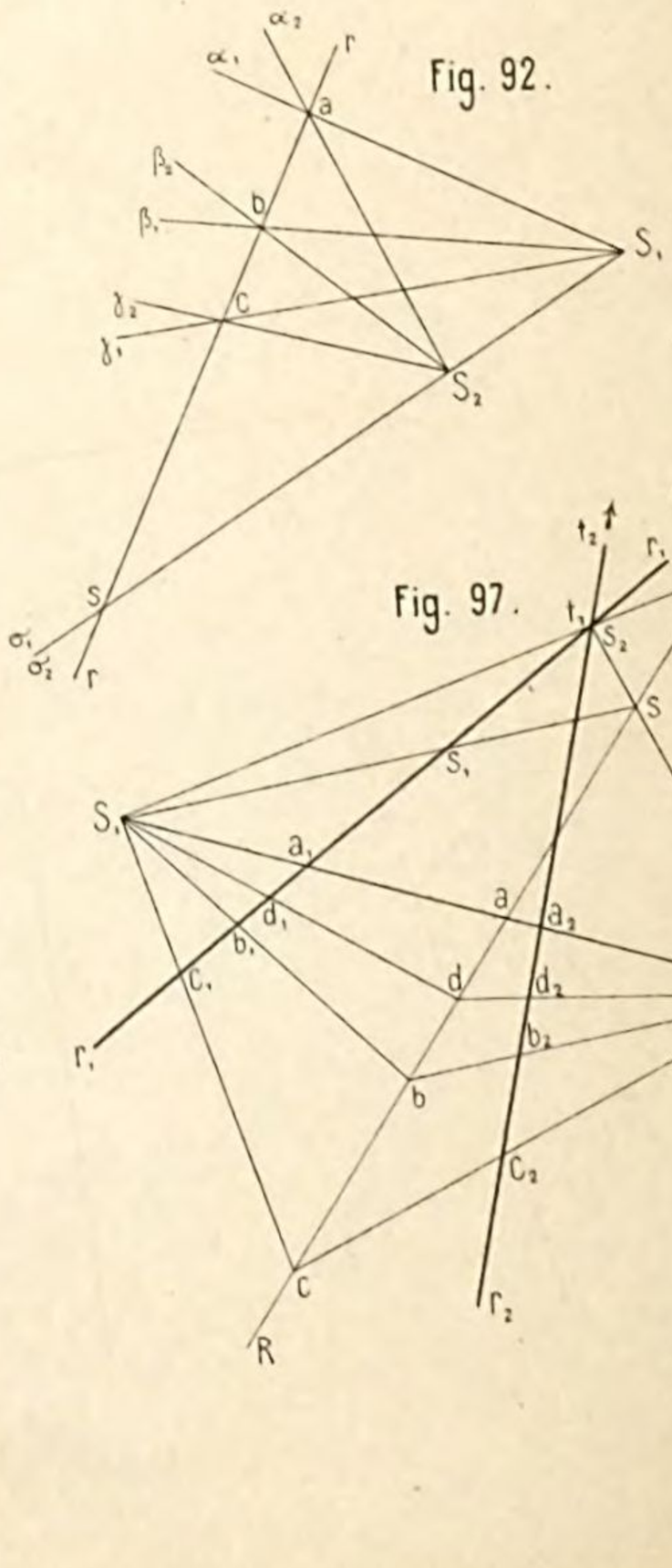


Fig. 95.

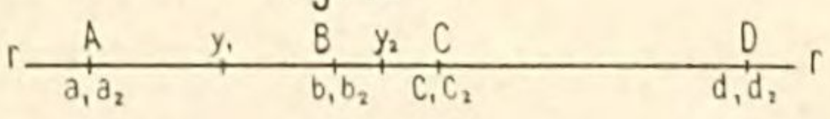


Fig. 96.

Fig. 97.

Fig. 94.

Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgär

Fig. 76.

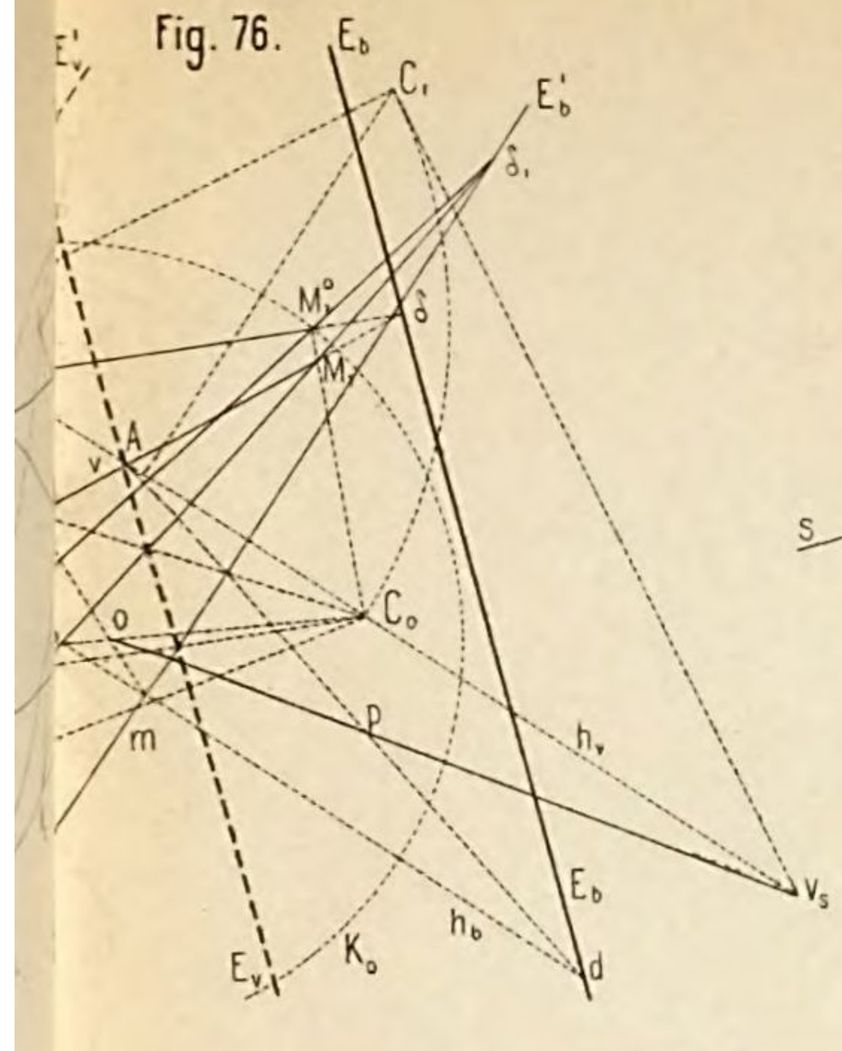


Fig. 77.

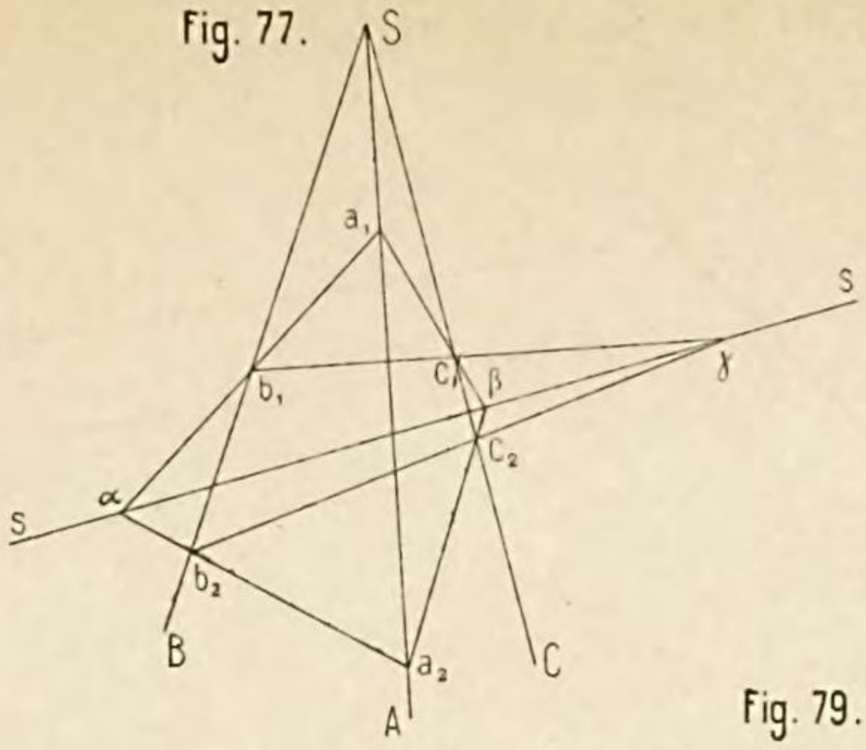


Fig. 78.

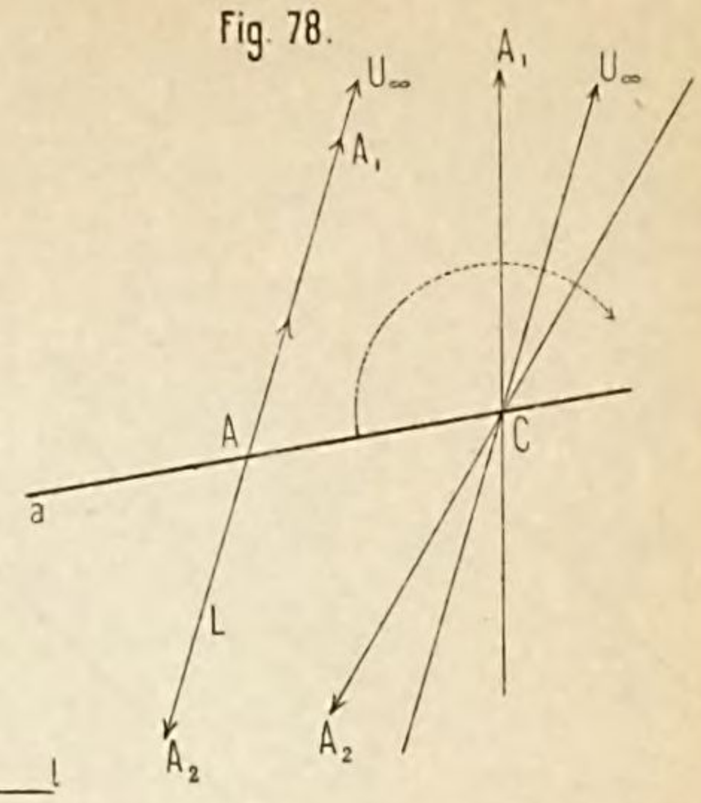


Fig. 79.

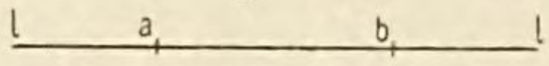


Fig. 80.

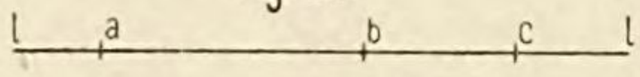


Fig. 81.

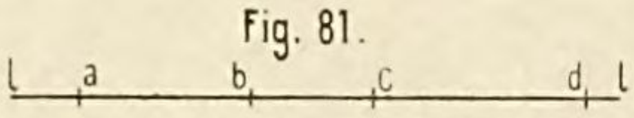


Fig. 86.

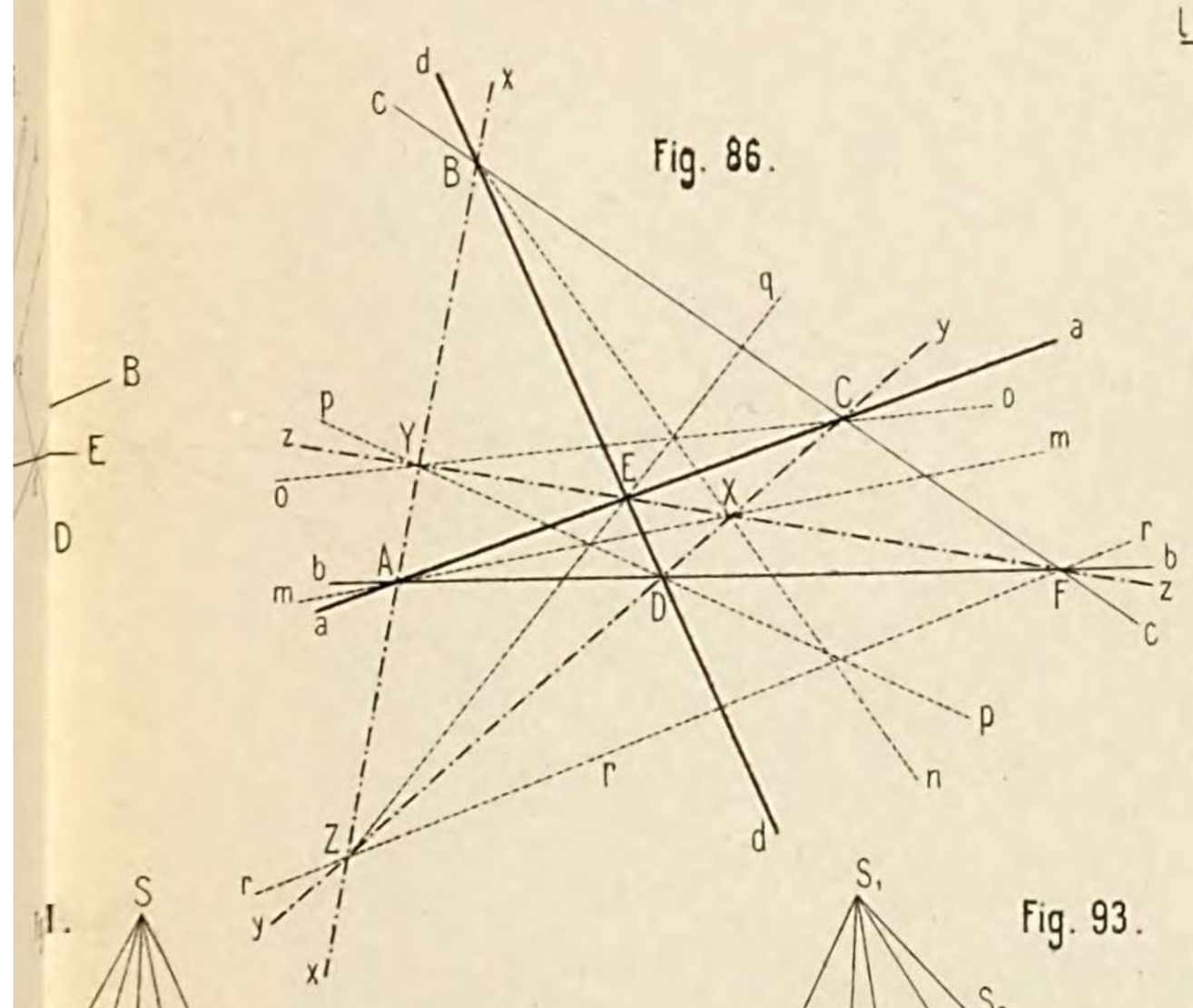


Fig. 87.

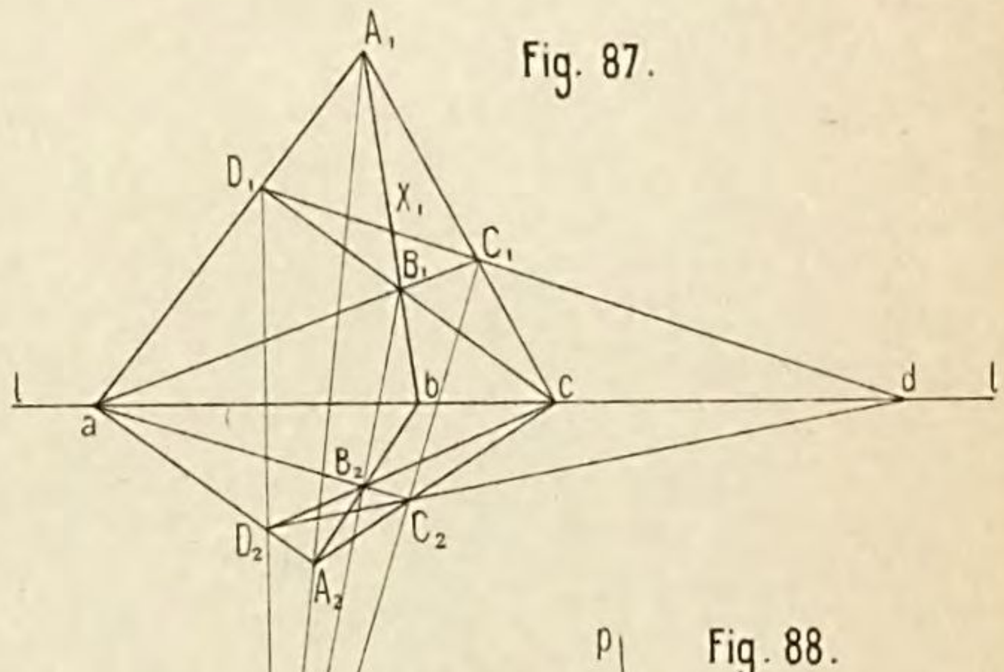


Fig. 88.

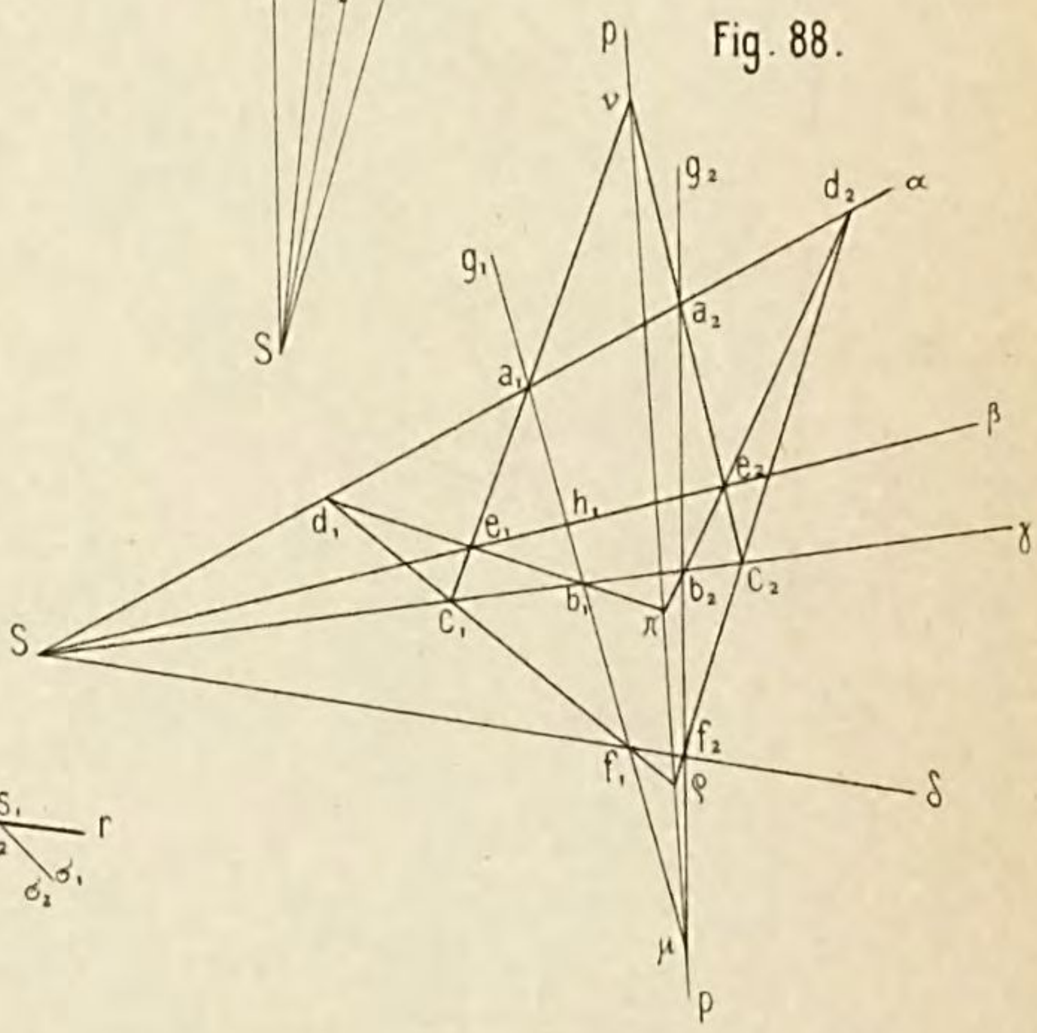


Fig. 93.

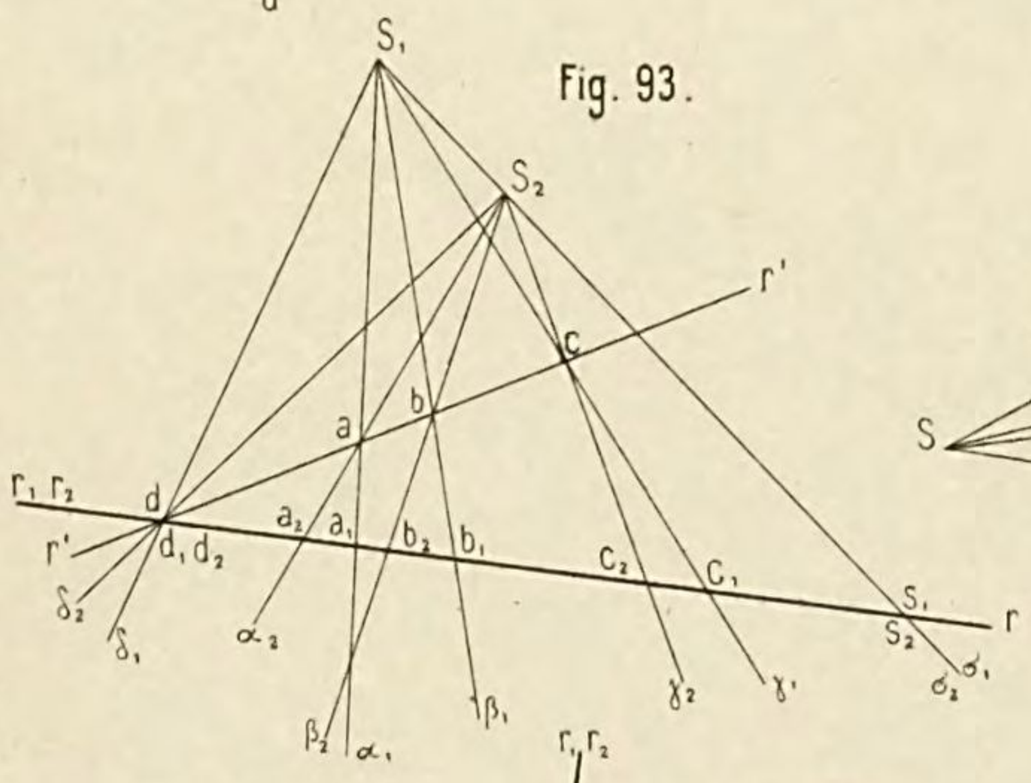


Fig. 98.

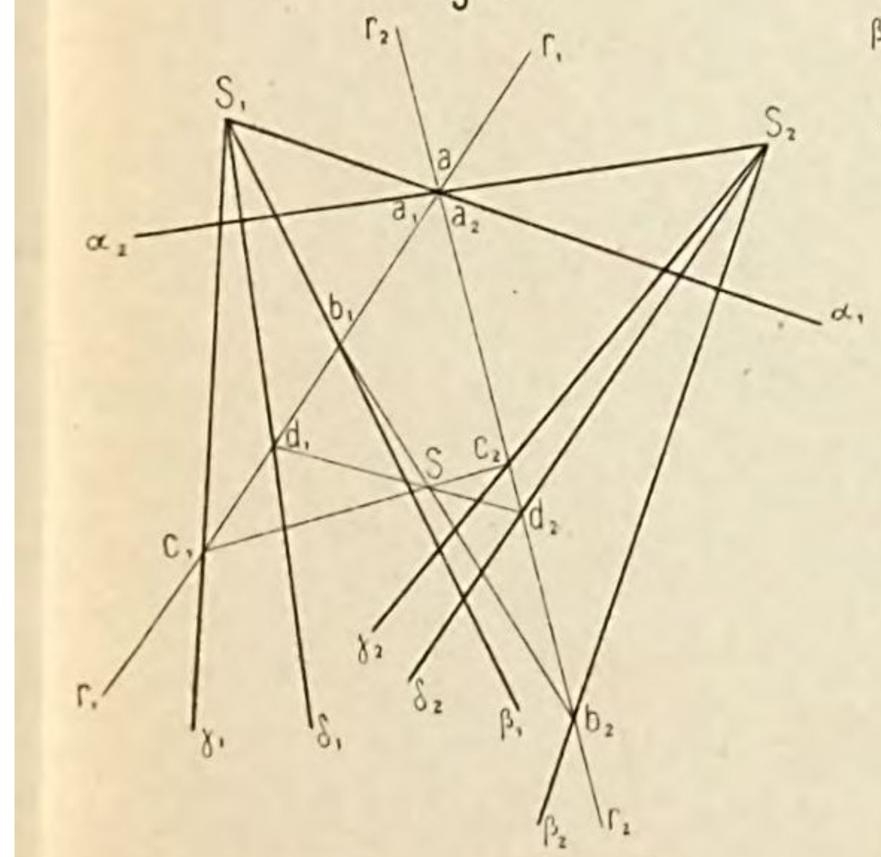


Fig. 99.

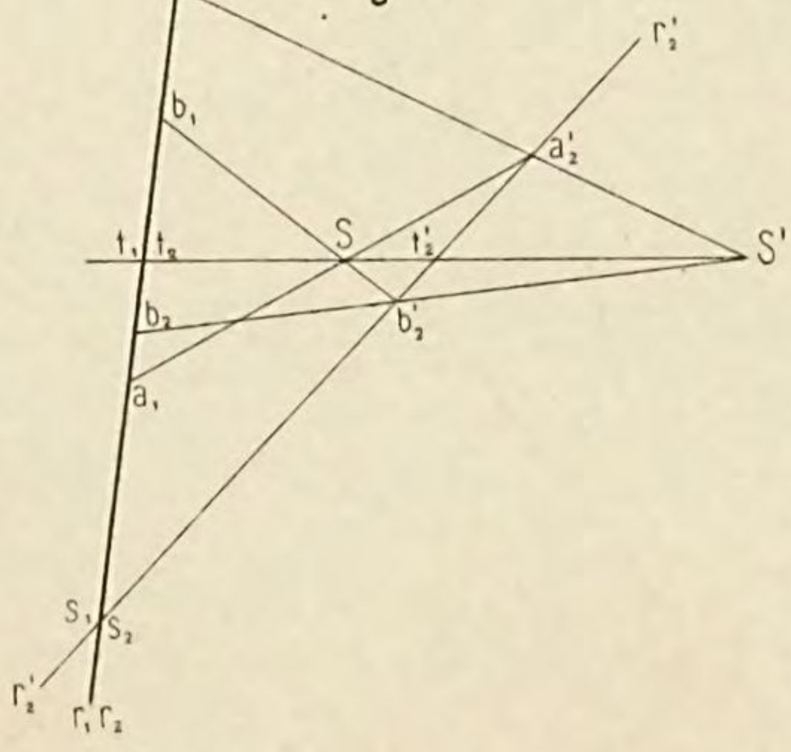
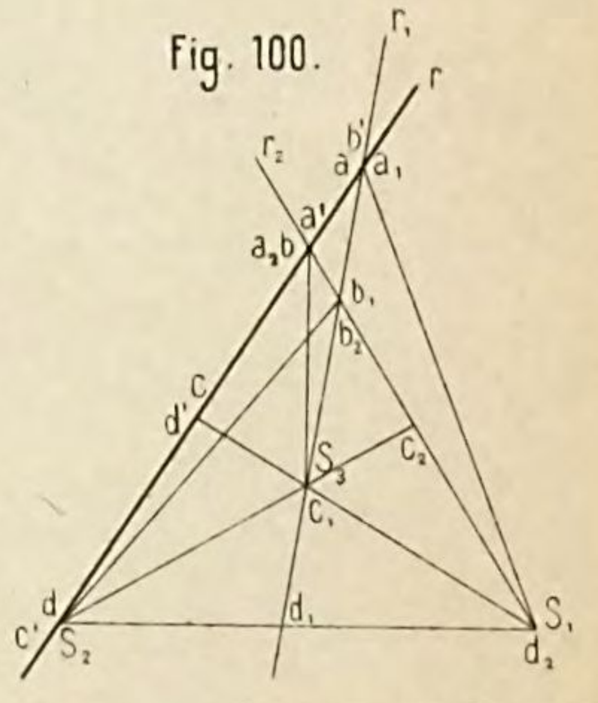


Fig. 100.



s Buchhandlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka.

Fig. 101.

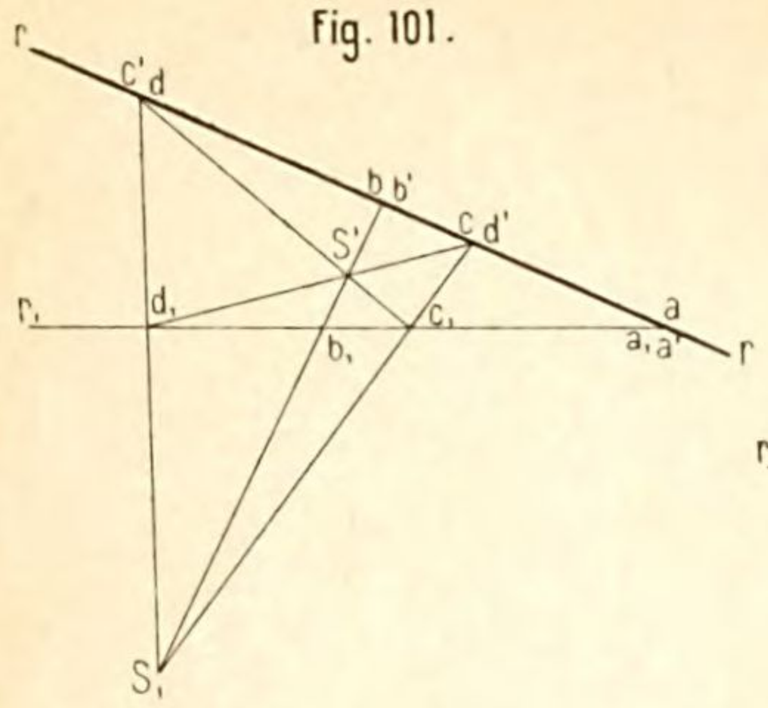
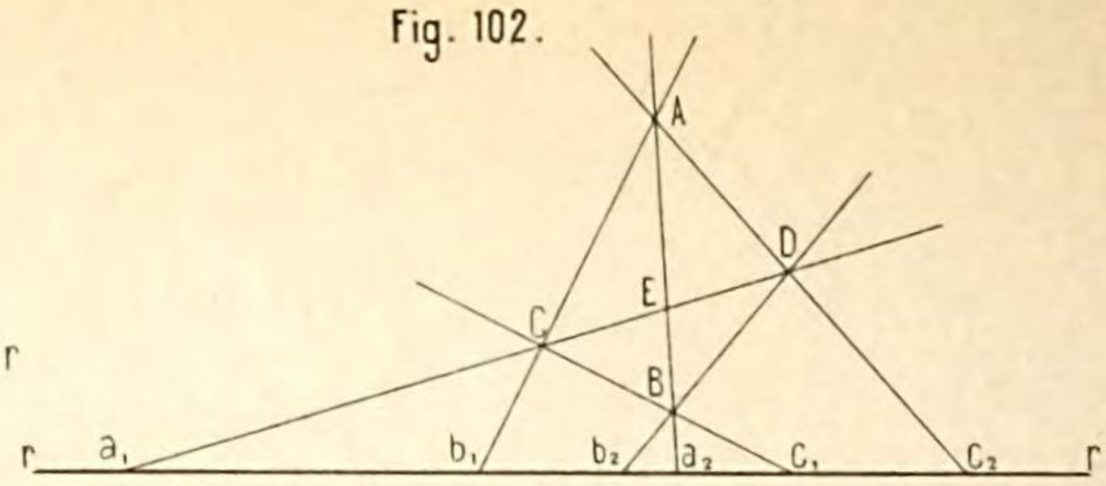


Fig. 102.



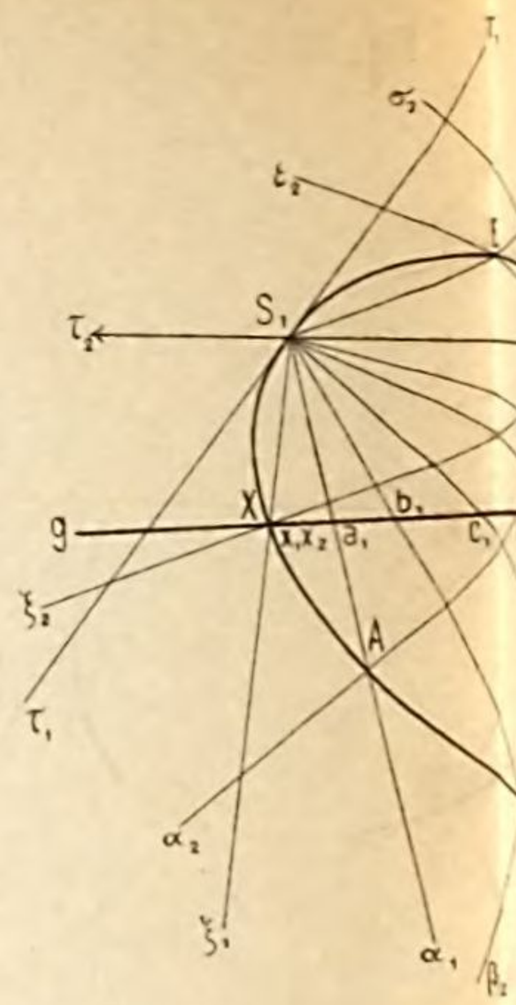


Fig. 107.

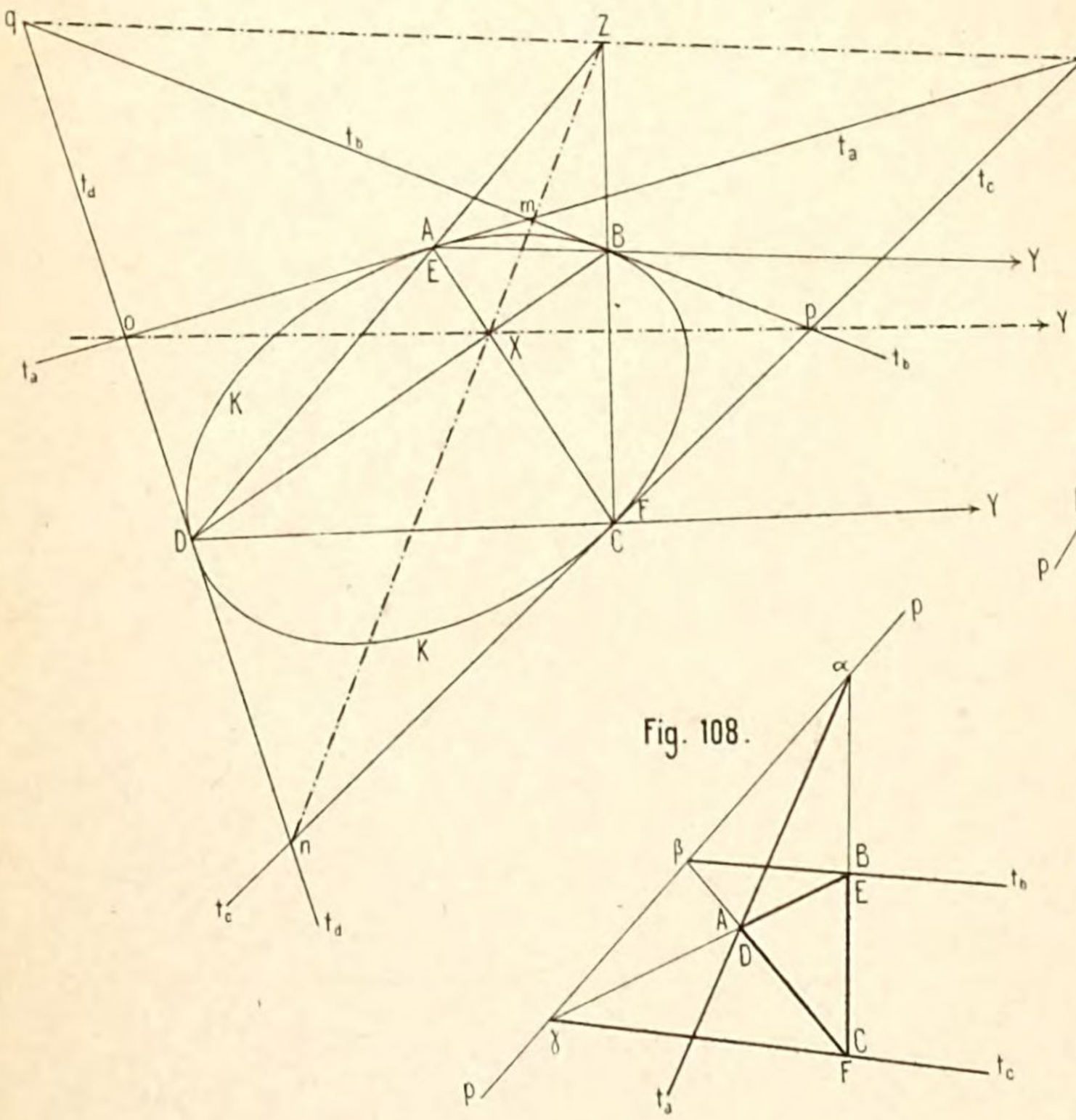


Fig. 106.

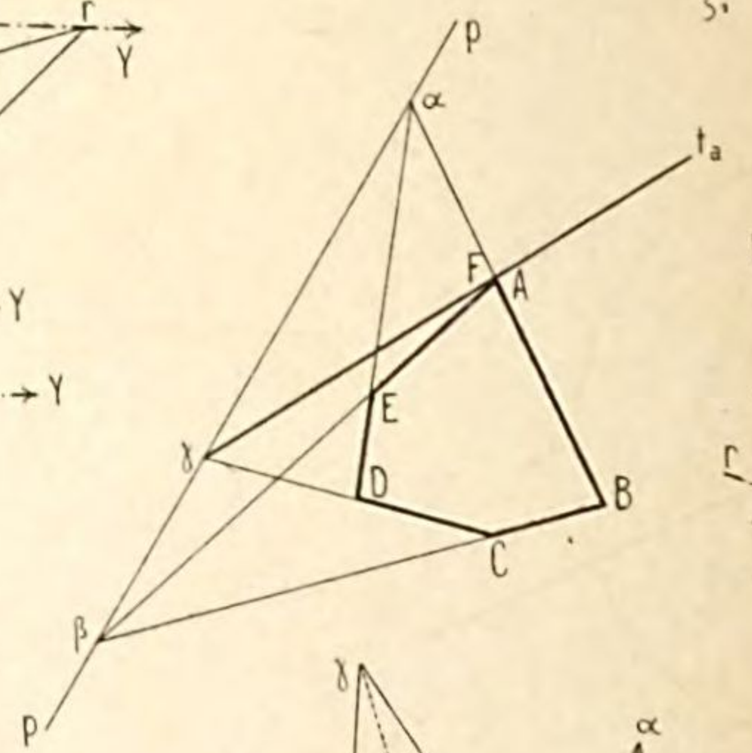


Fig. 110.

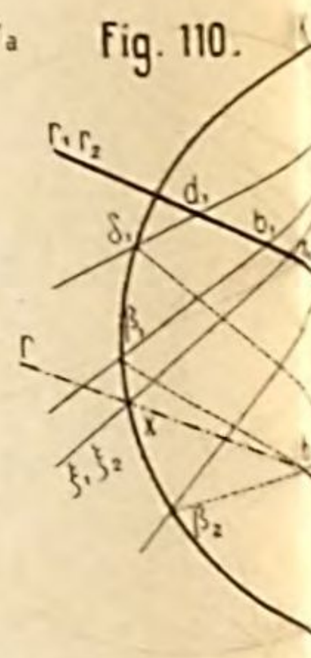


Fig. 108.

Fig. 109.

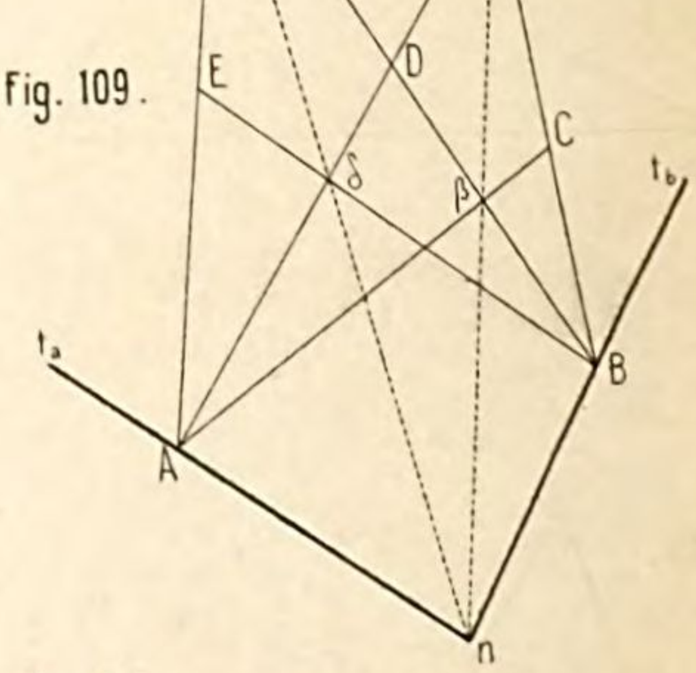


Fig. 114.

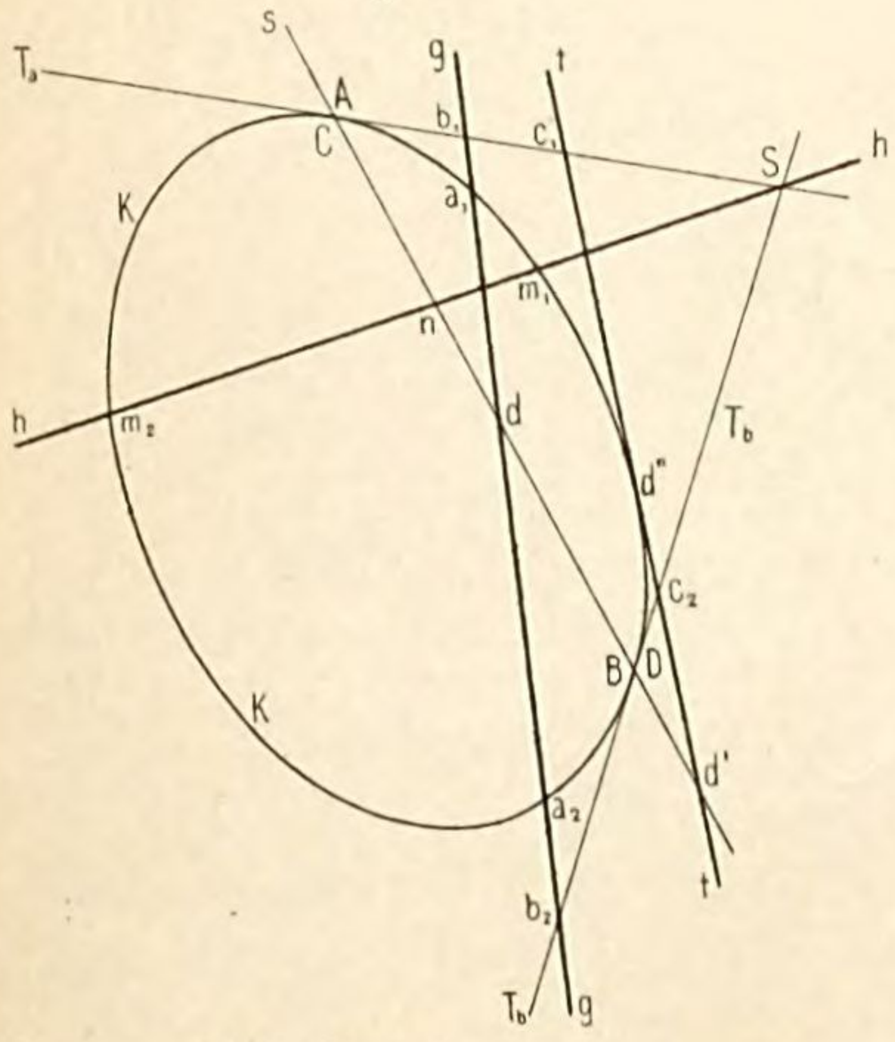
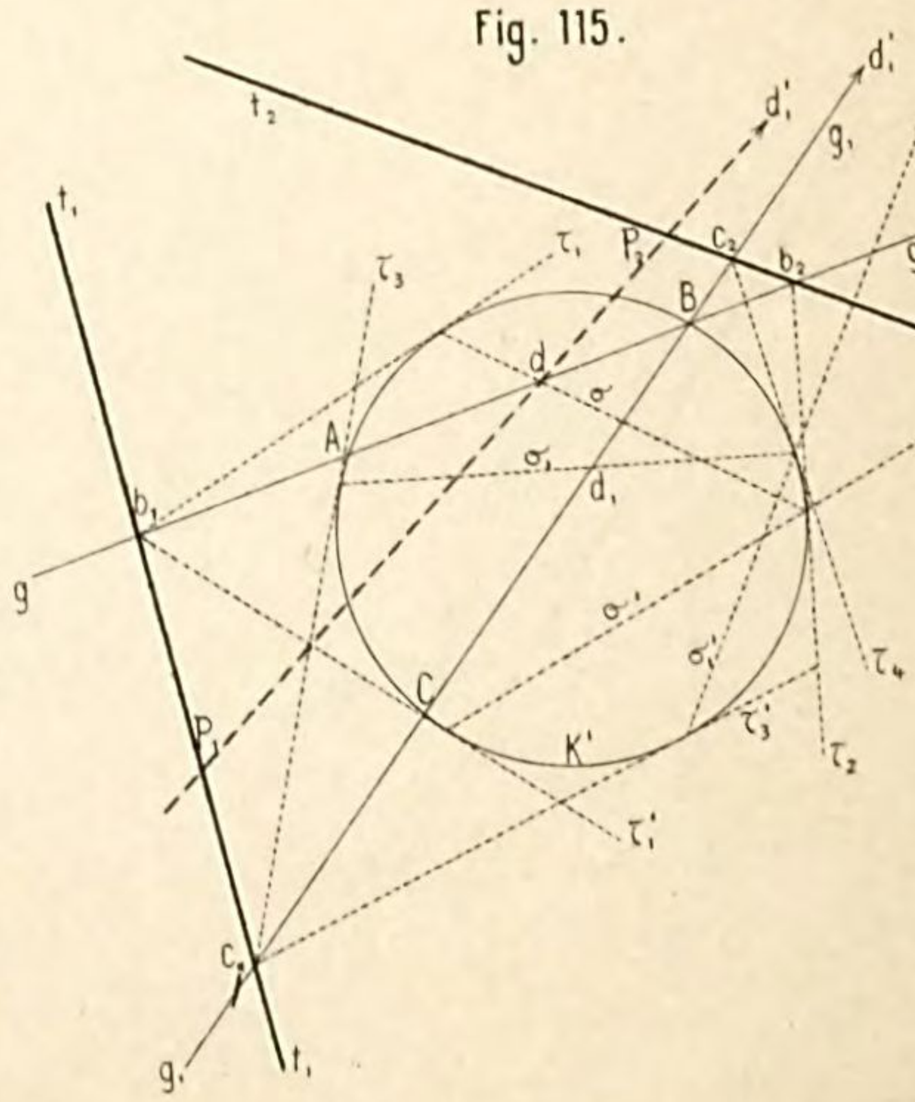


Fig. 115.



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumg

Fig. 103.

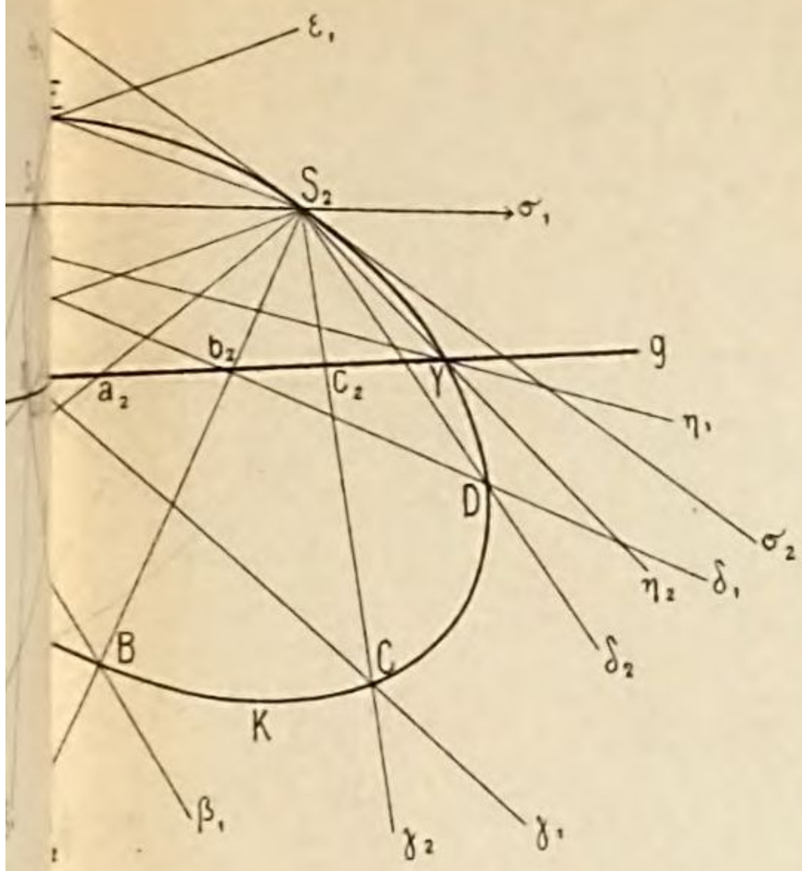


Fig. 104.

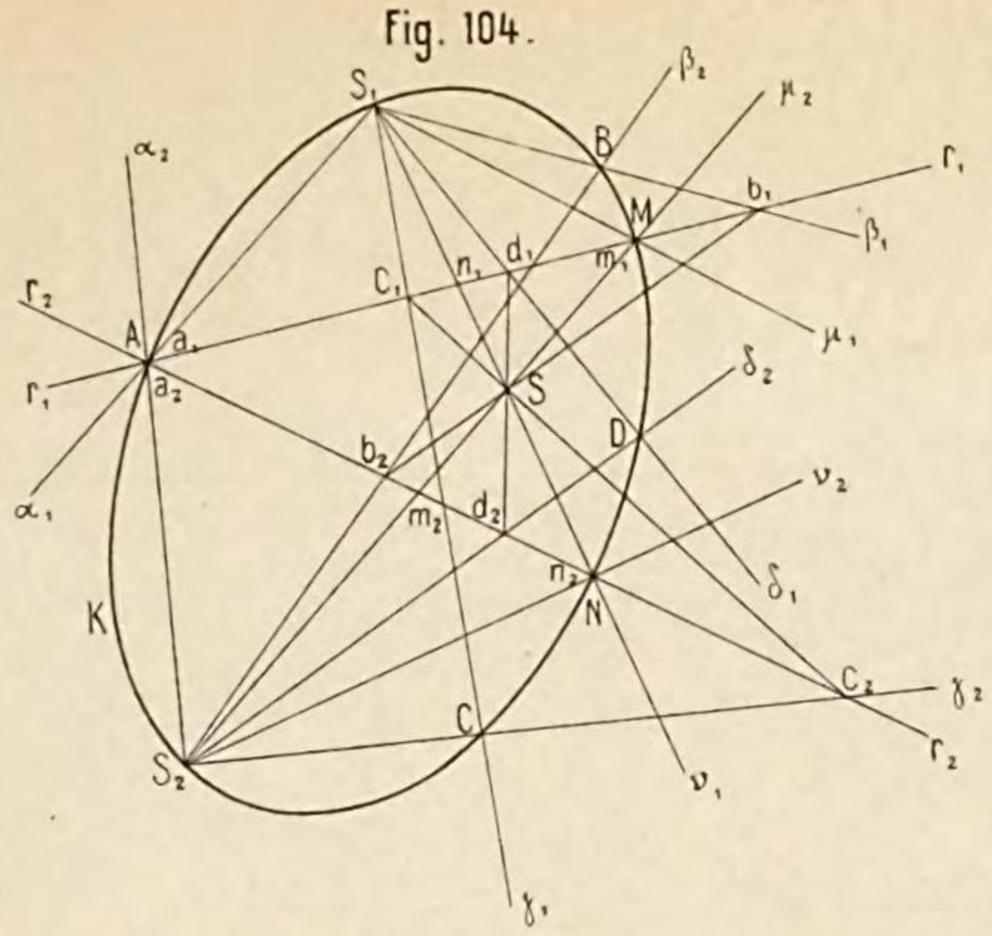


Fig. 105.

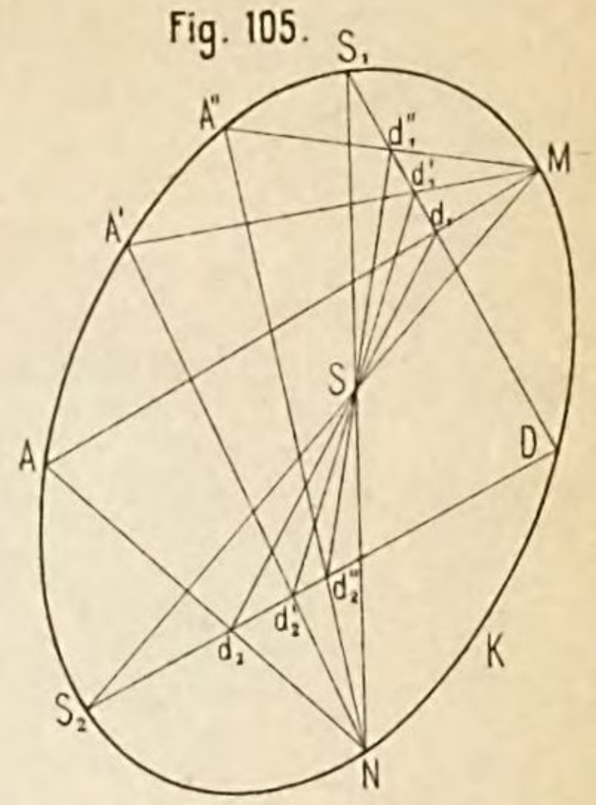


Fig. 111.

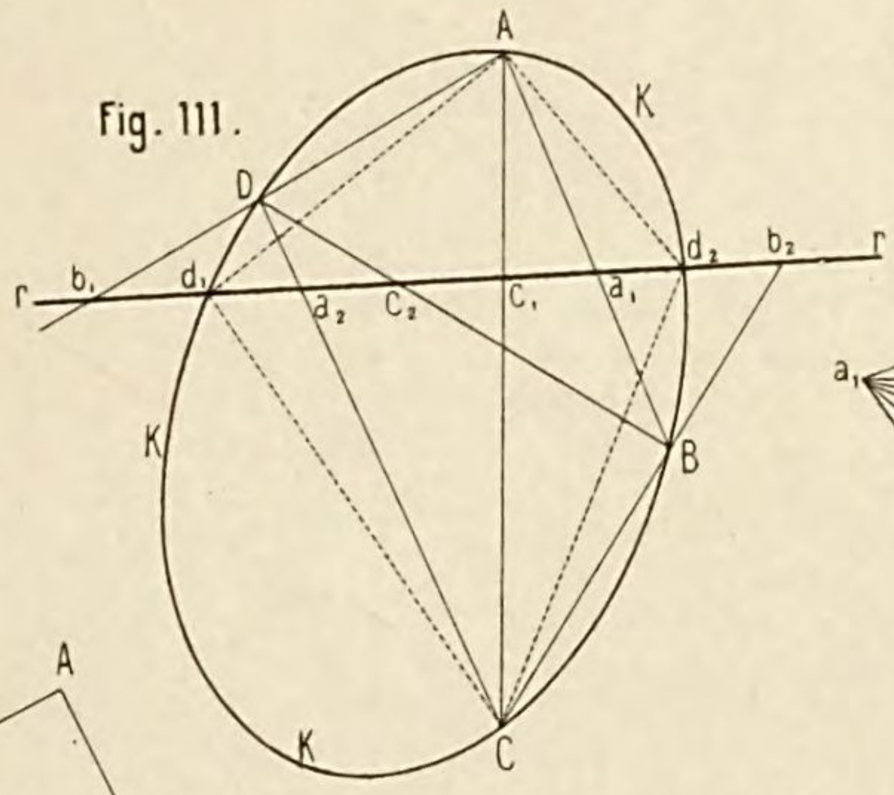
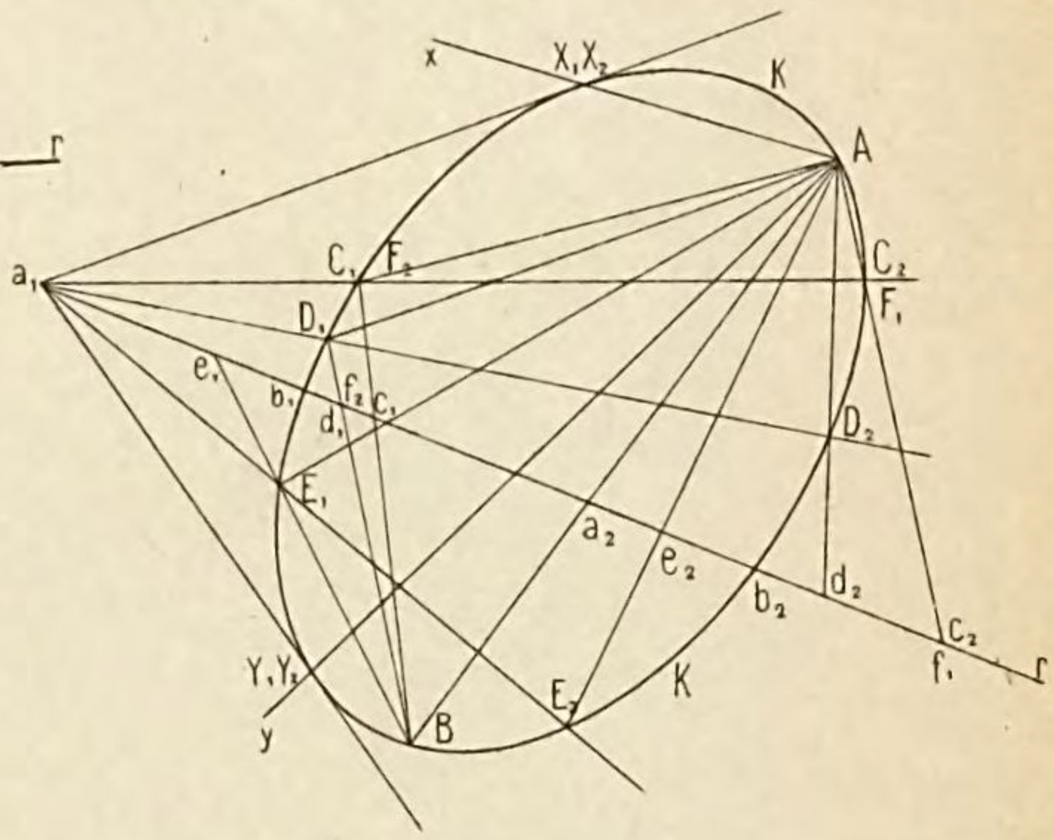
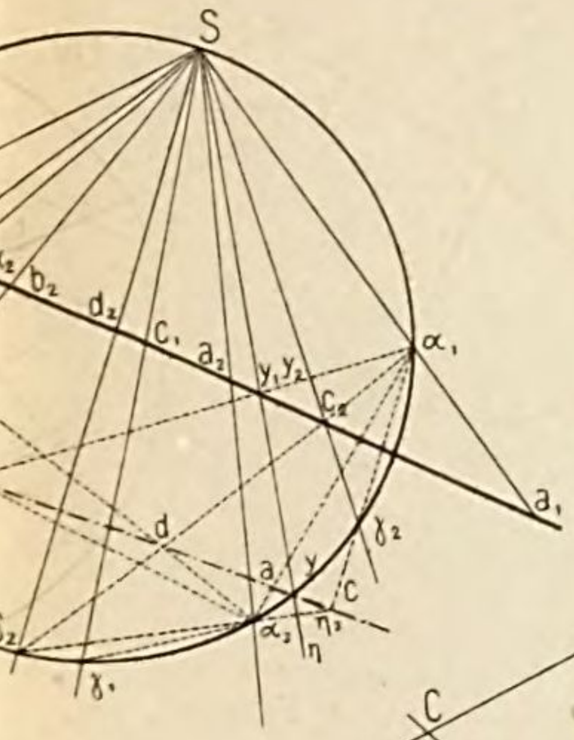


Fig. 112.





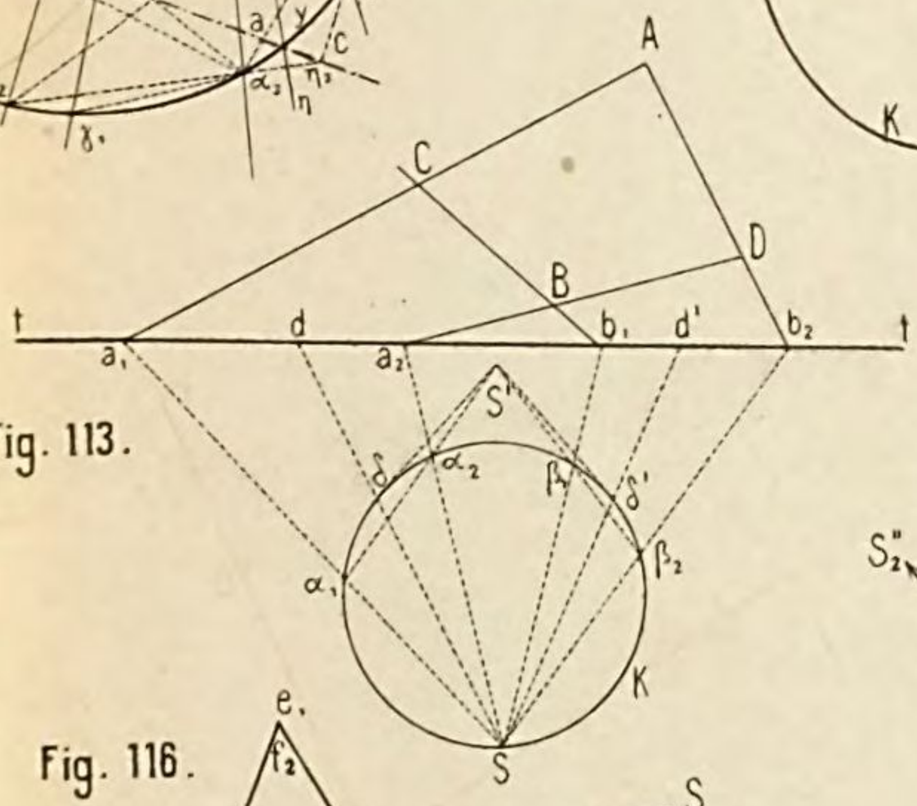


Fig. 113.

Fig. 116.

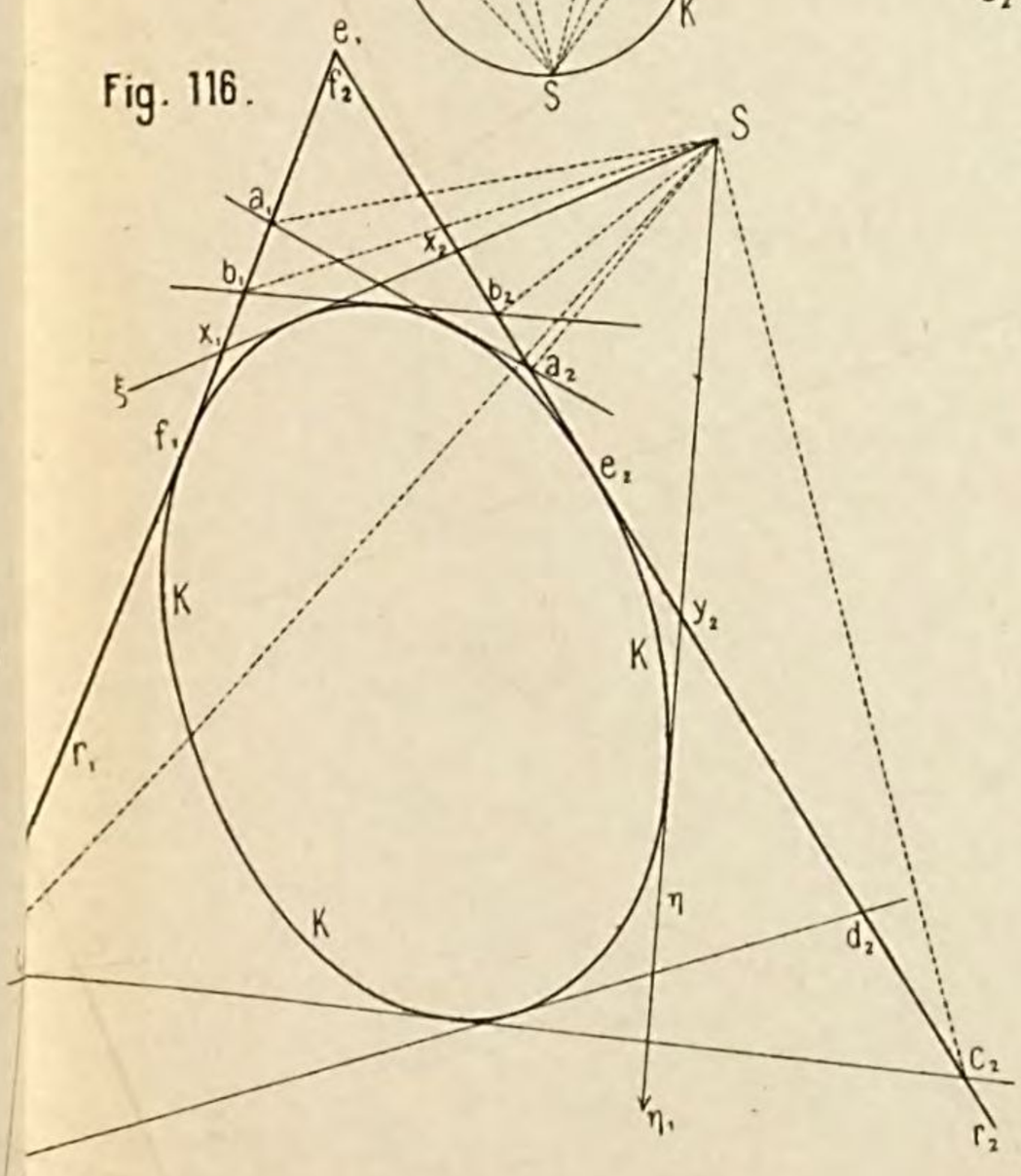


Fig. 117.

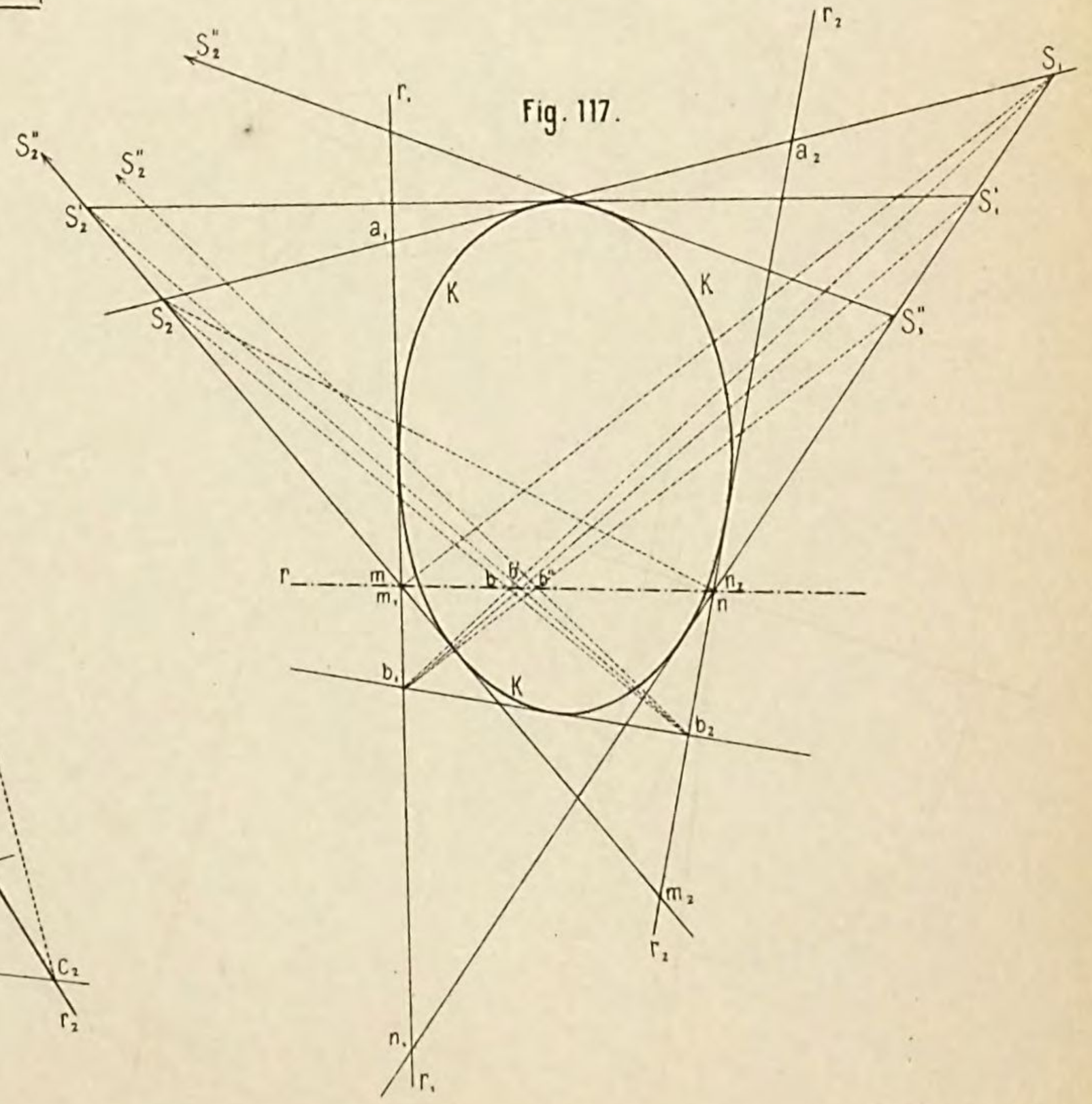


Fig. 118.

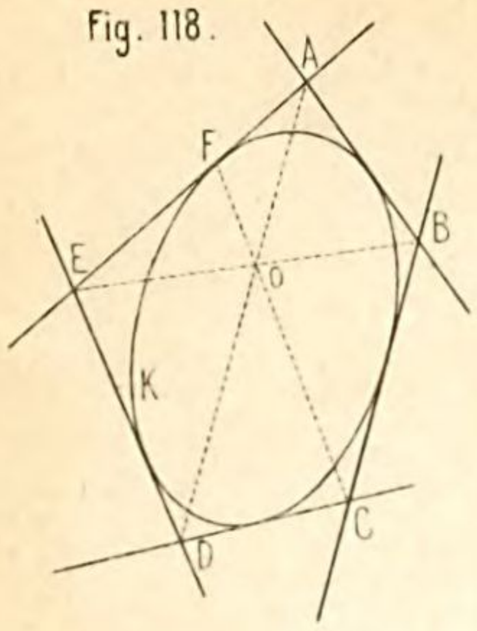


Fig. 120.

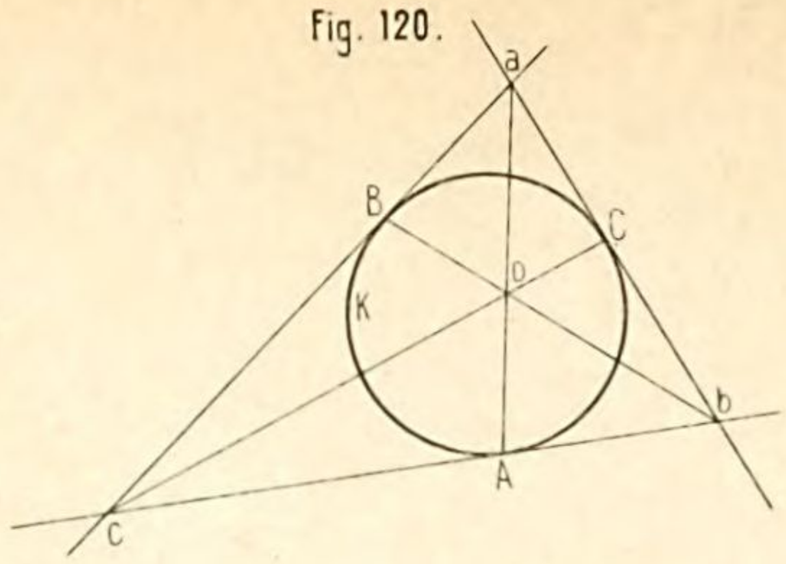


Fig. 121.

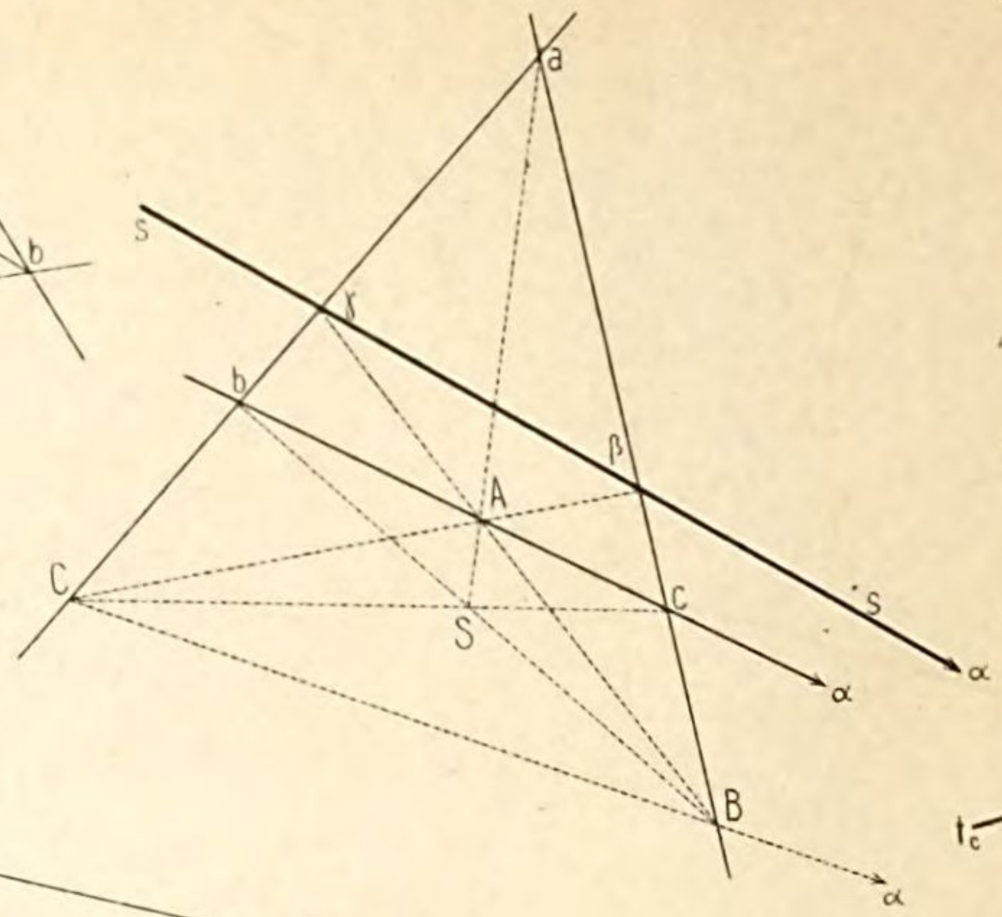


Fig.

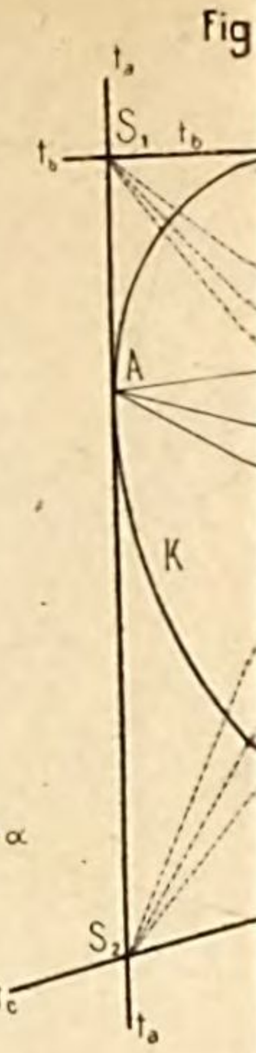
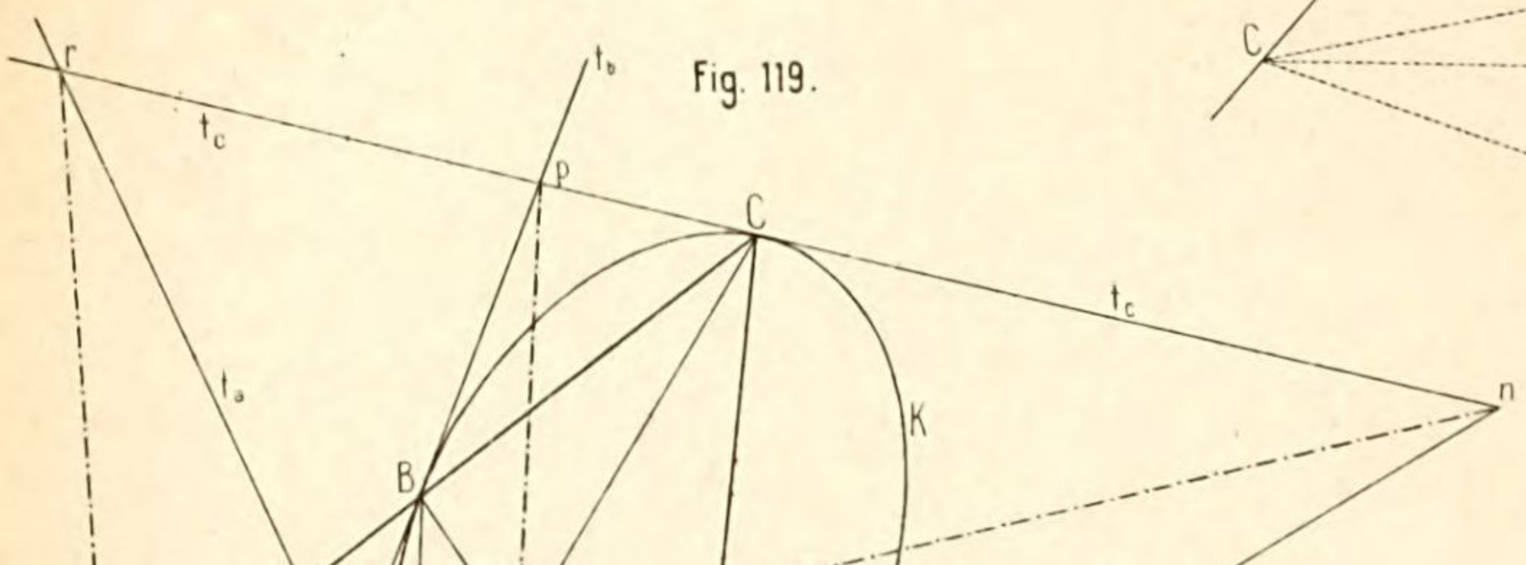


Fig. 119.



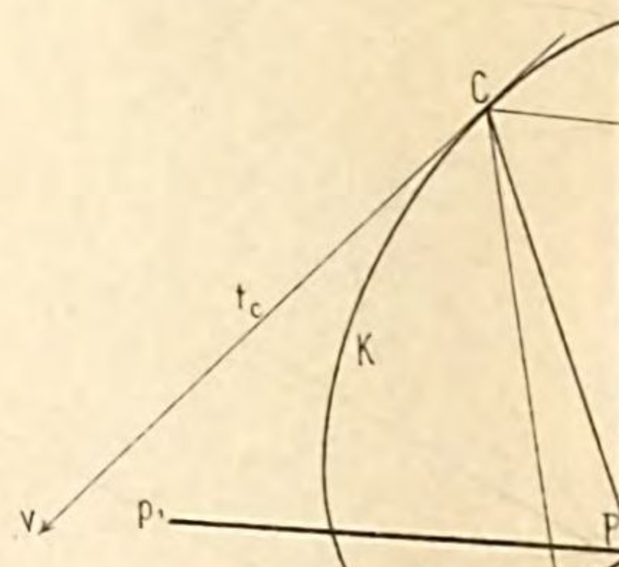


Fig. 127.

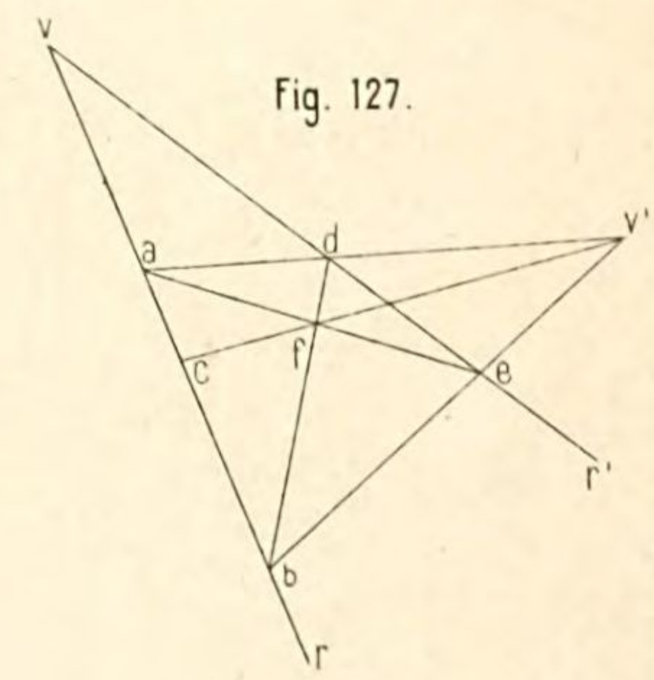


Fig. 128.

Fig. 129.

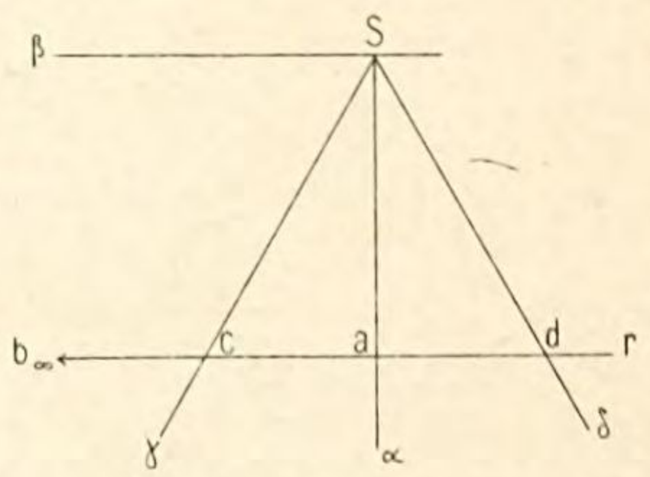


Fig. 130.

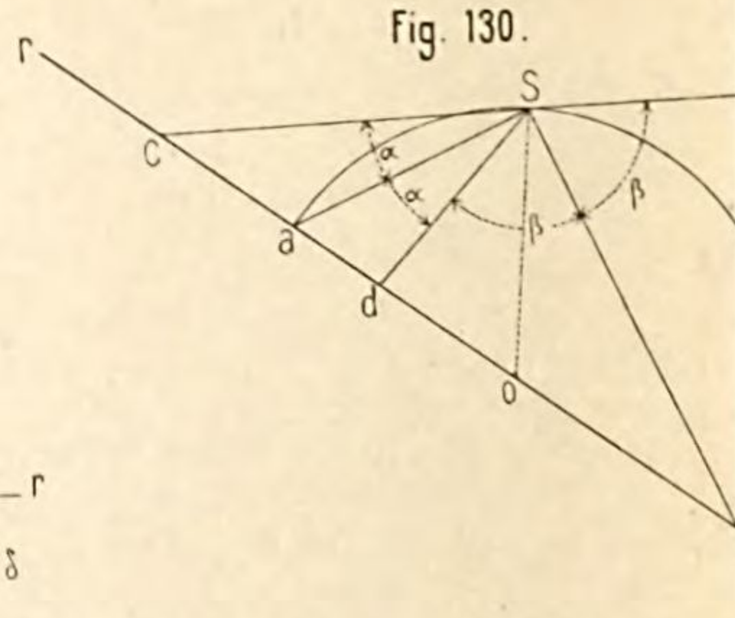


Fig. 135.

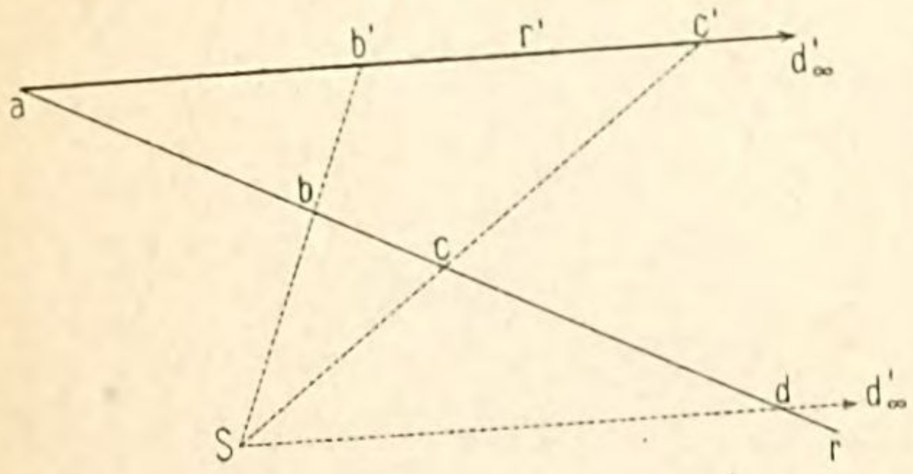
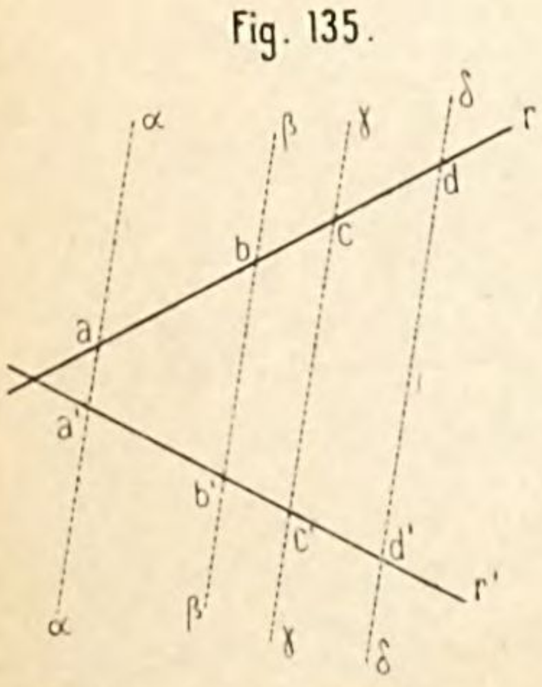


Fig. 136.



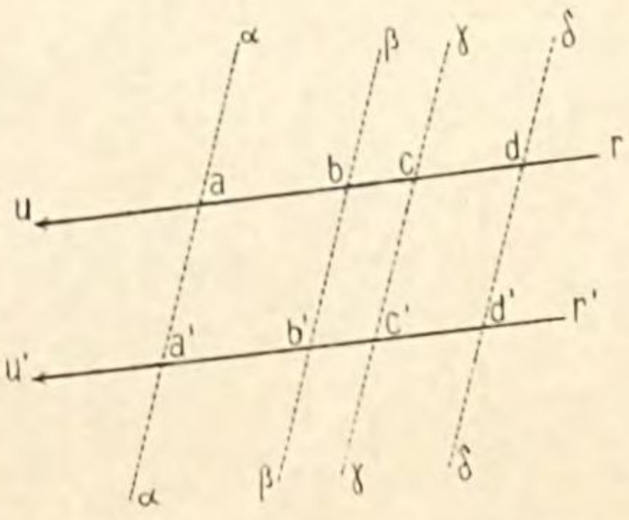


Fig. 137.

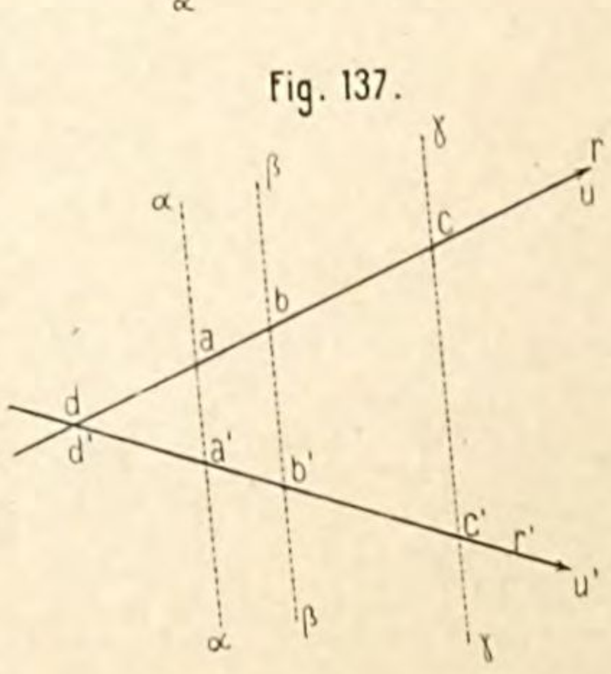
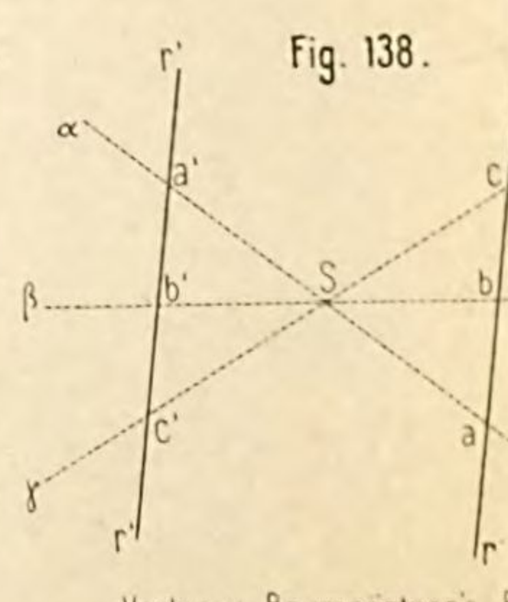


Fig. 138.



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgärtner's

Fig. 122.

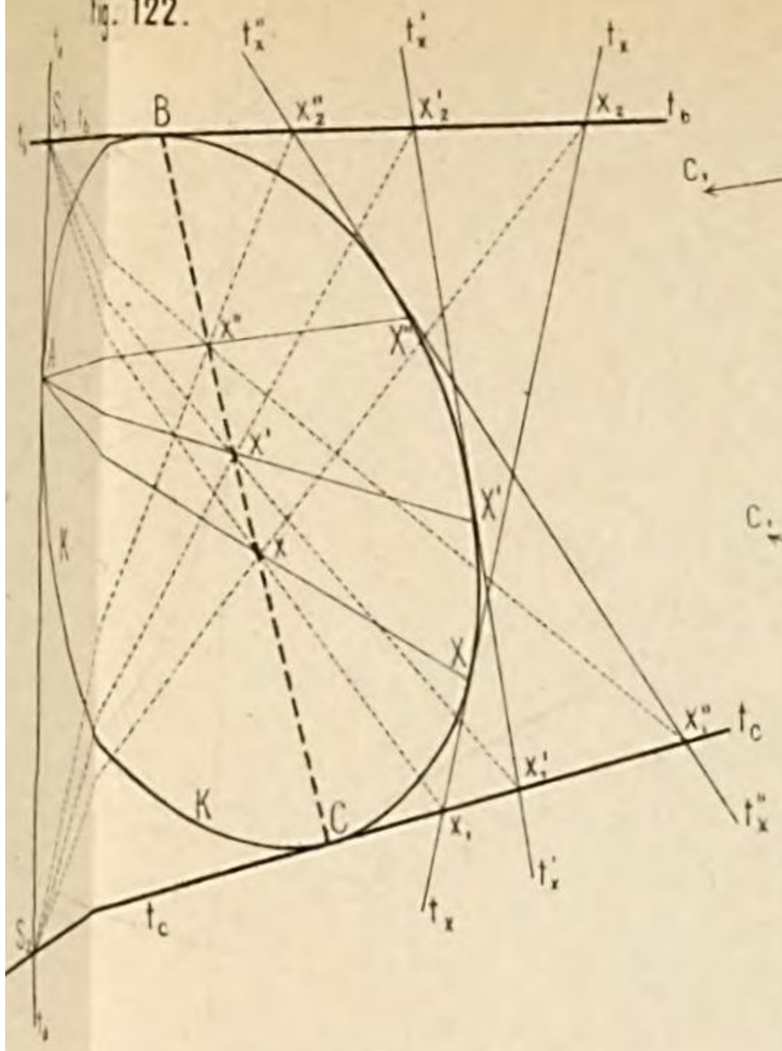


Fig. 123.

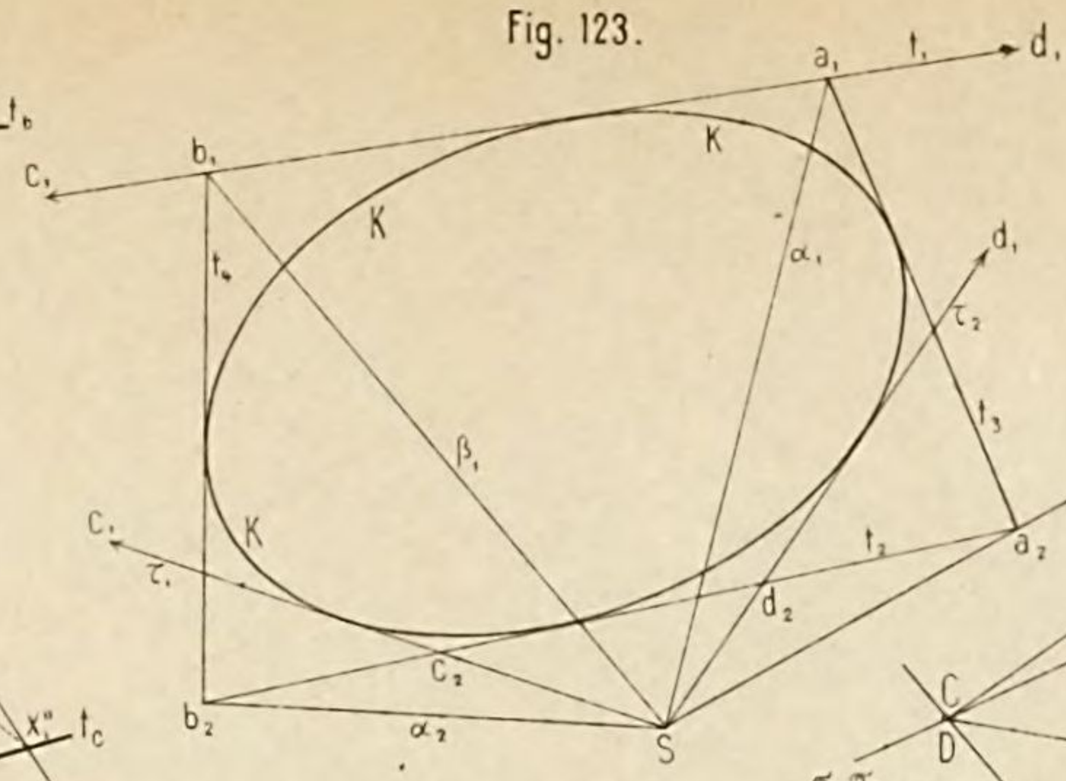


Fig. 124.

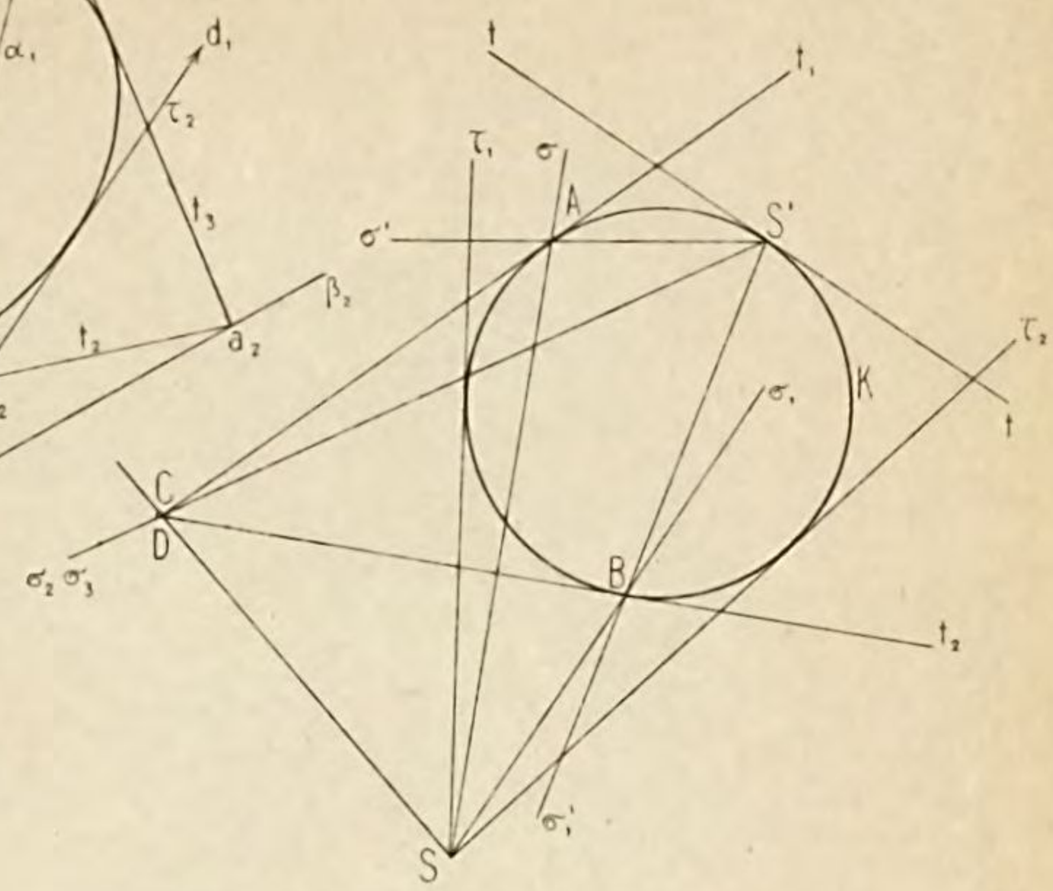


Fig. 125.

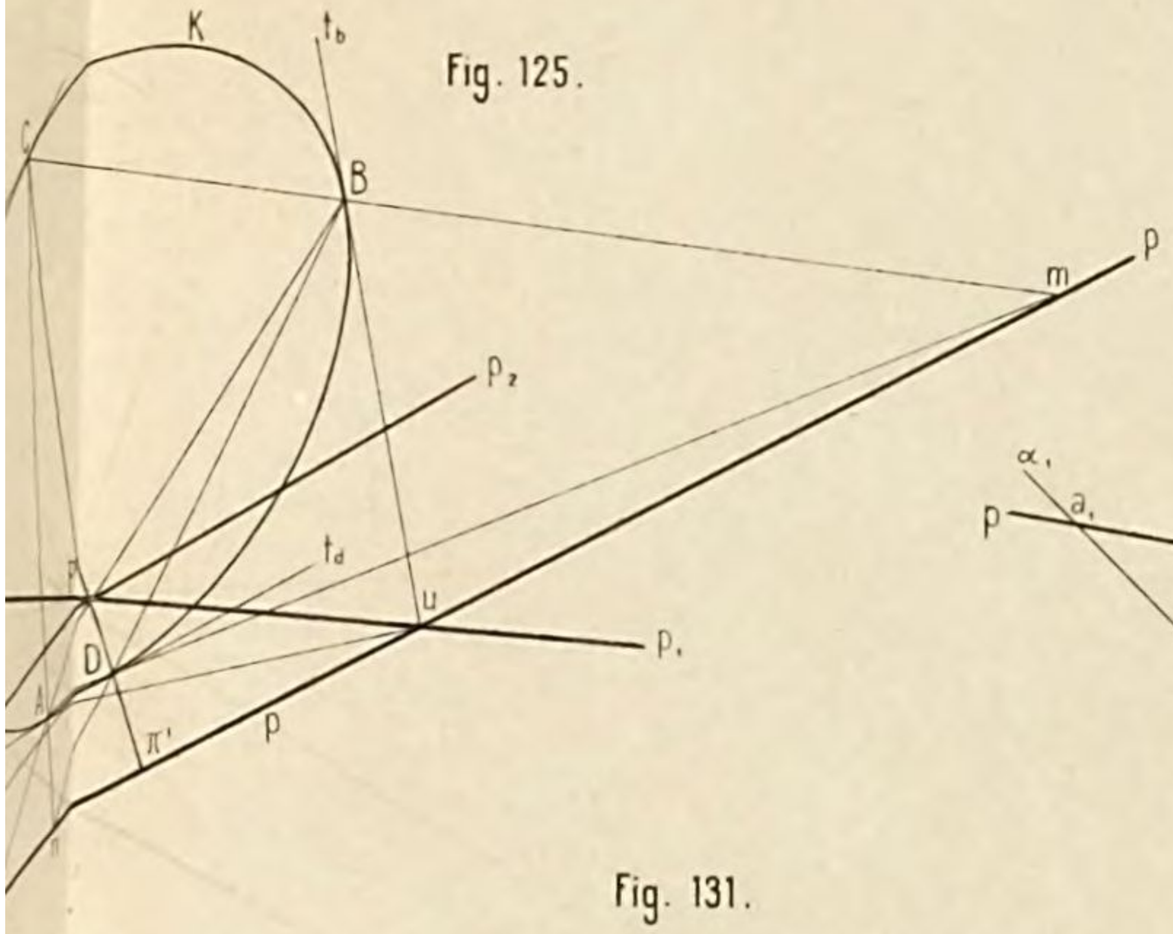


Fig. 126.

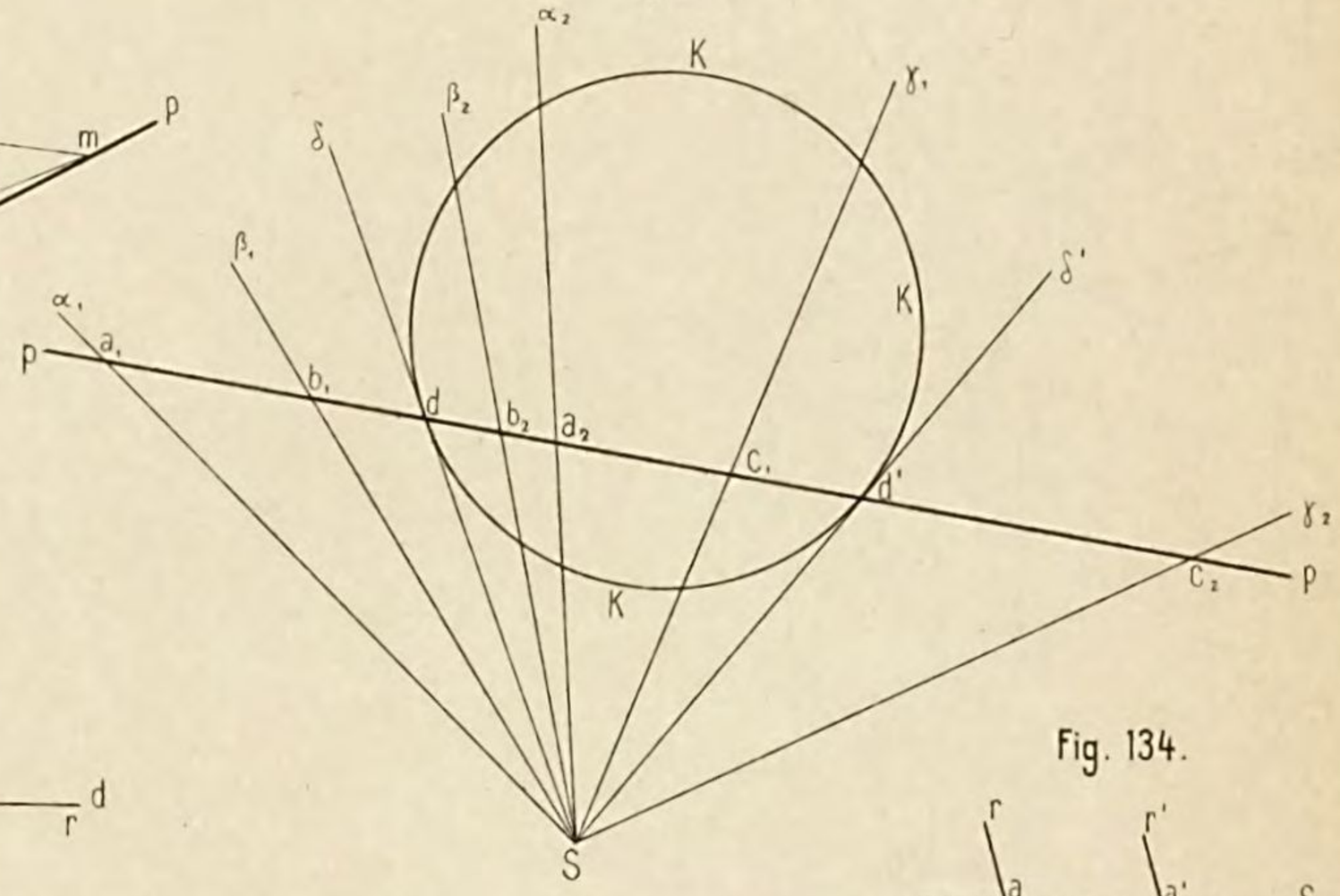


Fig. 131.

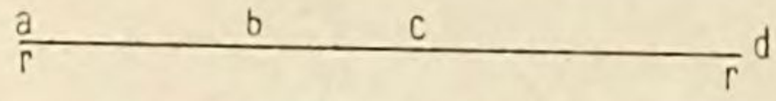


Fig. 132.

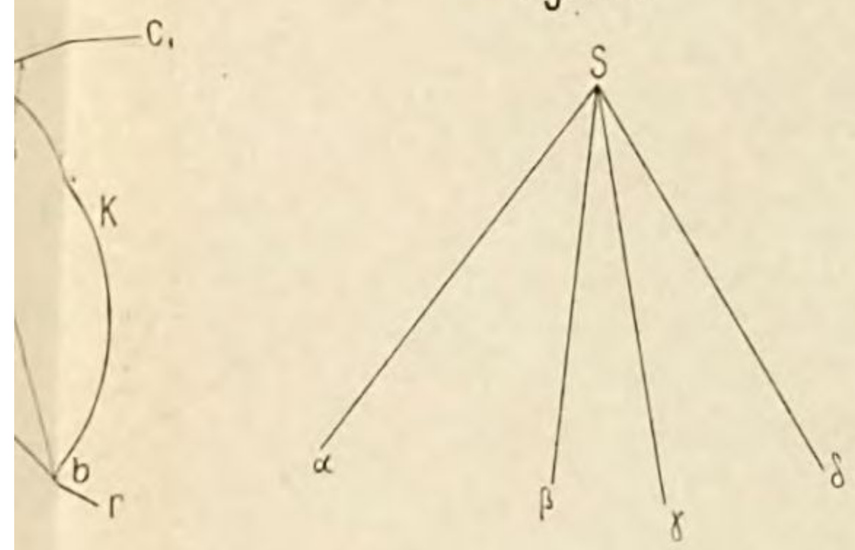


Fig. 133.

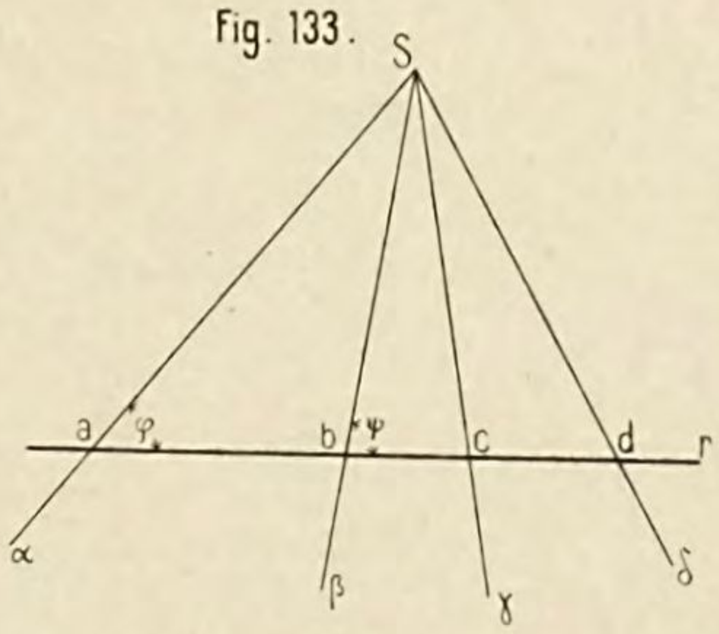


Fig. 134.

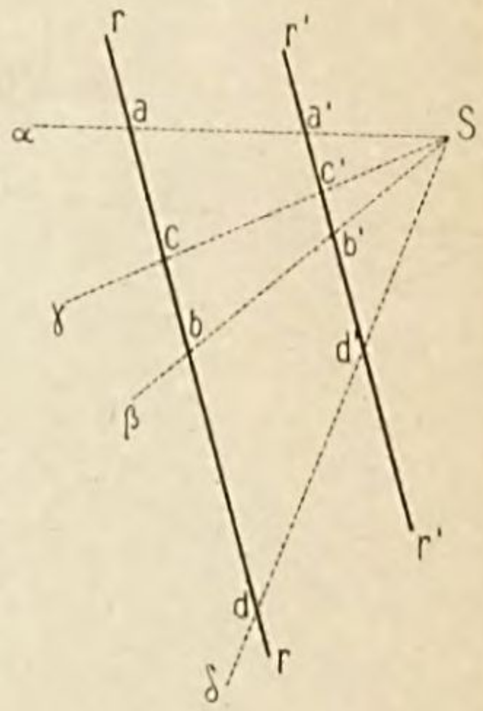


Fig. 139.

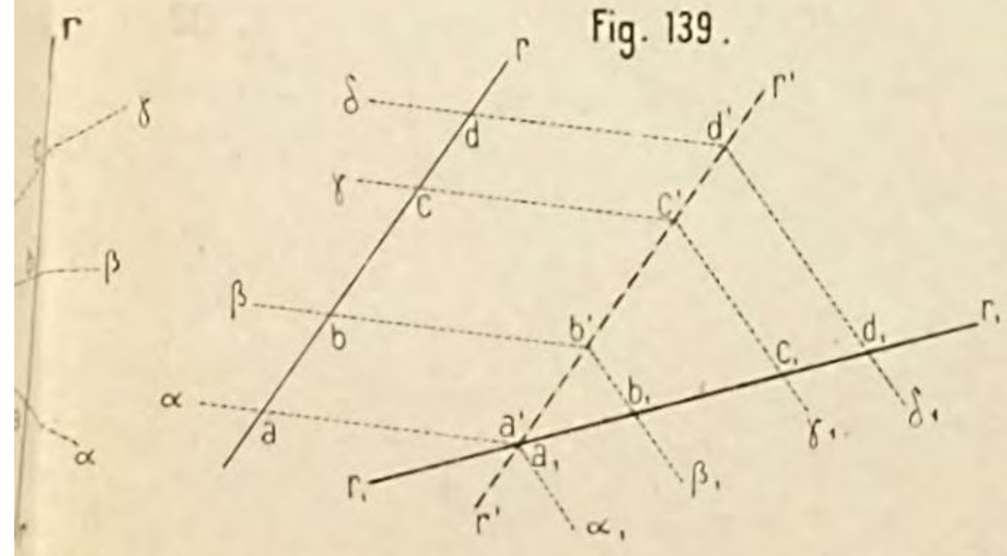


Fig. 140.

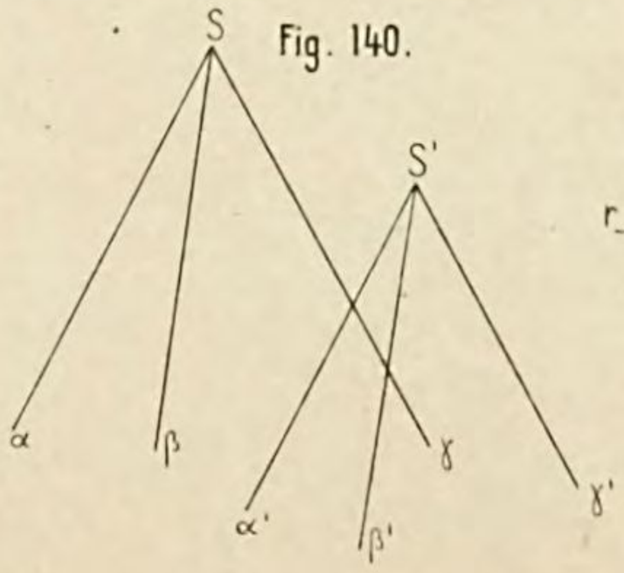
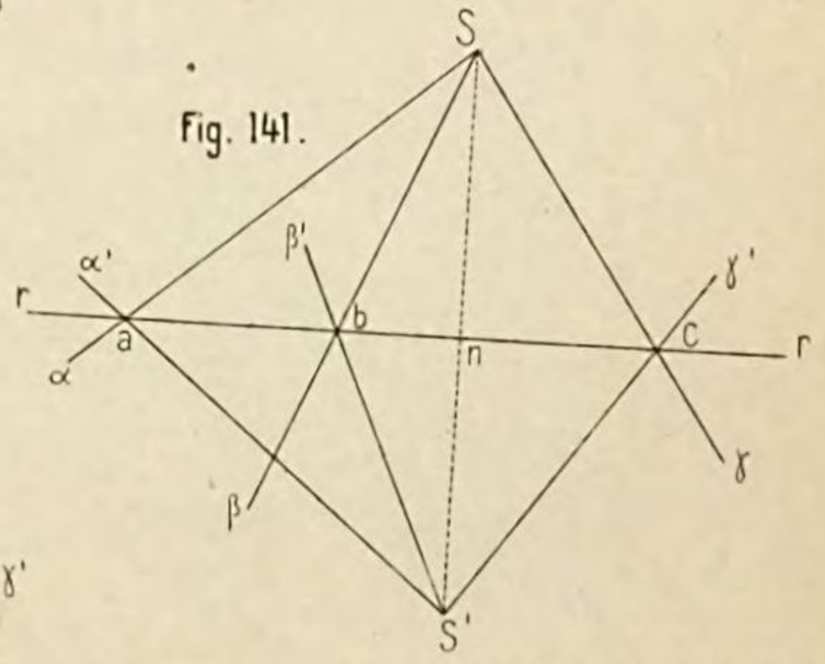


Fig. 141.



uchhandlung, Leipzig

Constr. u. gez. Peschka.

Fig. 143a

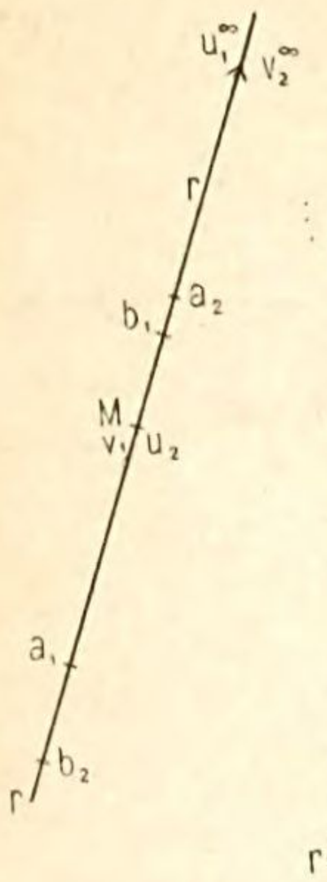


Fig. 143b

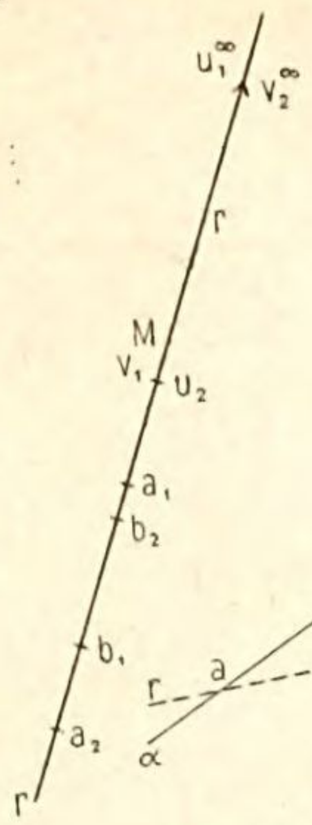
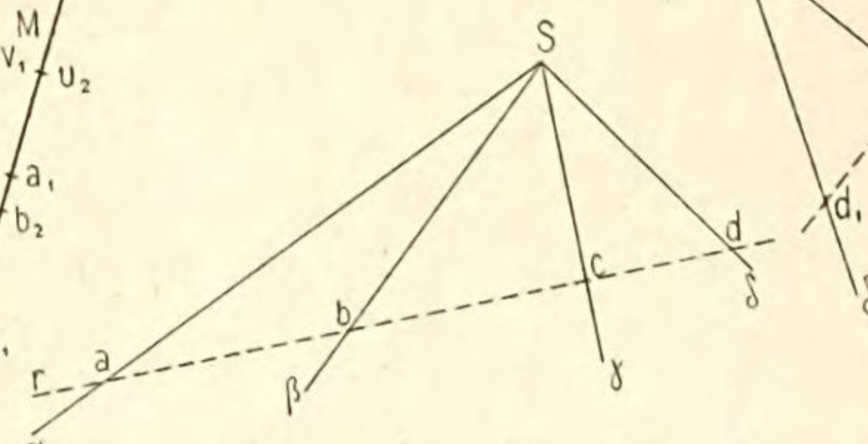


Fig. 142.



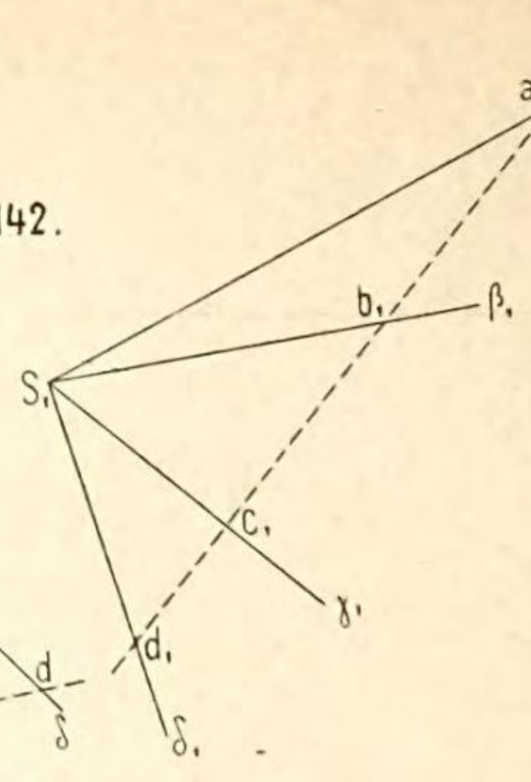


Fig. 144.

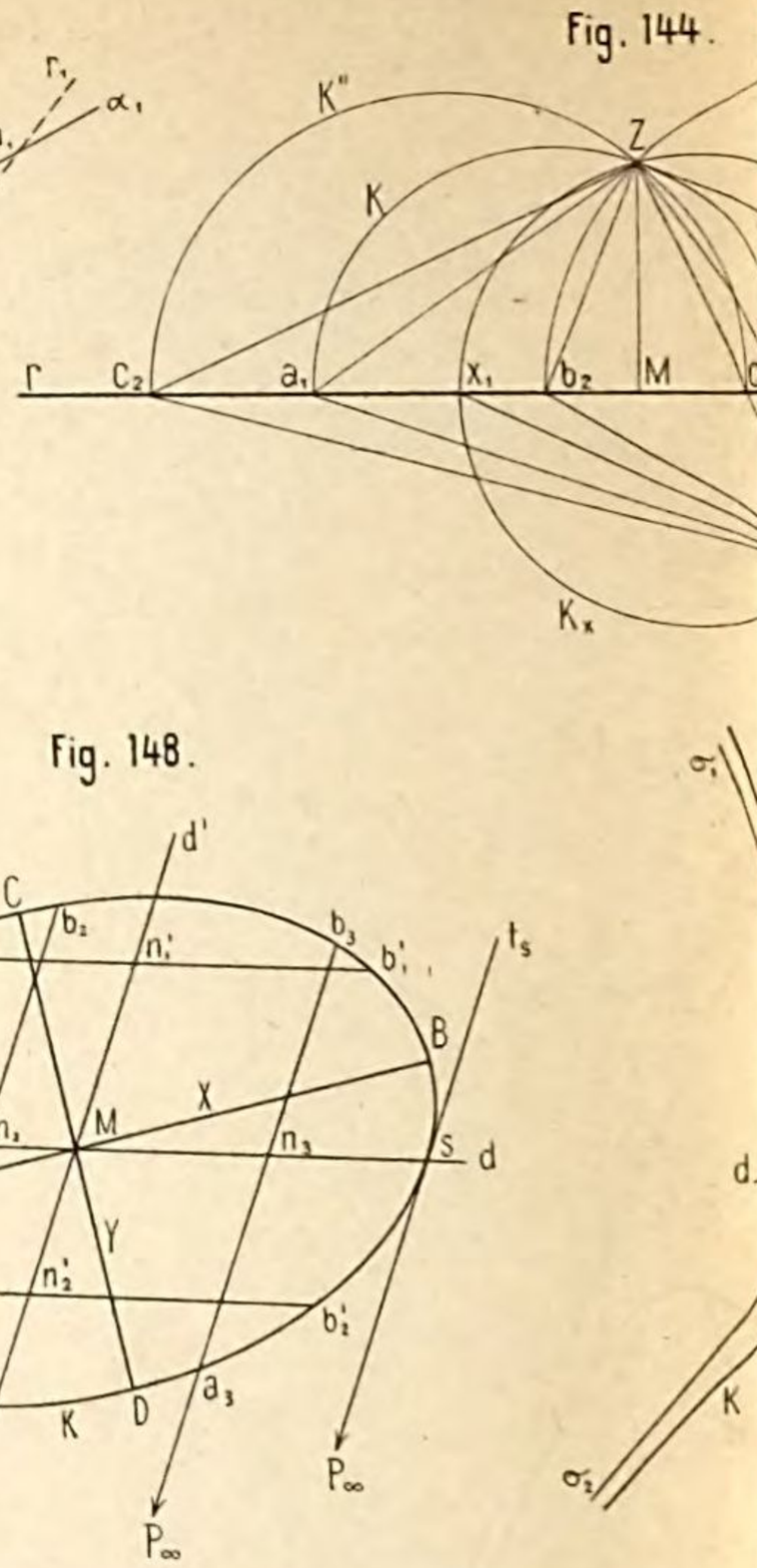


Fig. 147.

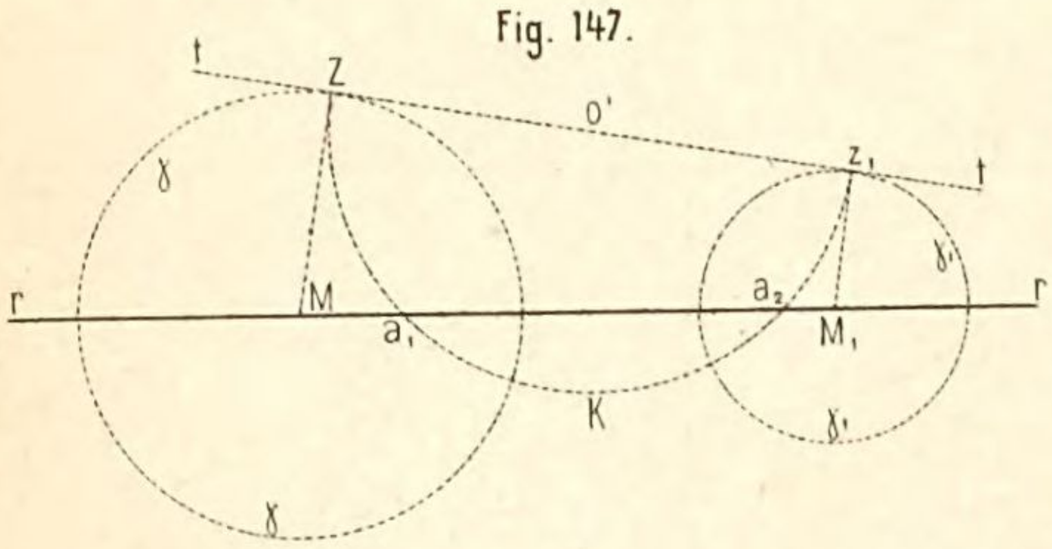


Fig. 148.

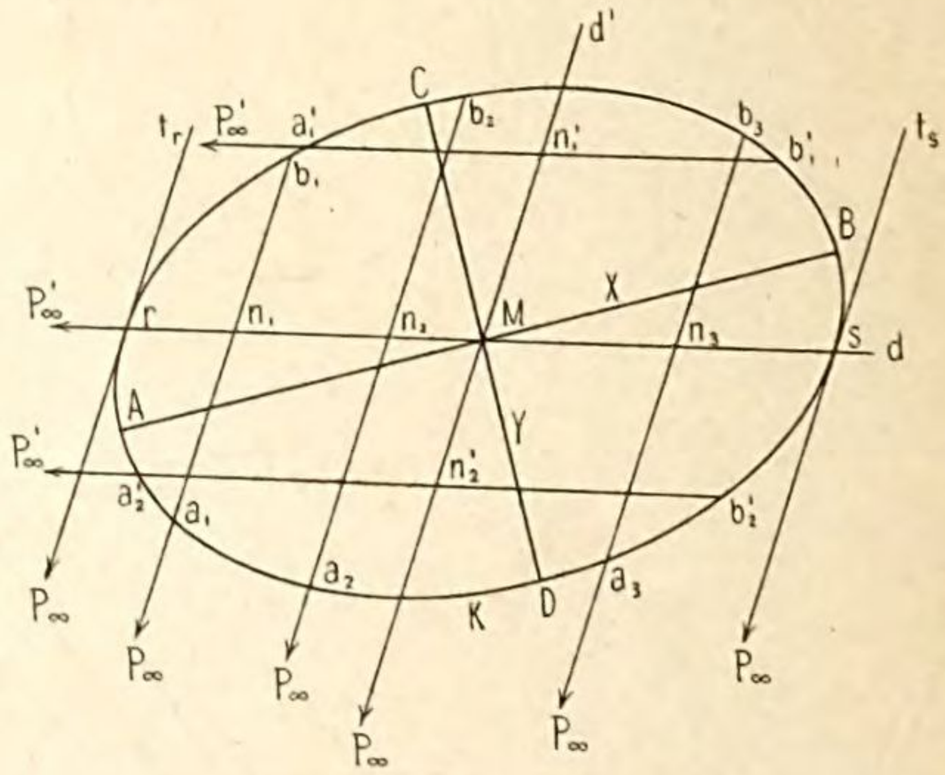


Fig. 152.

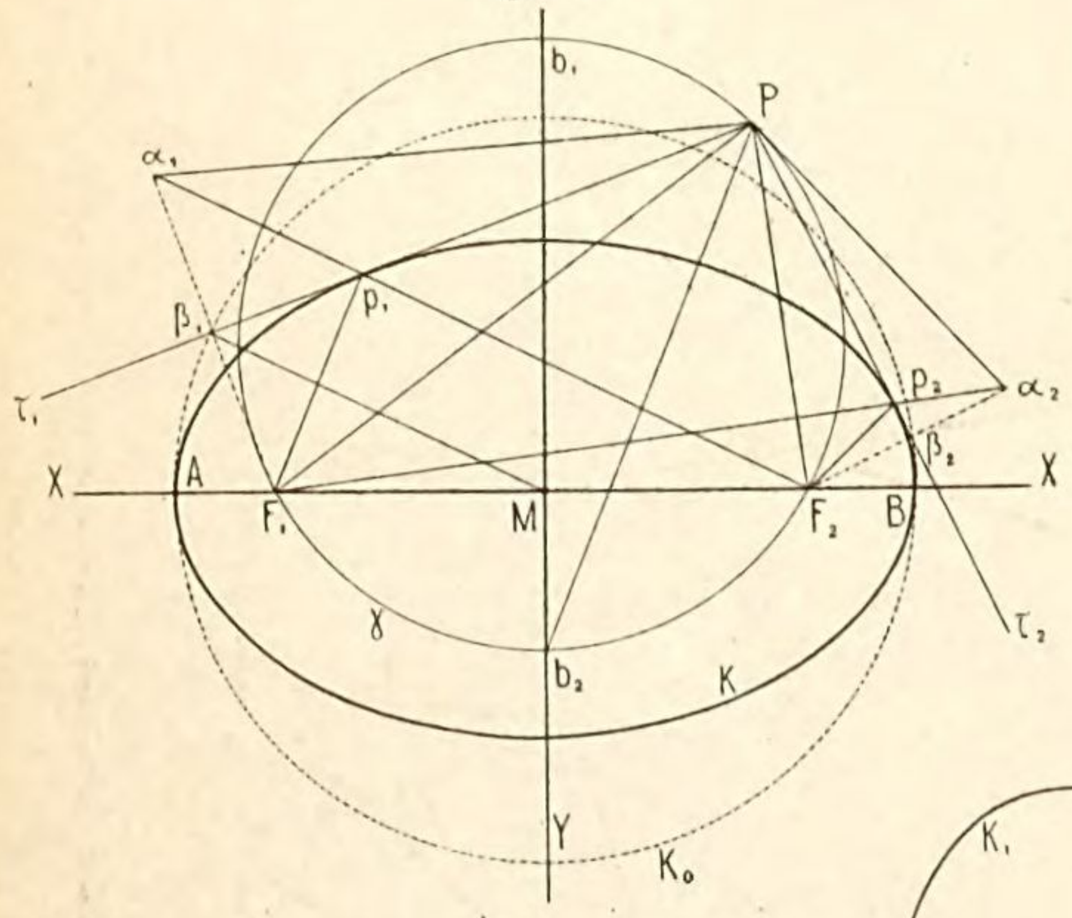


Fig. 153.

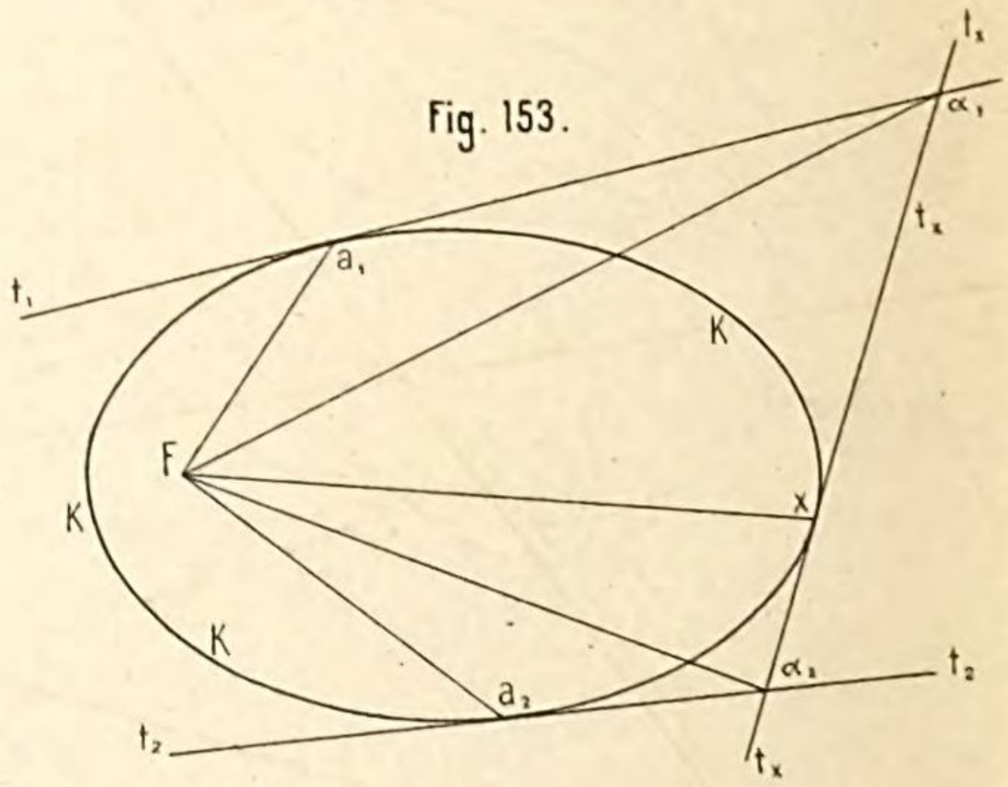


Fig. 156.

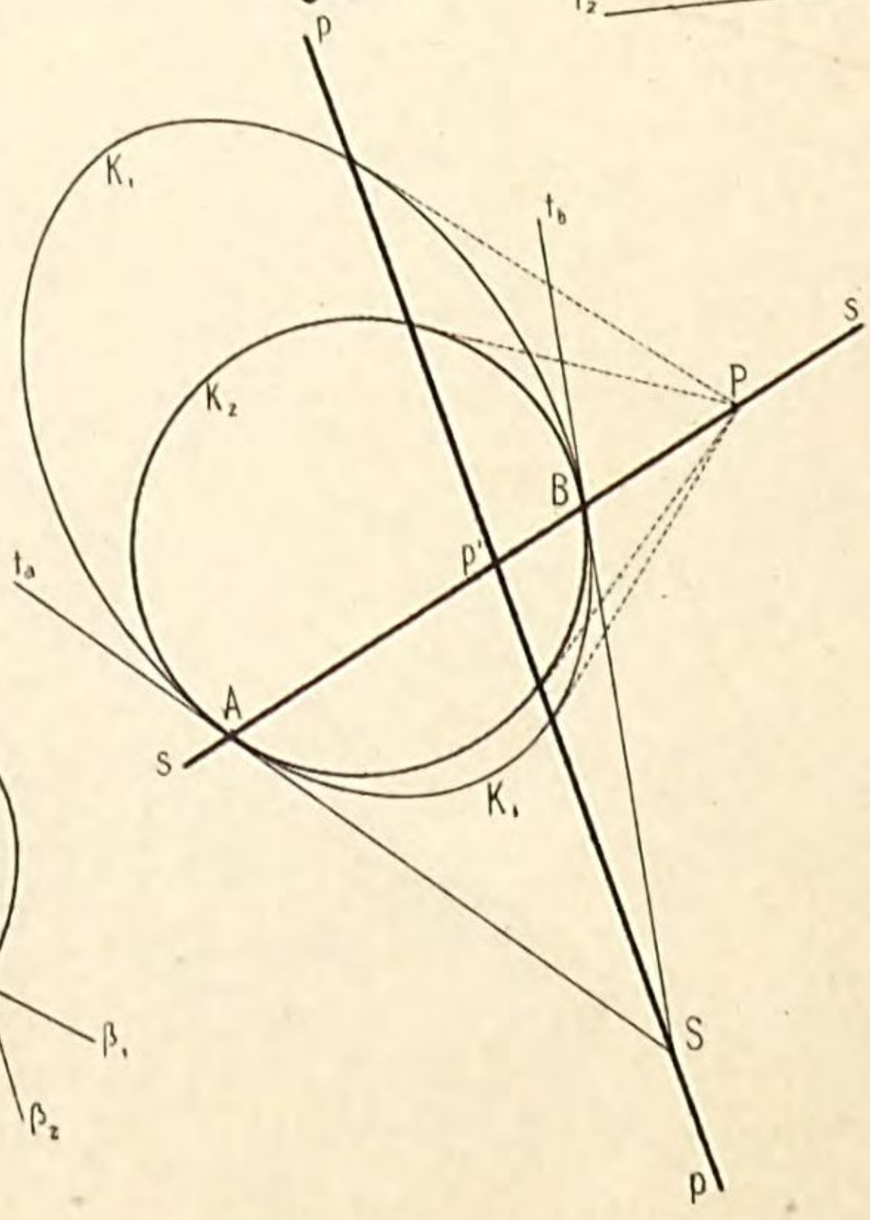


Fig. 157.

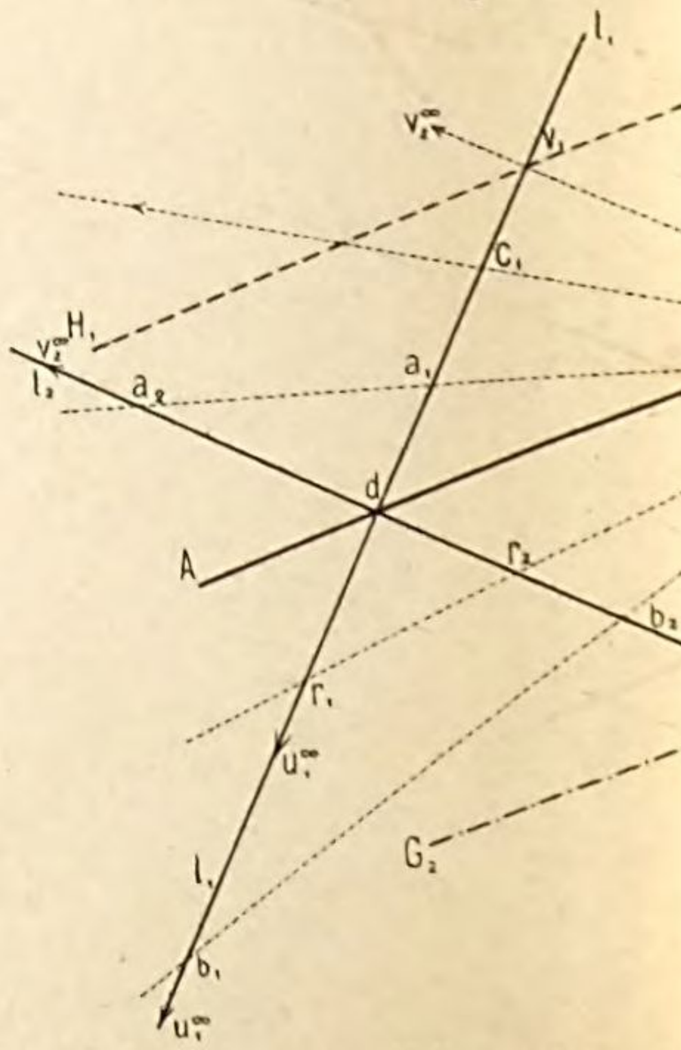
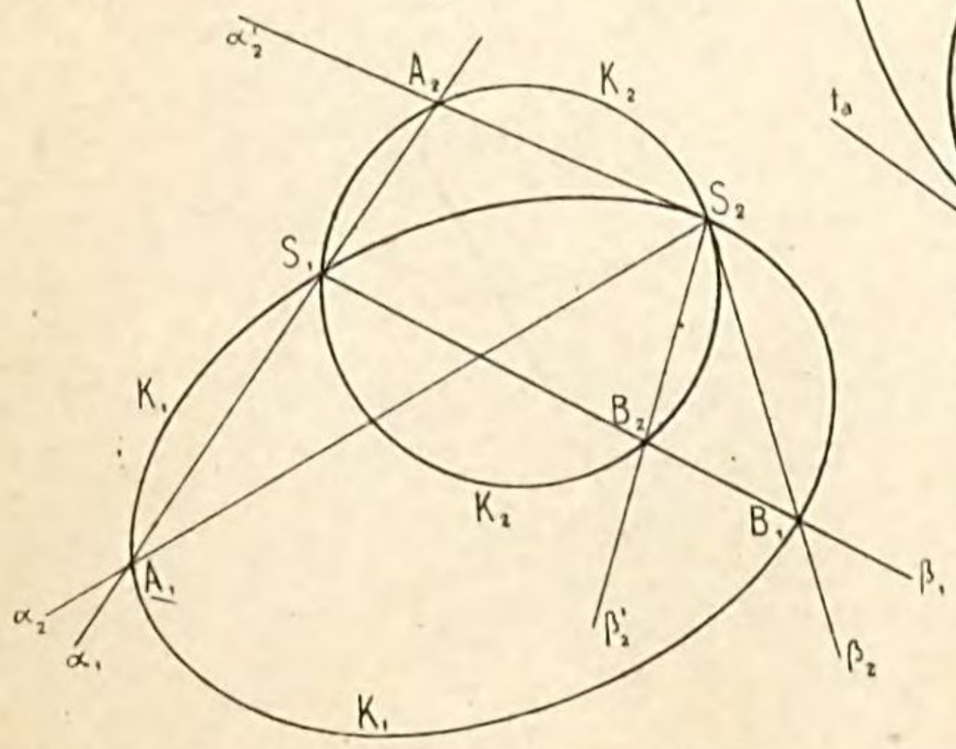


Fig. 154.



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgä

Fig. 145.

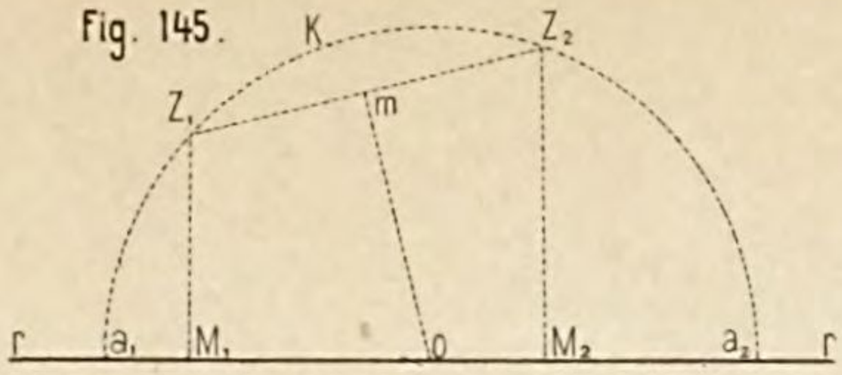


Fig. 146.

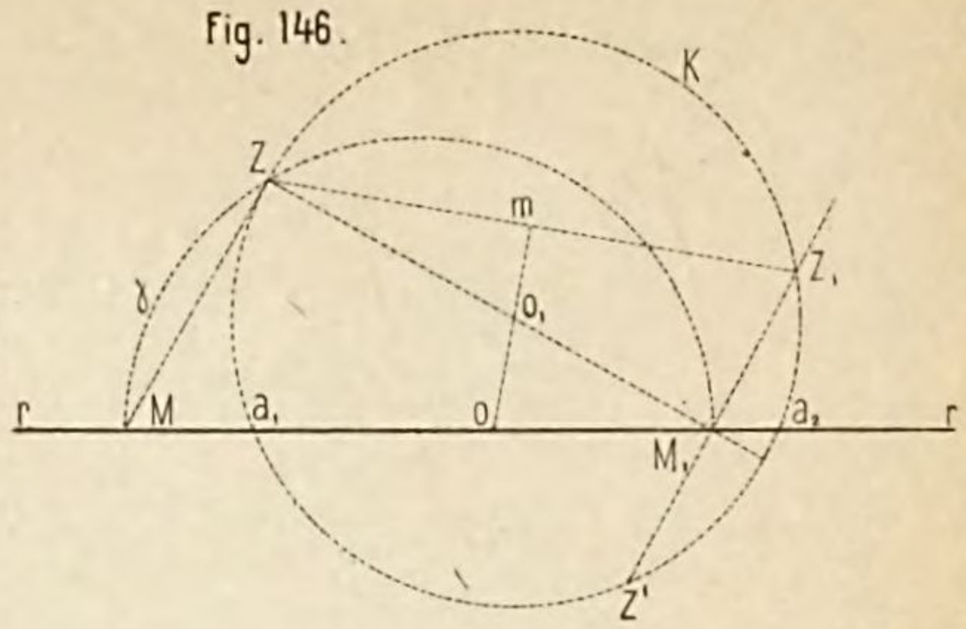


Fig. 150.

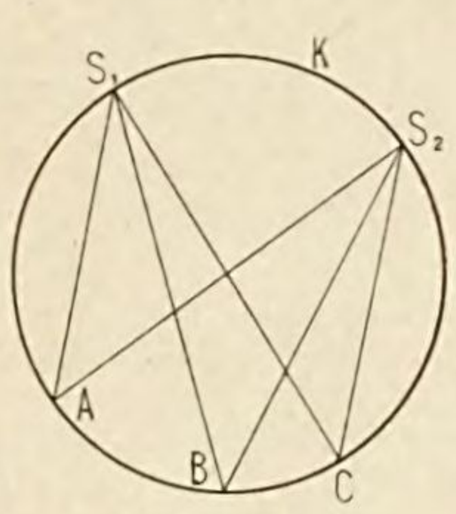


Fig. 149.

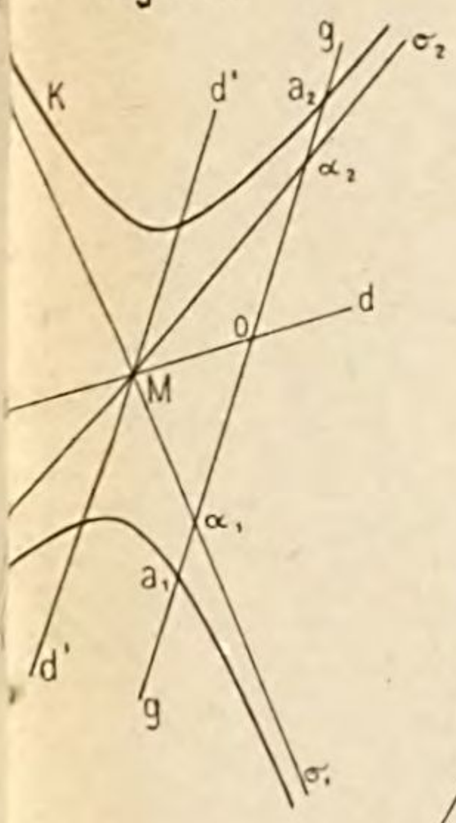


Fig. 151.

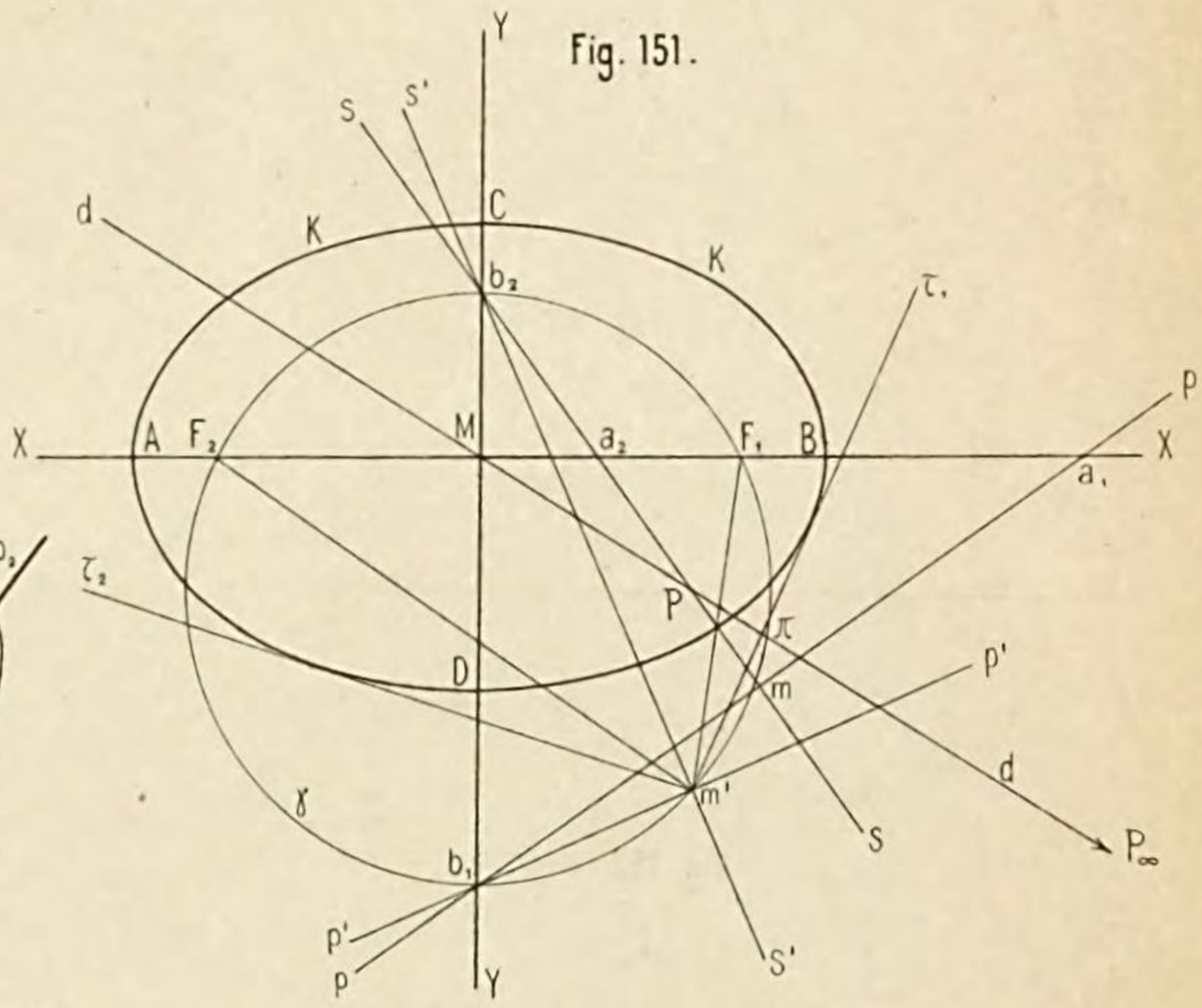


Fig. 155.

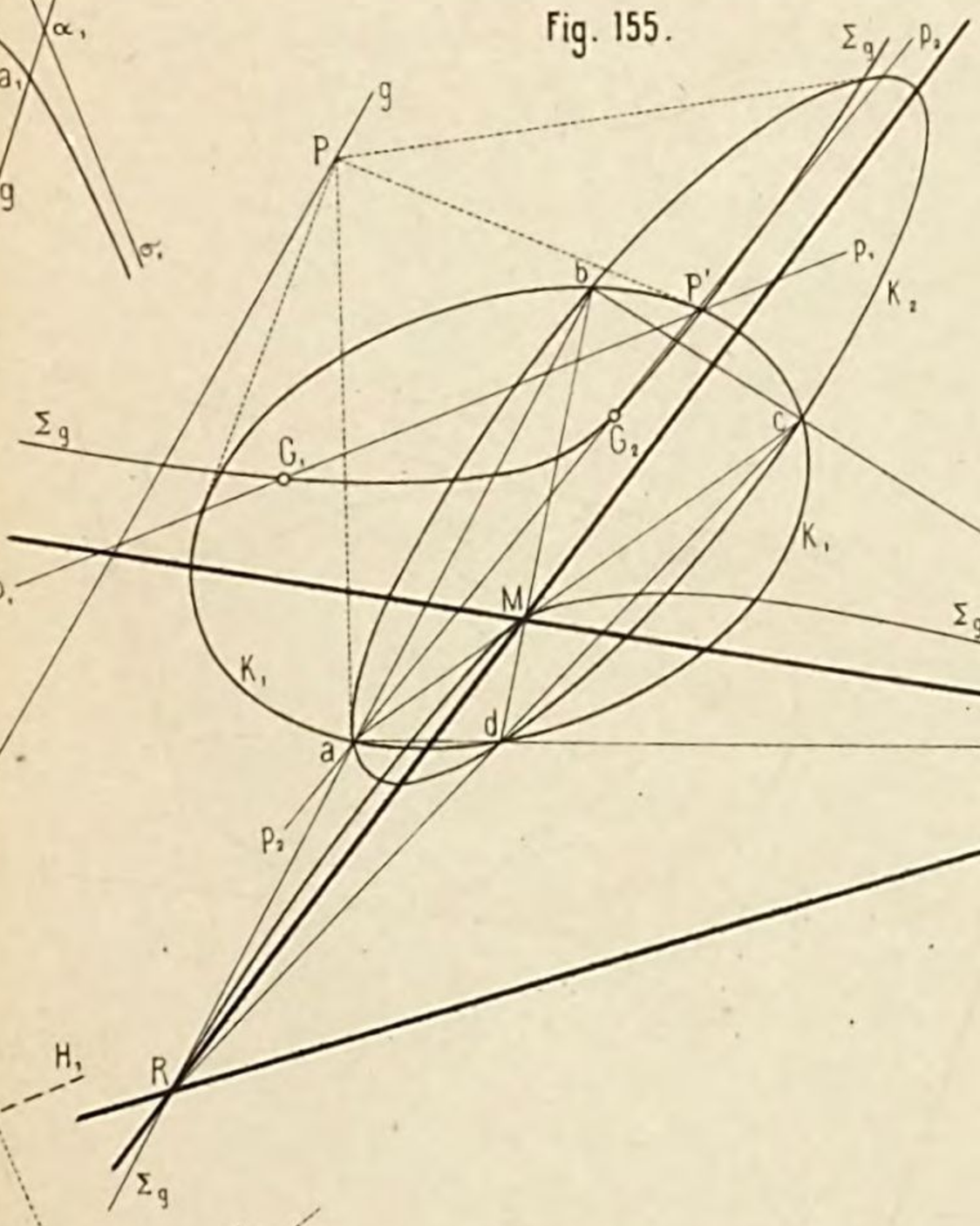


Fig. 159.

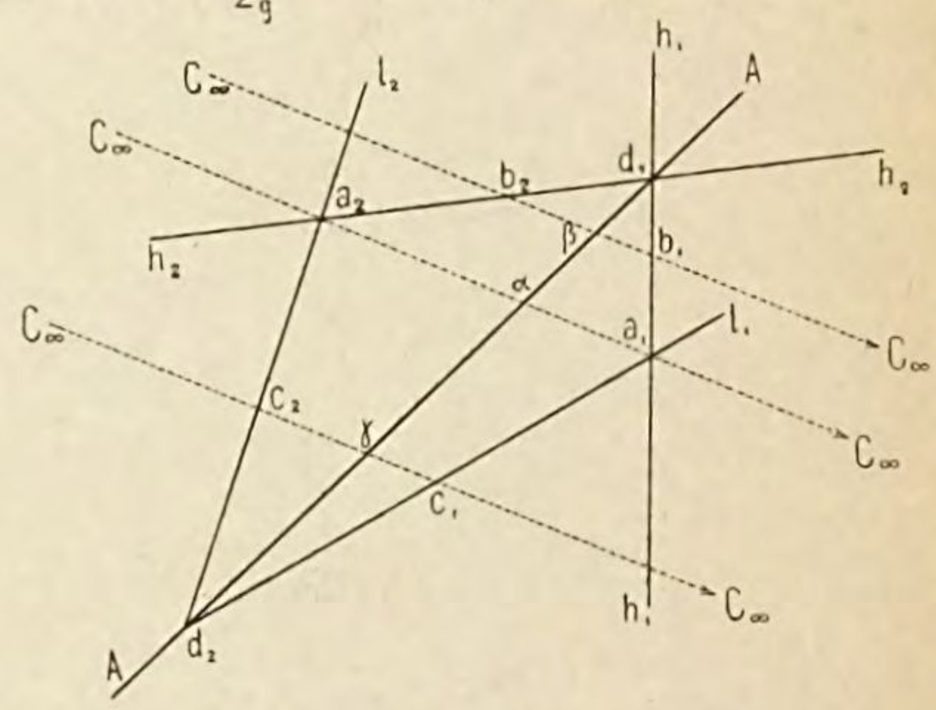
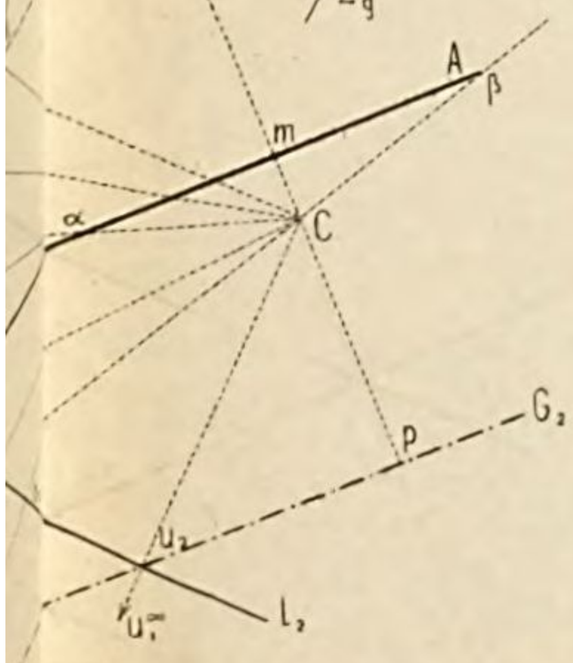


Fig. 158.



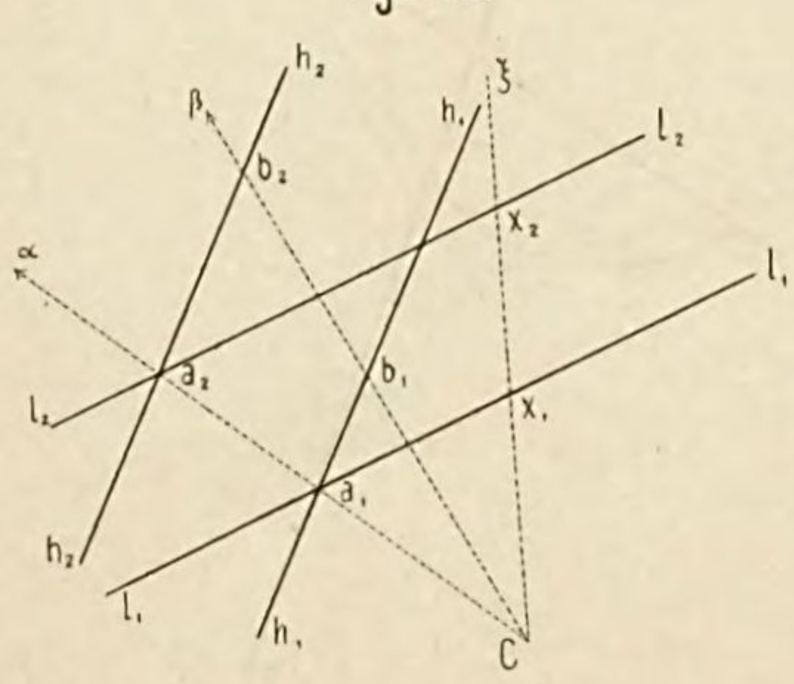
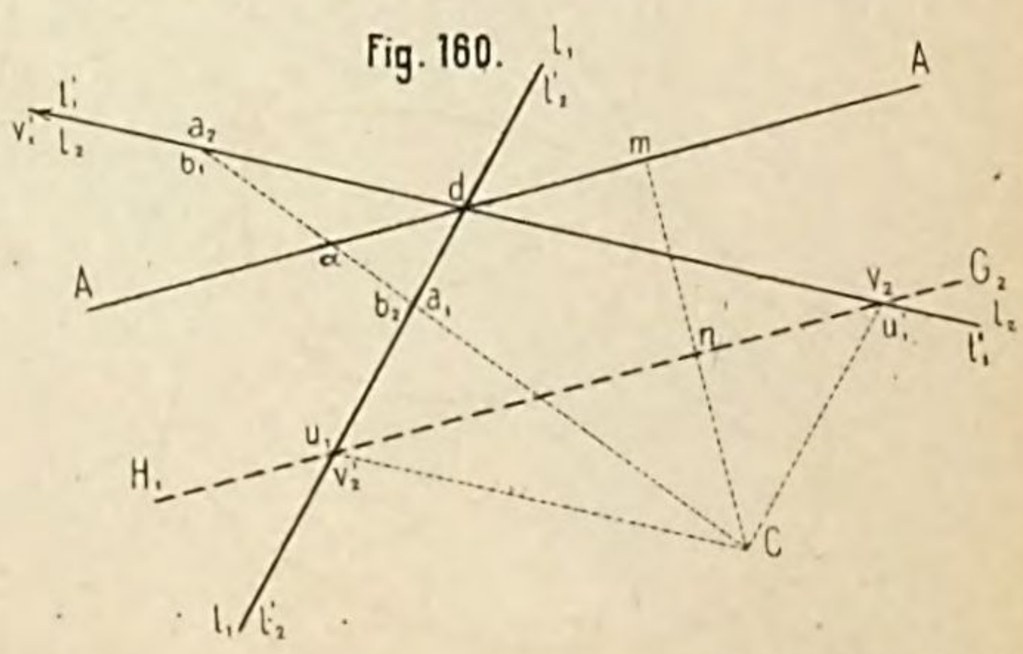


Fig. 160.



ner's Buchhandlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka.

Fig. 161.

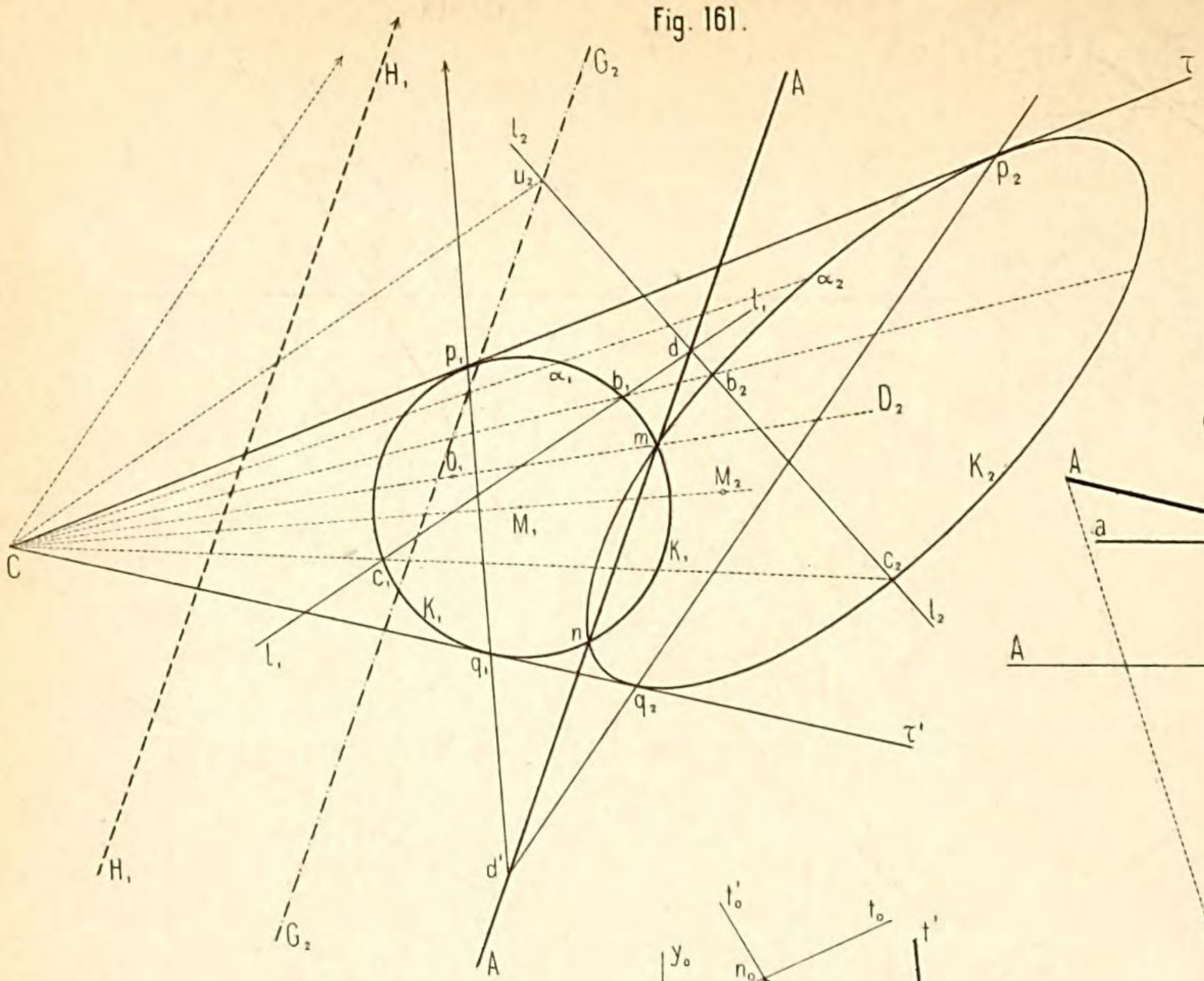


Fig. 167.

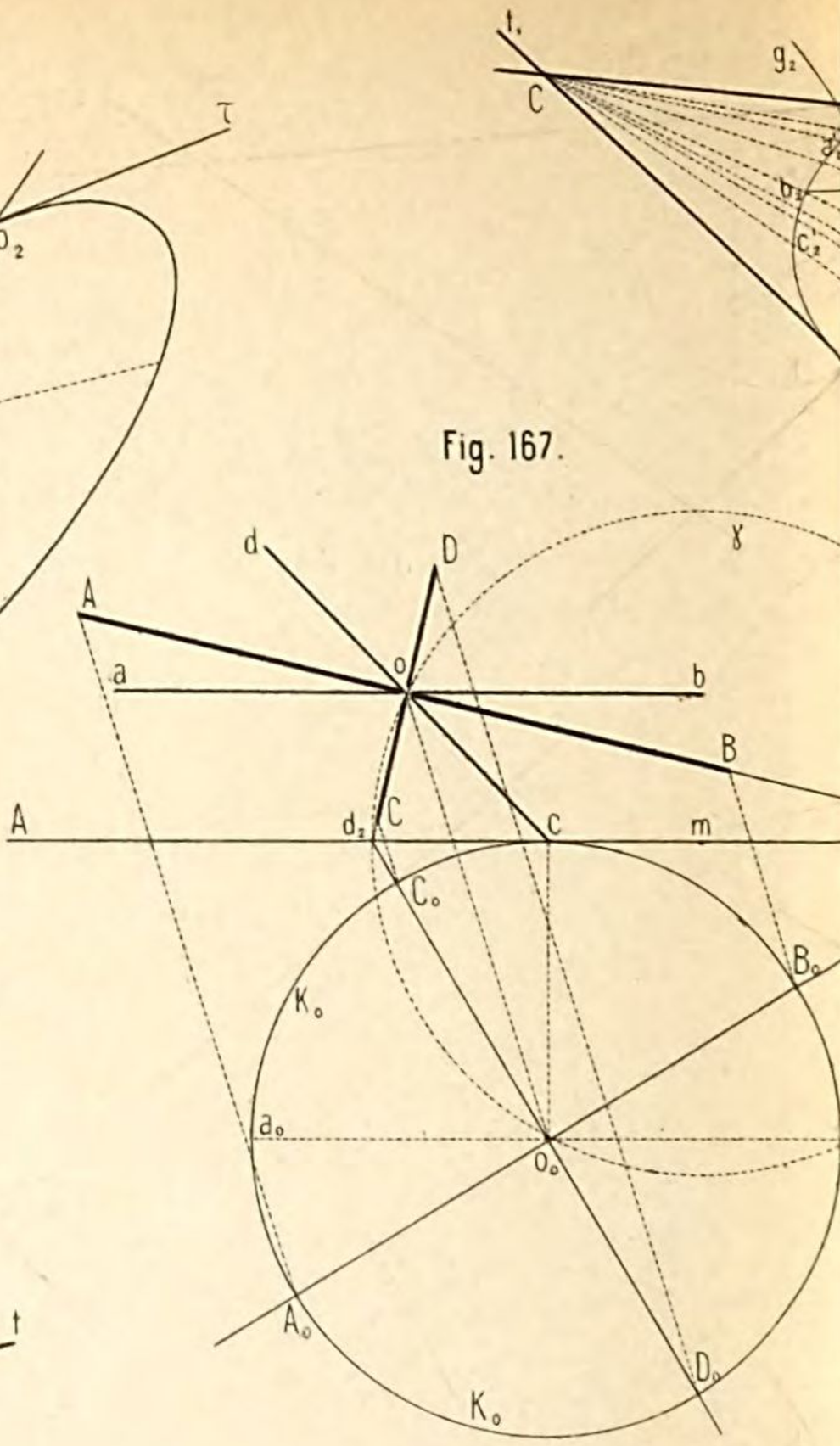


Fig. 170.

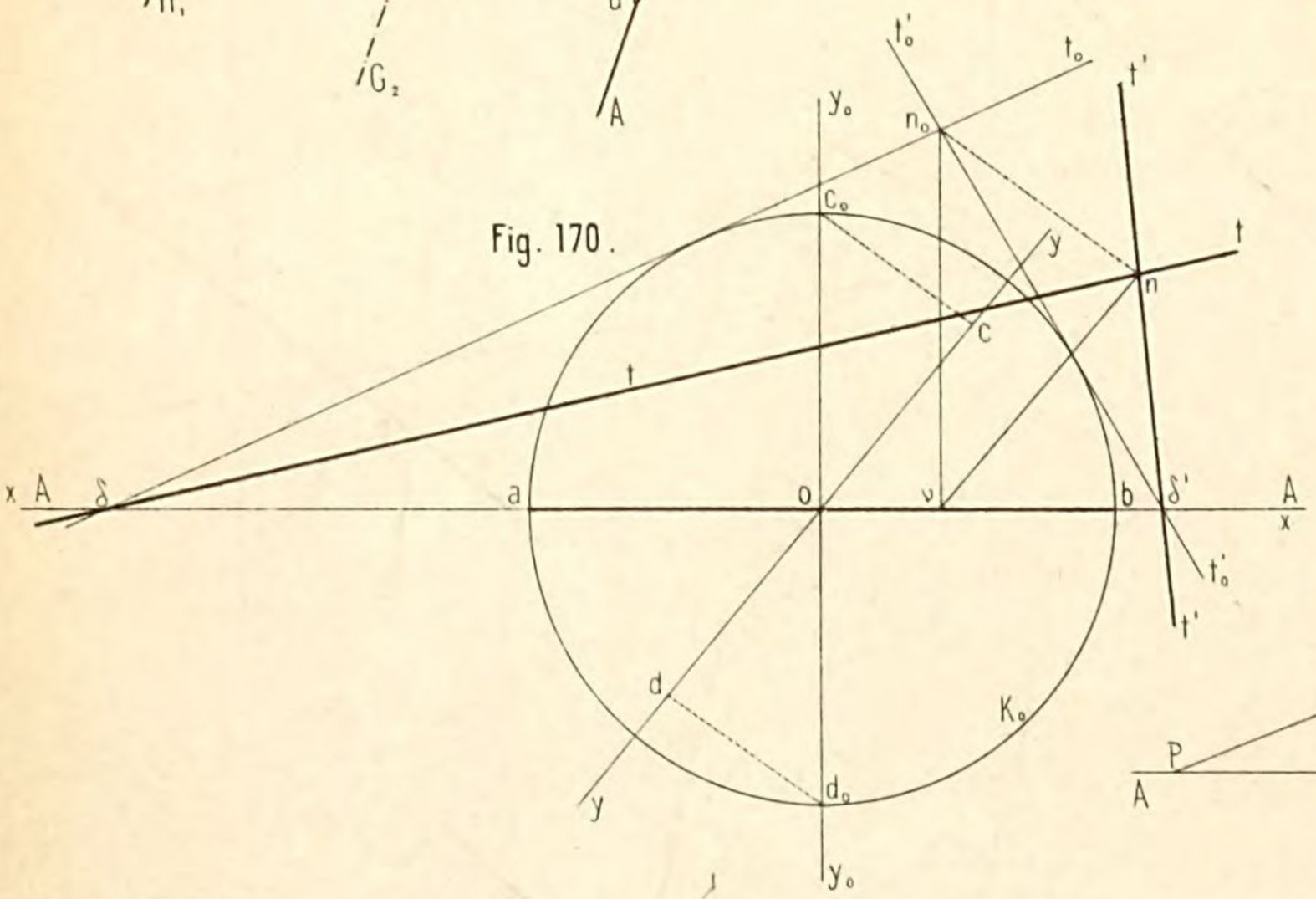


Fig. 169.

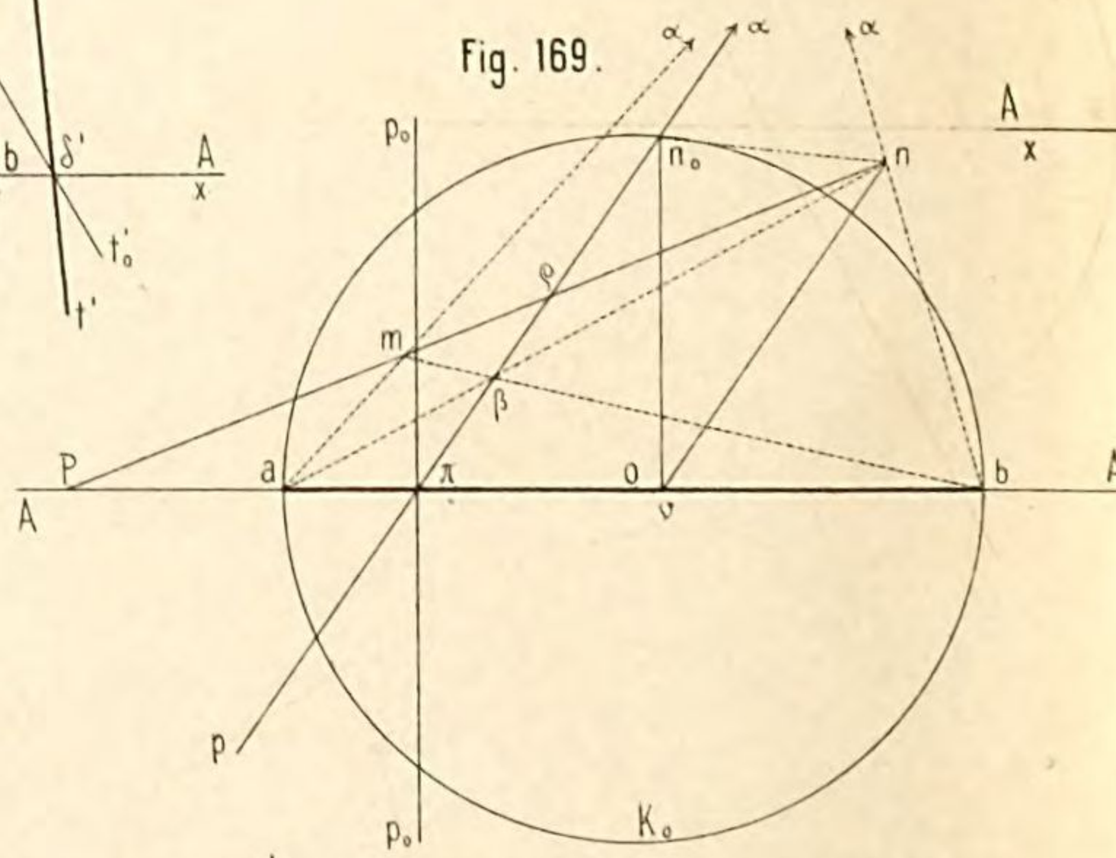


Fig. 166.

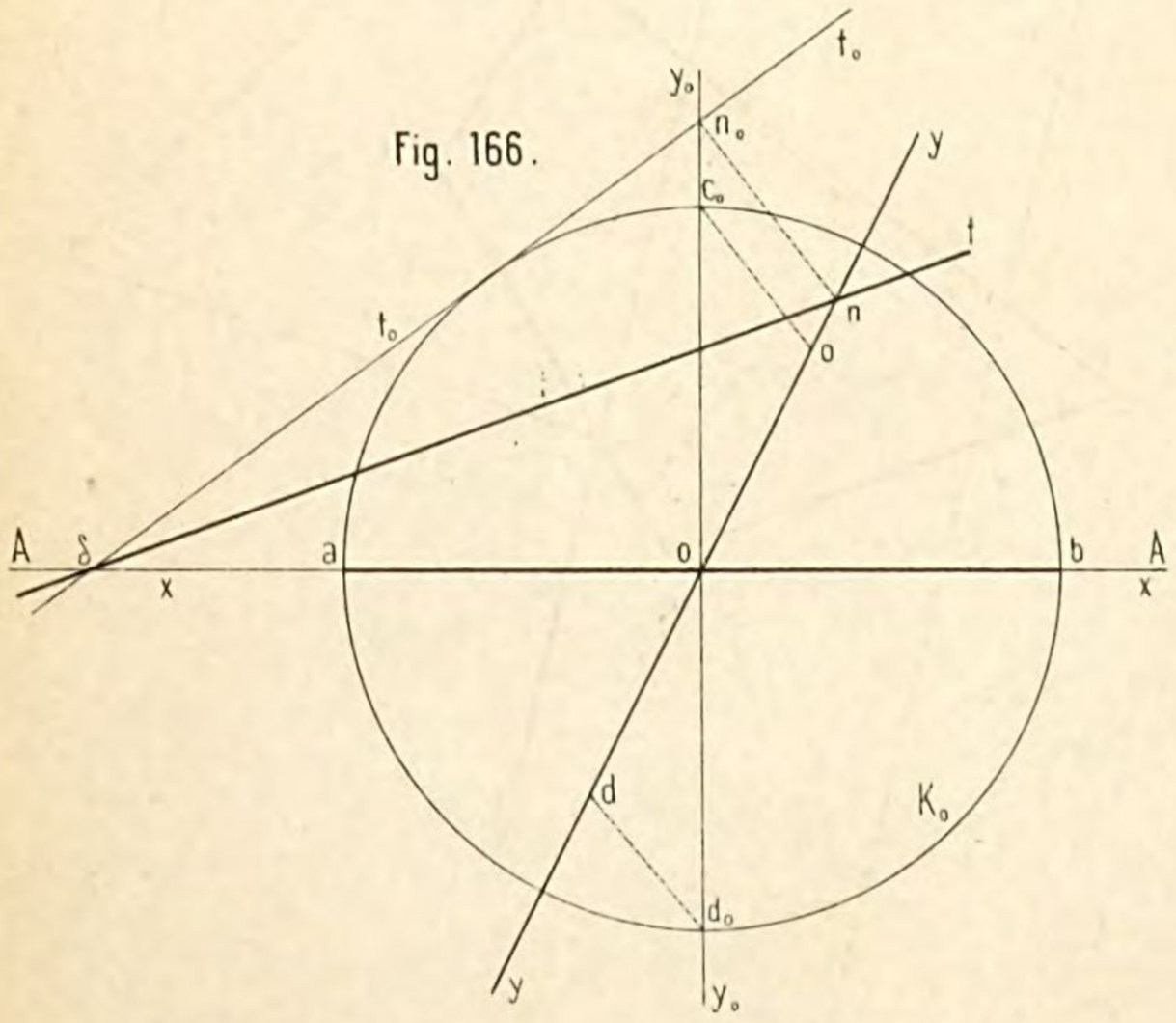
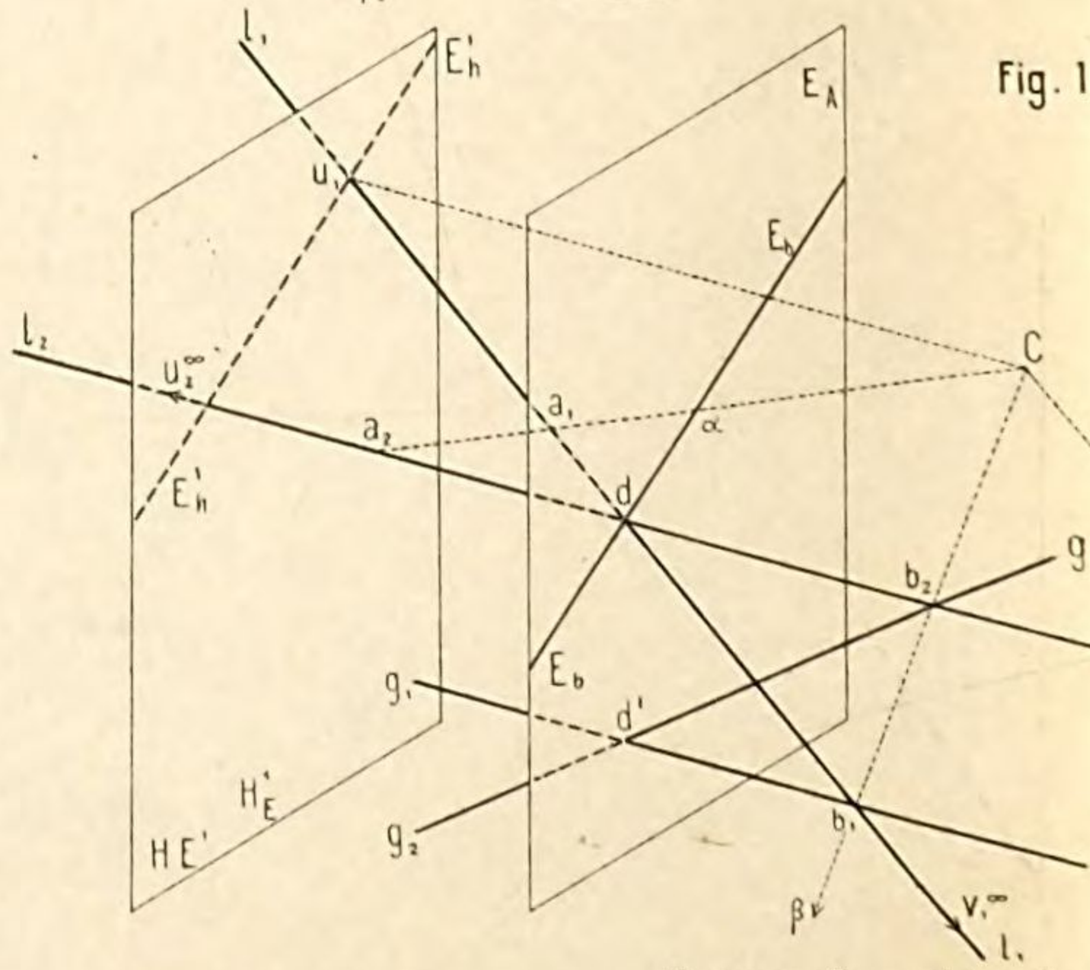


Fig. 1



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt

Verlag v. Baumgärtner's

Fig. 162.

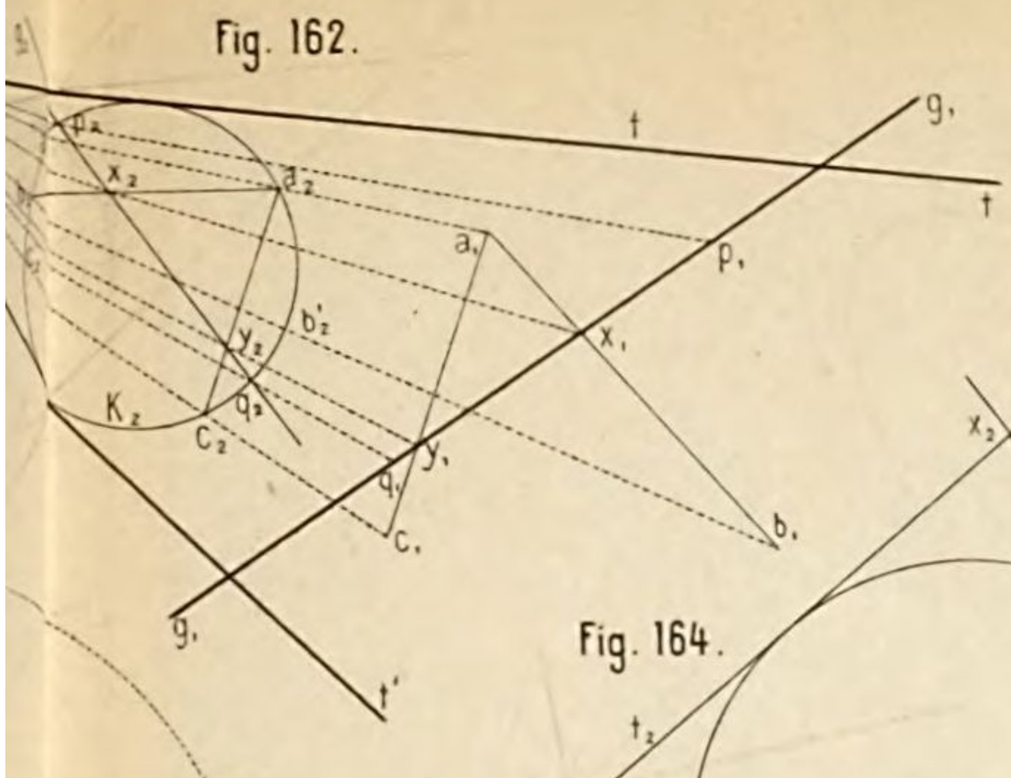


Fig. 164.

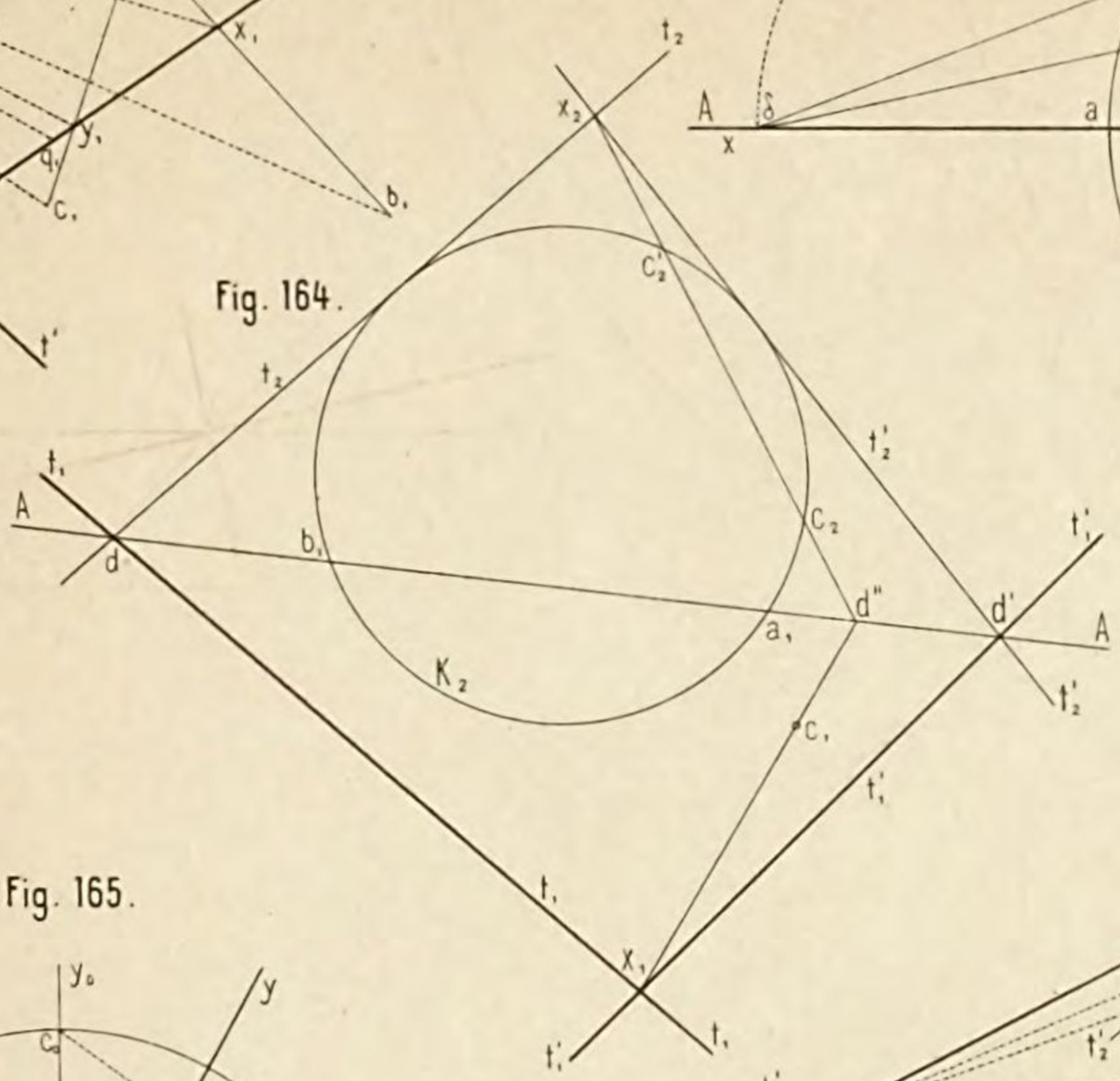


Fig. 165.

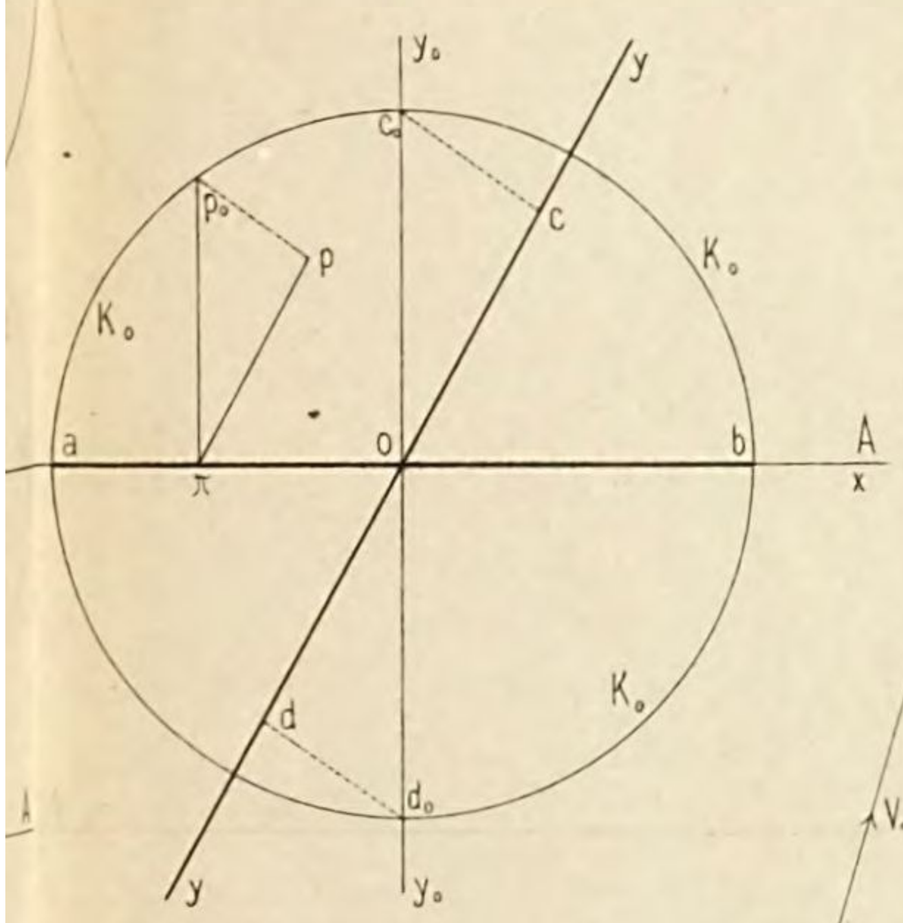


Fig. 168.

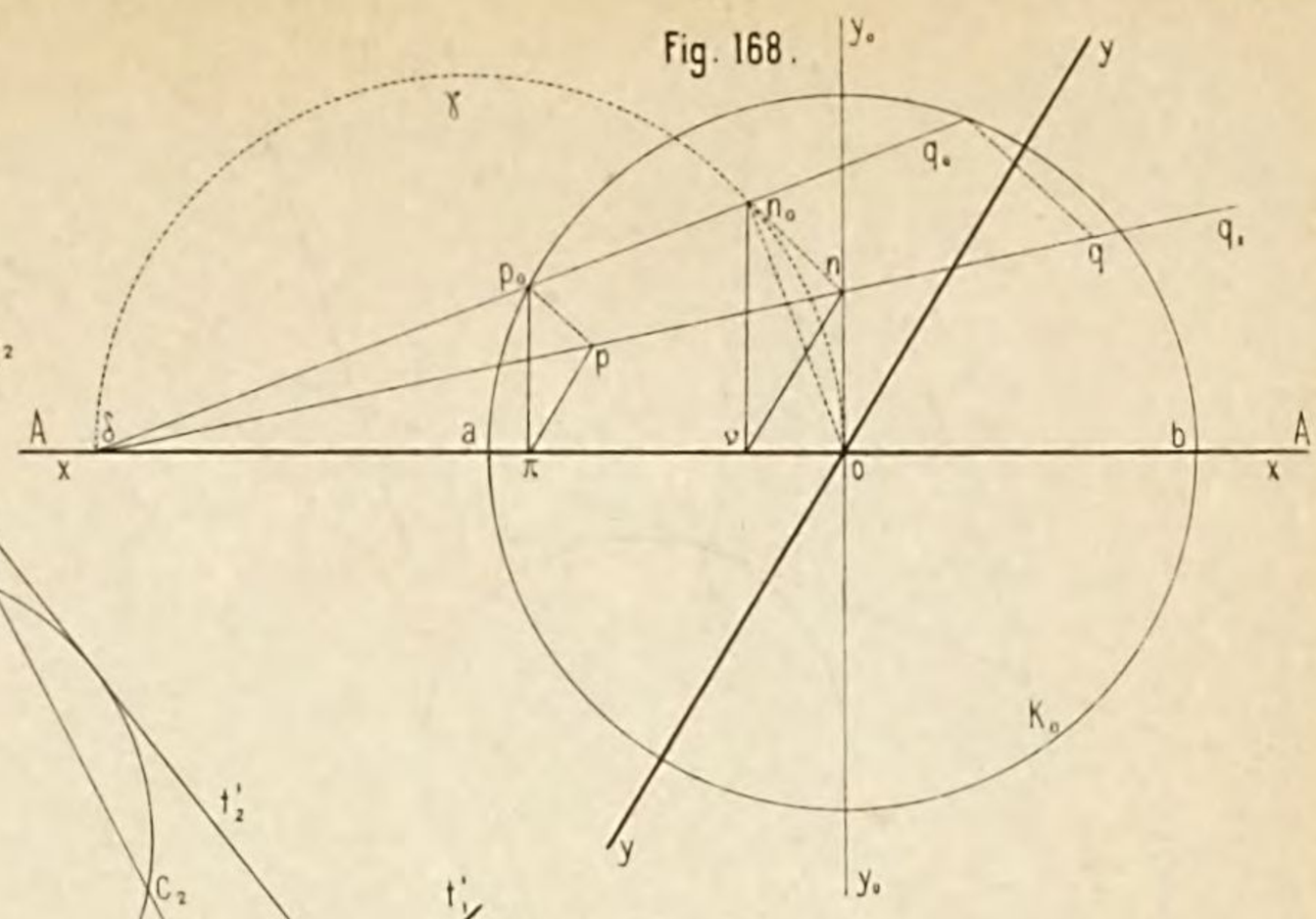


Fig. 163.

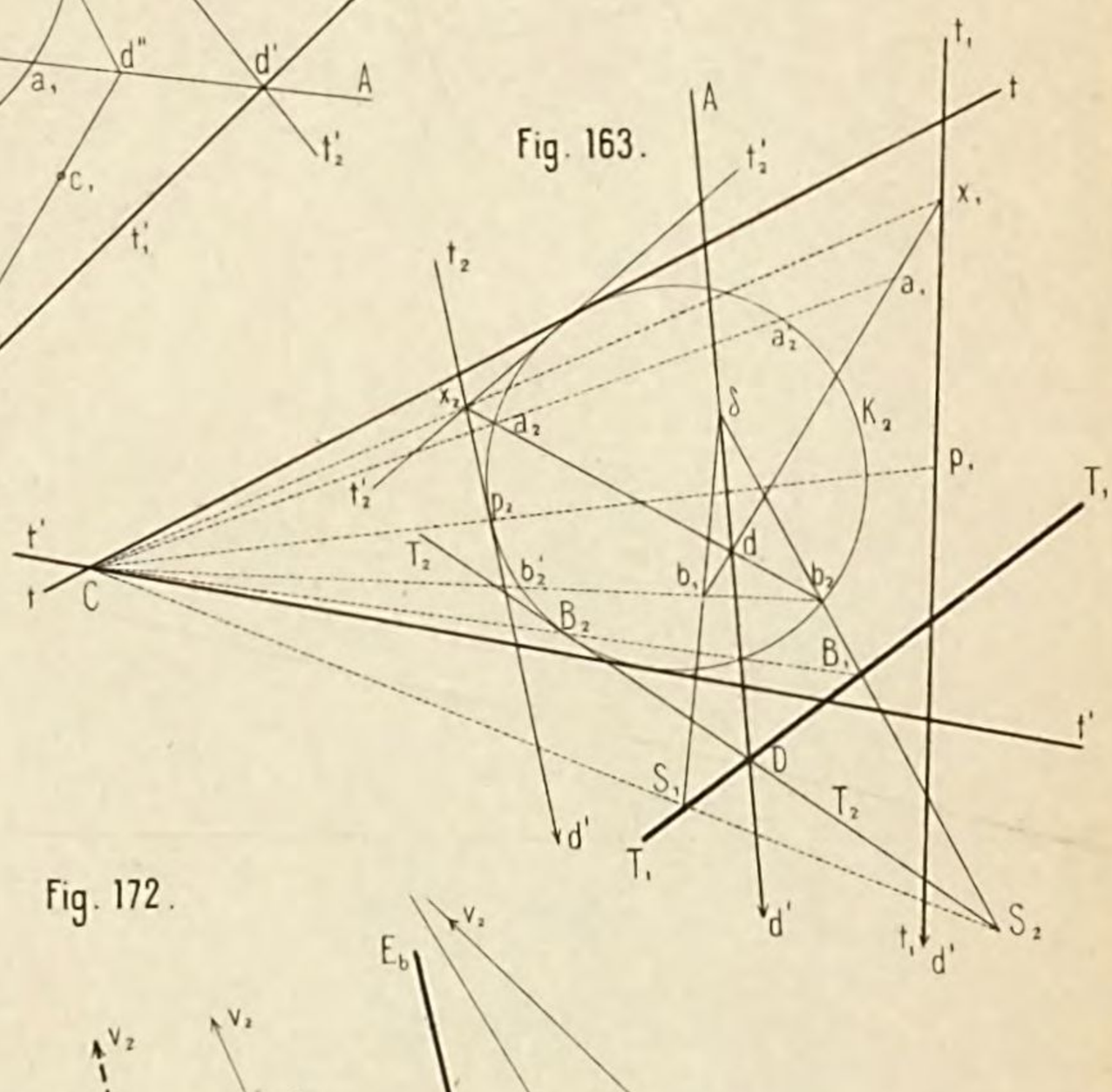
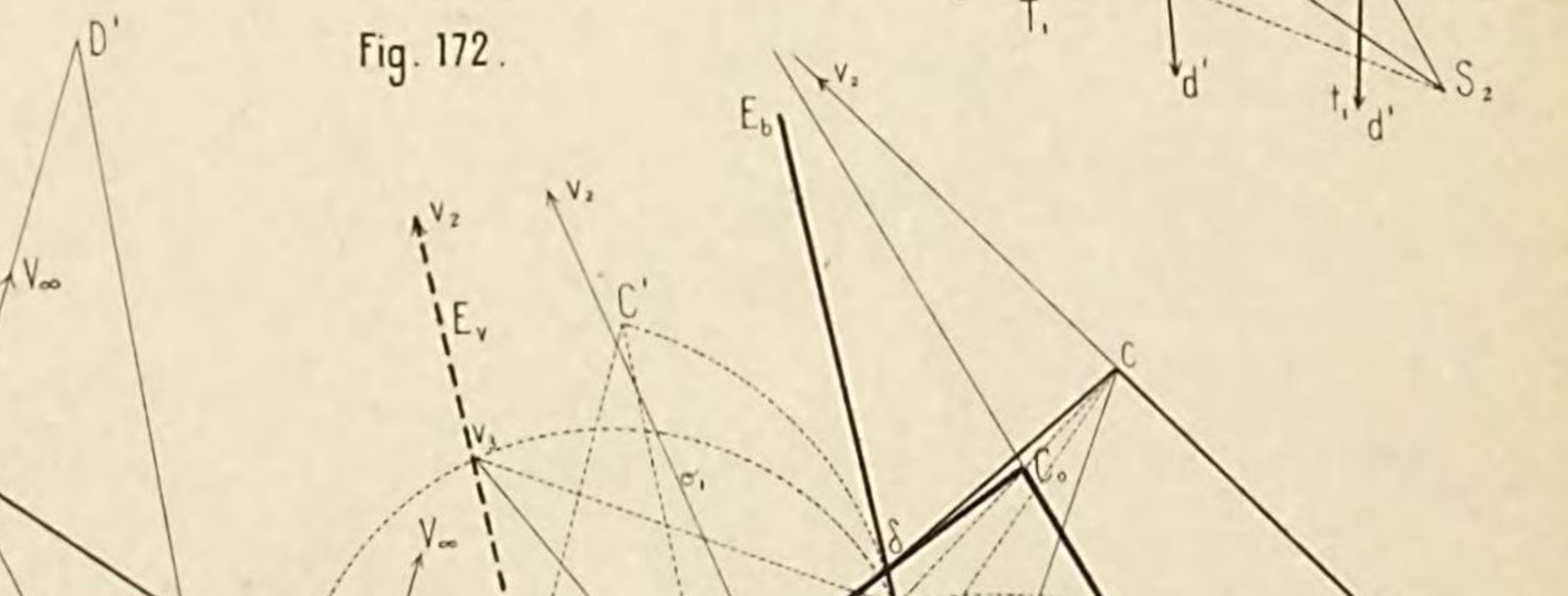
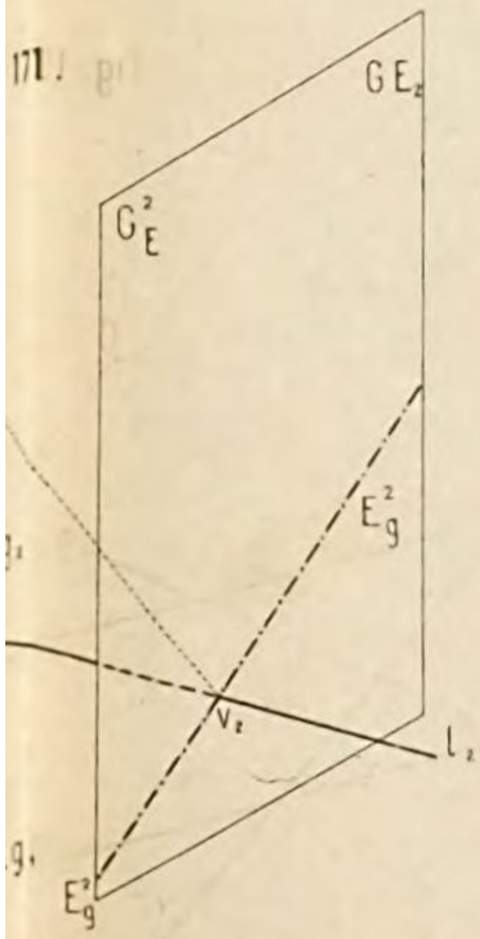


Fig. 172.





Buchhandlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka.

Fig. 173.

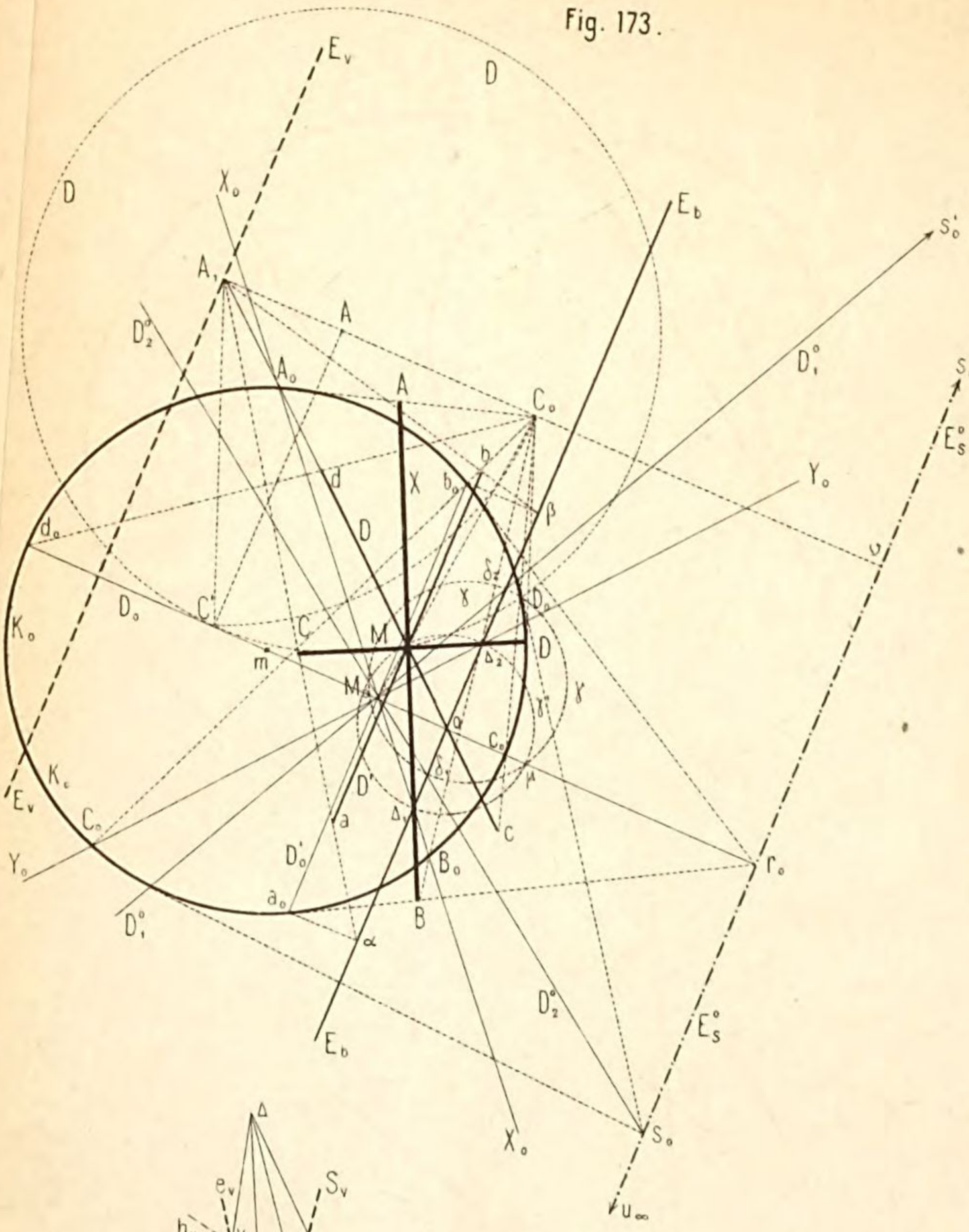


Fig. 174.

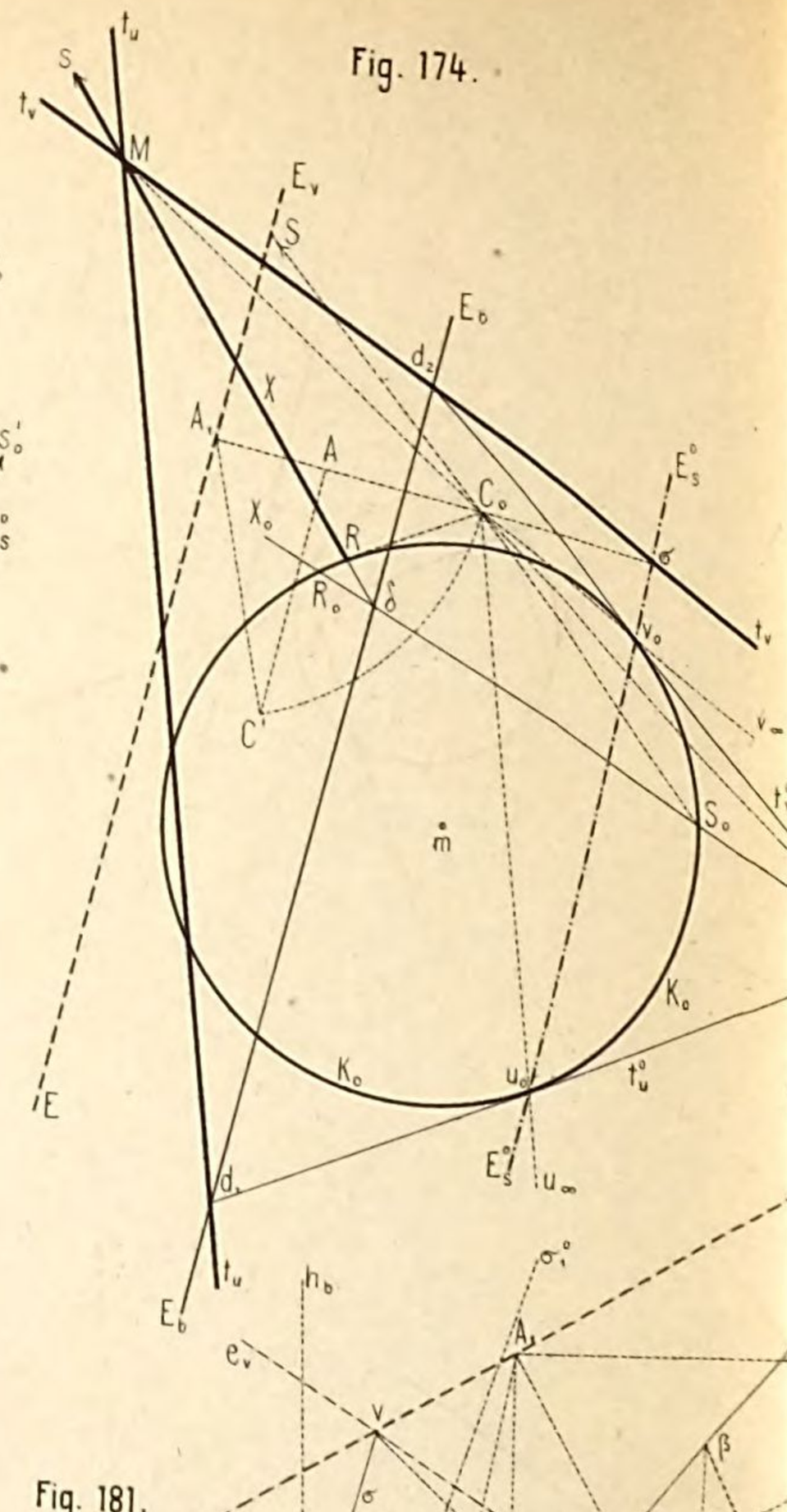


Fig. 177.

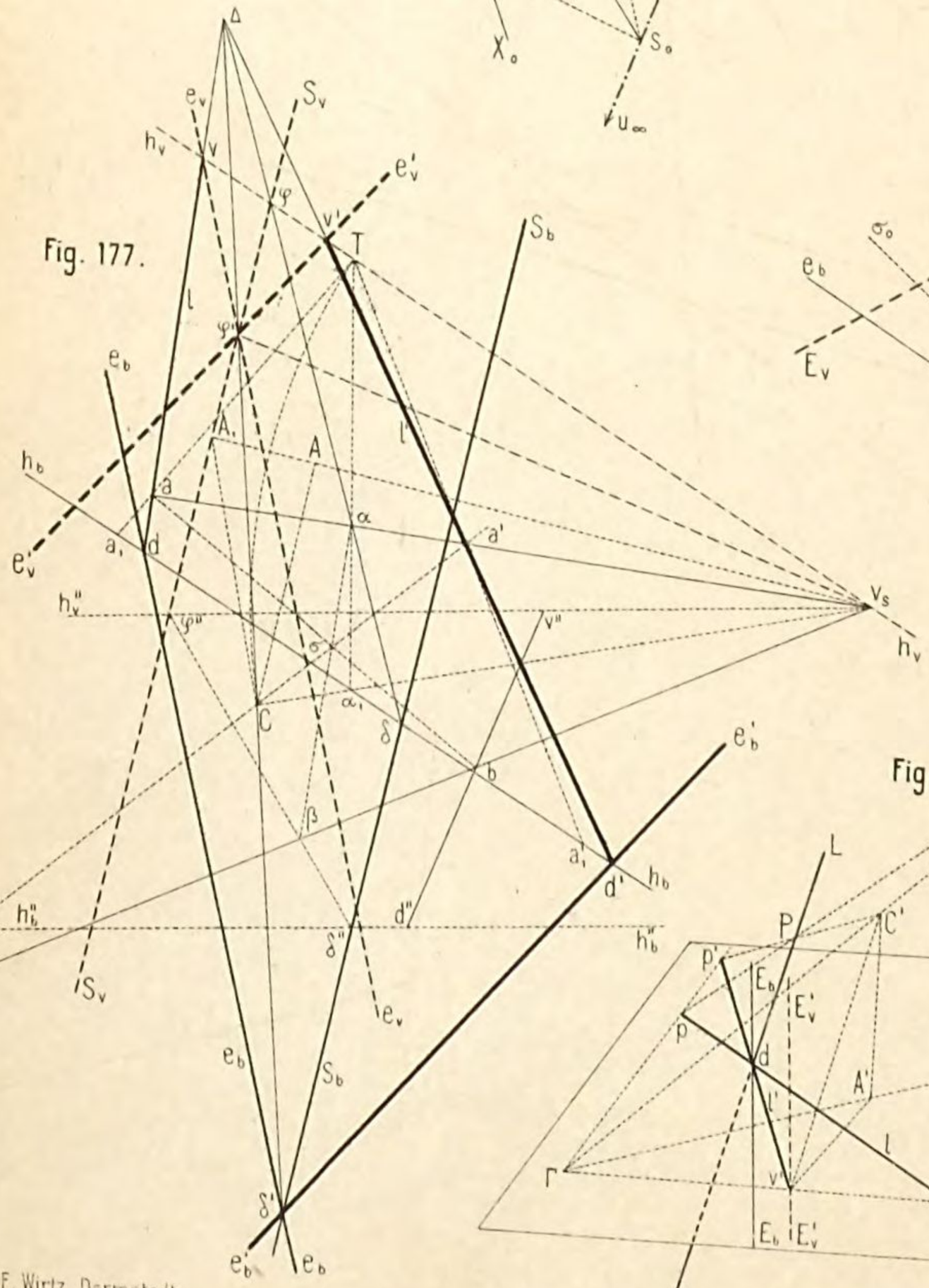


Fig. 181.

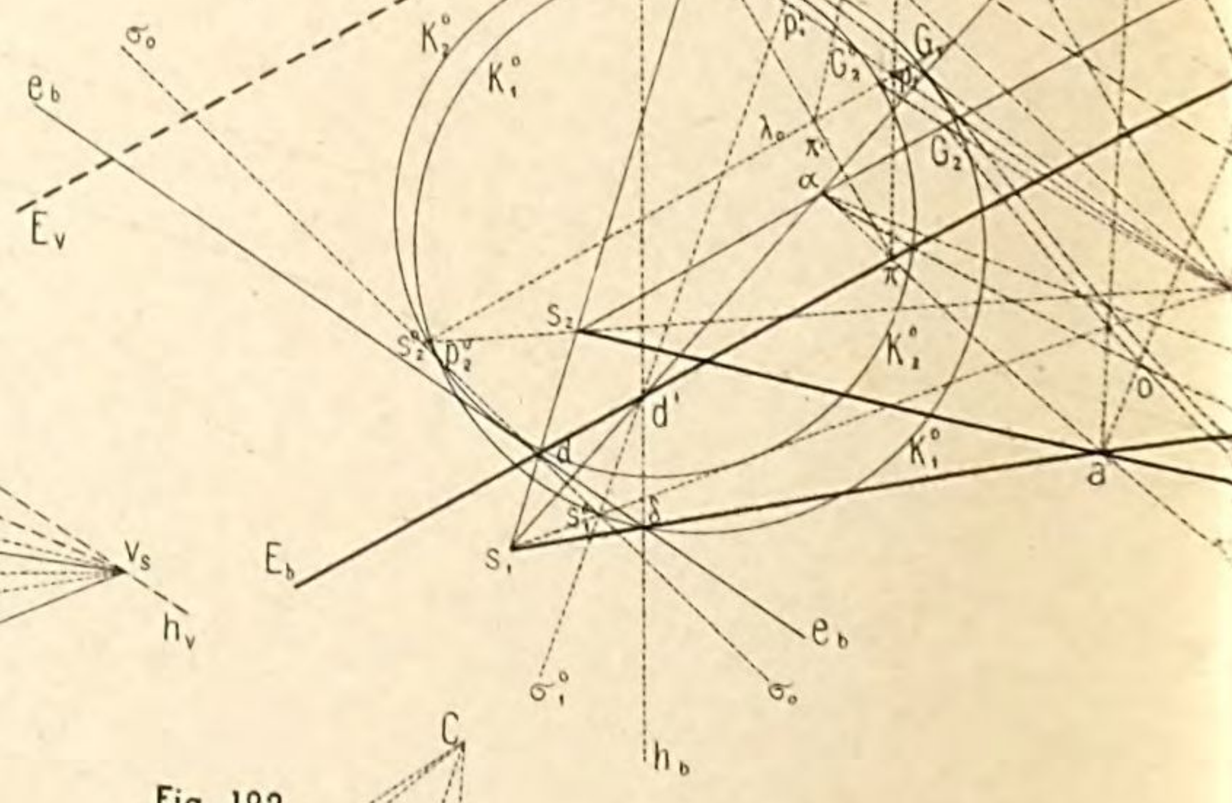


Fig. 182.

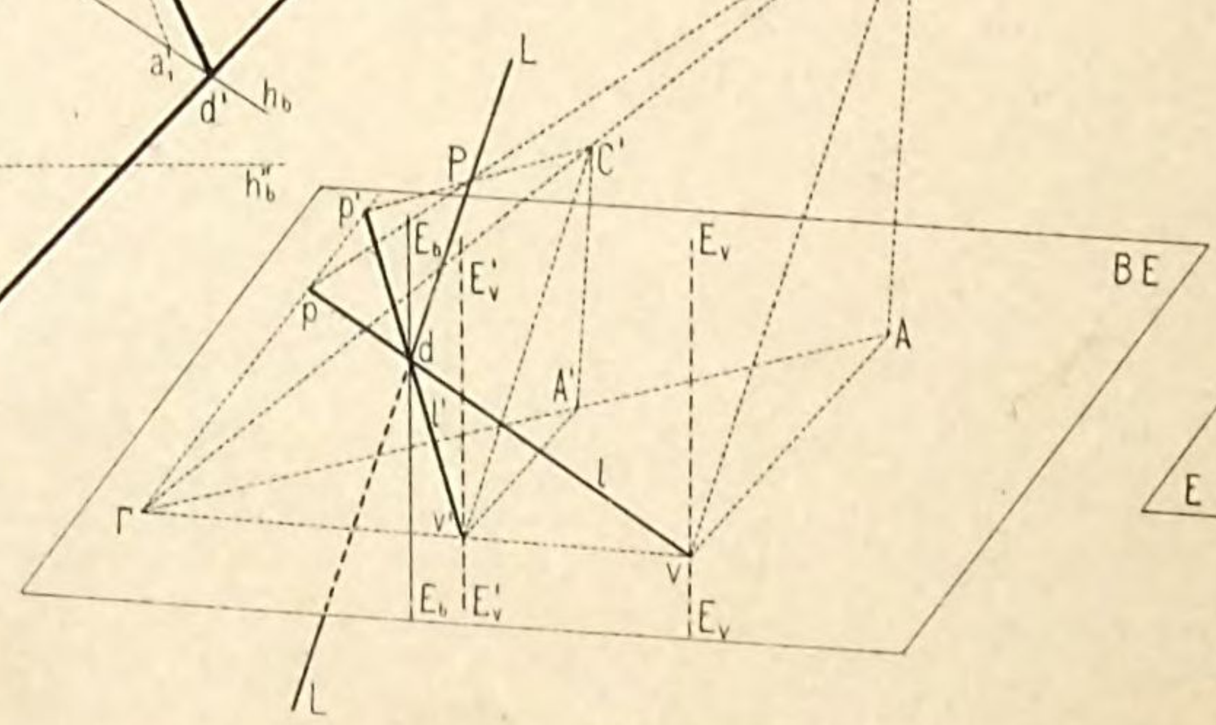
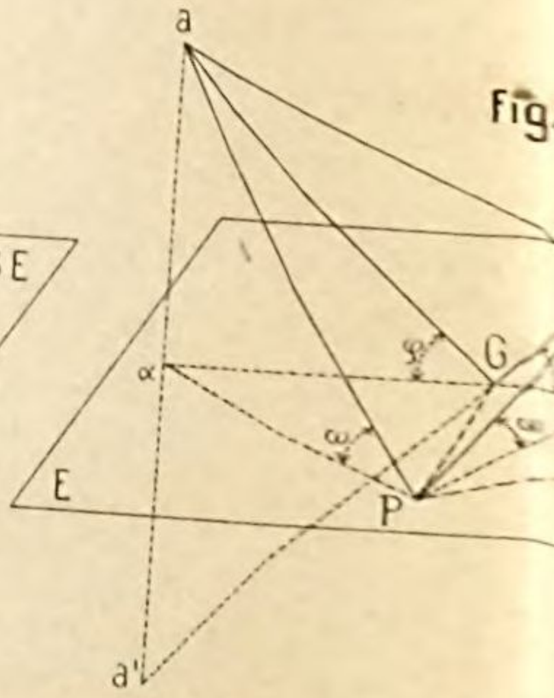


Fig.



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgärtner's

Fig. 175.

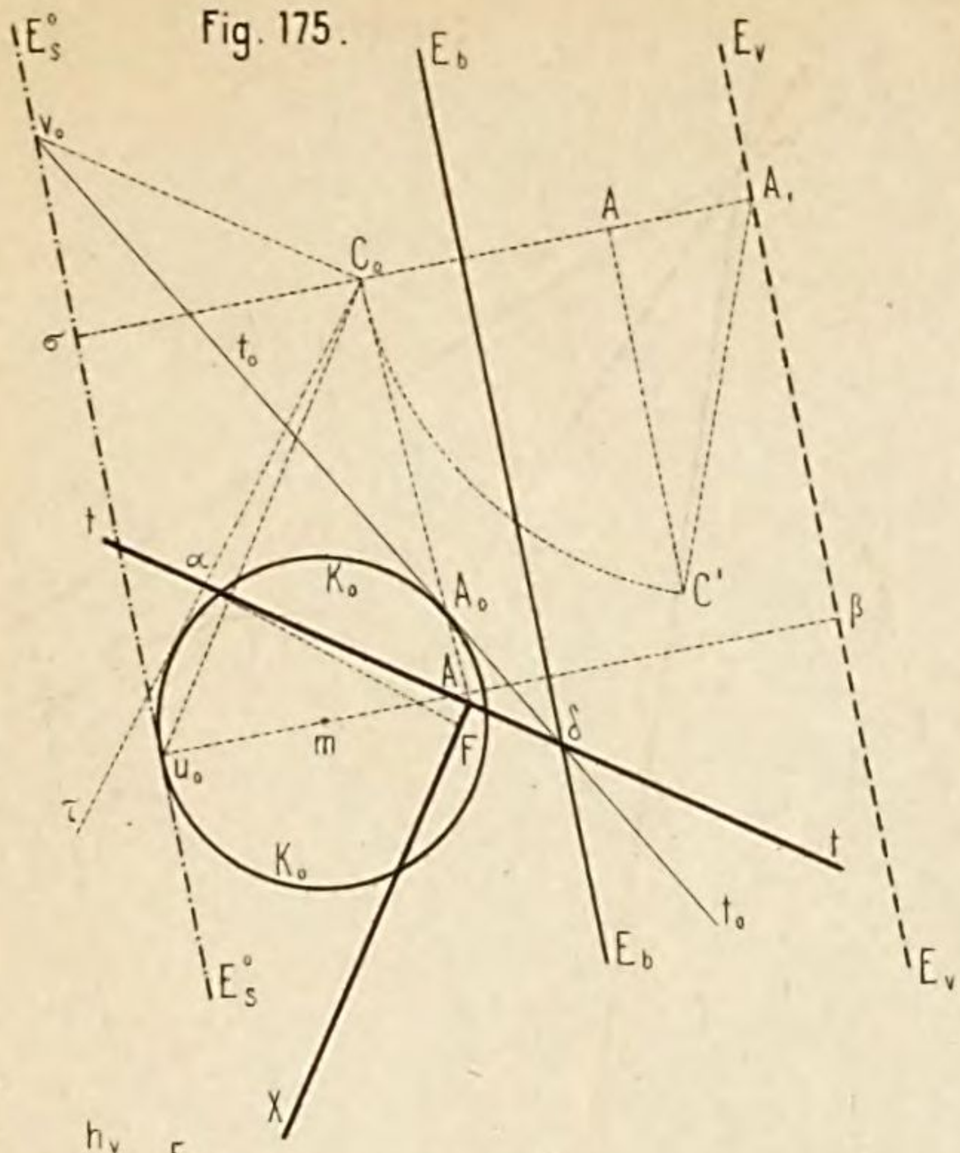
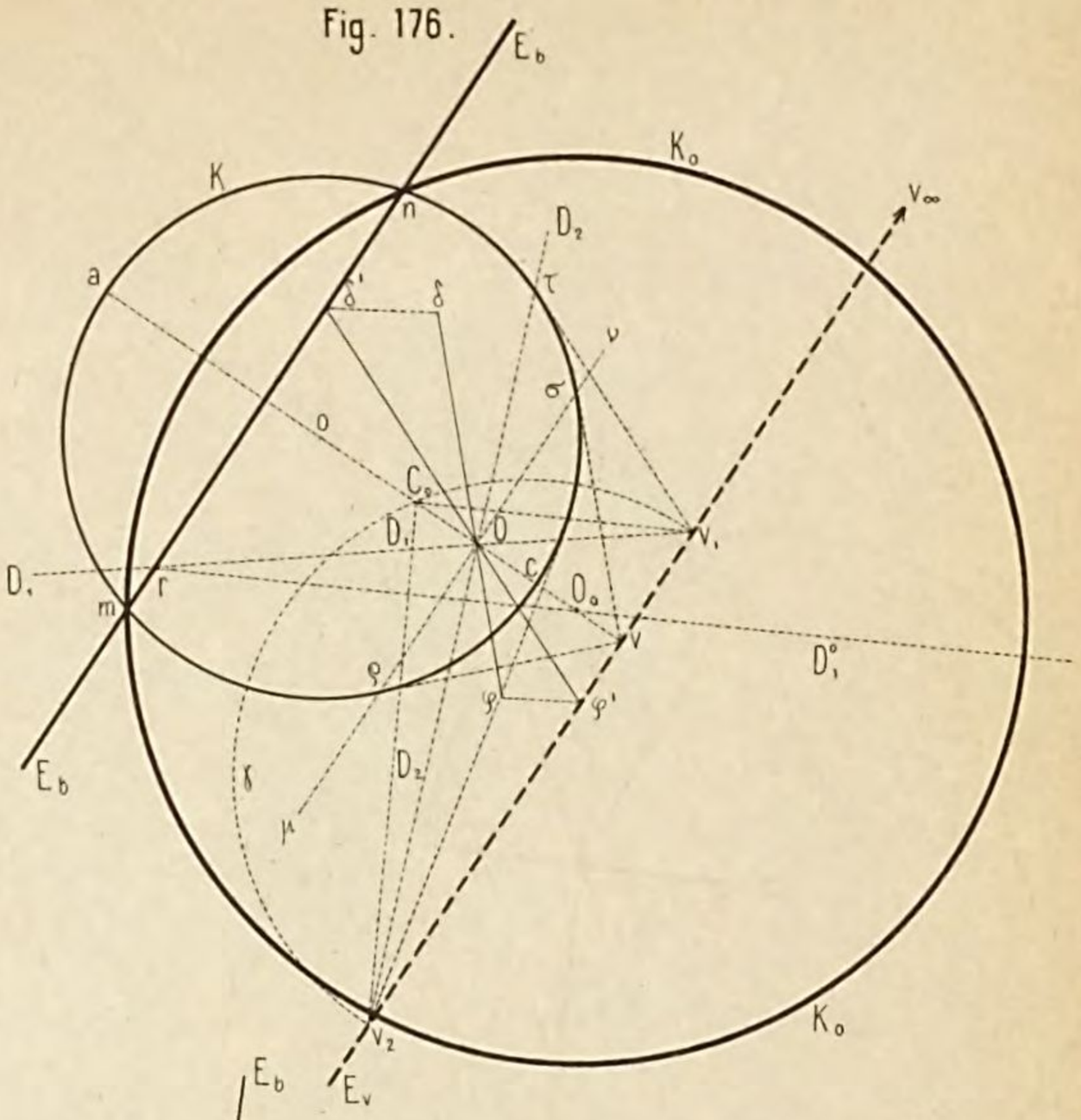


Fig. 176.



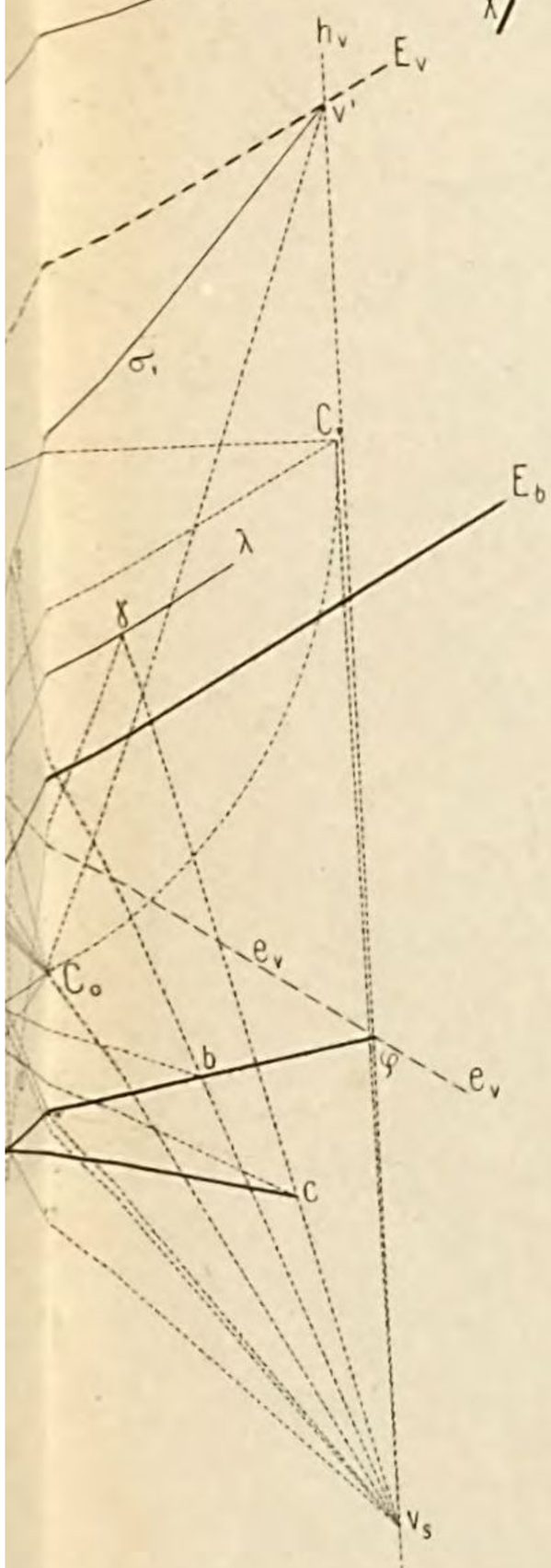


Fig. 178.

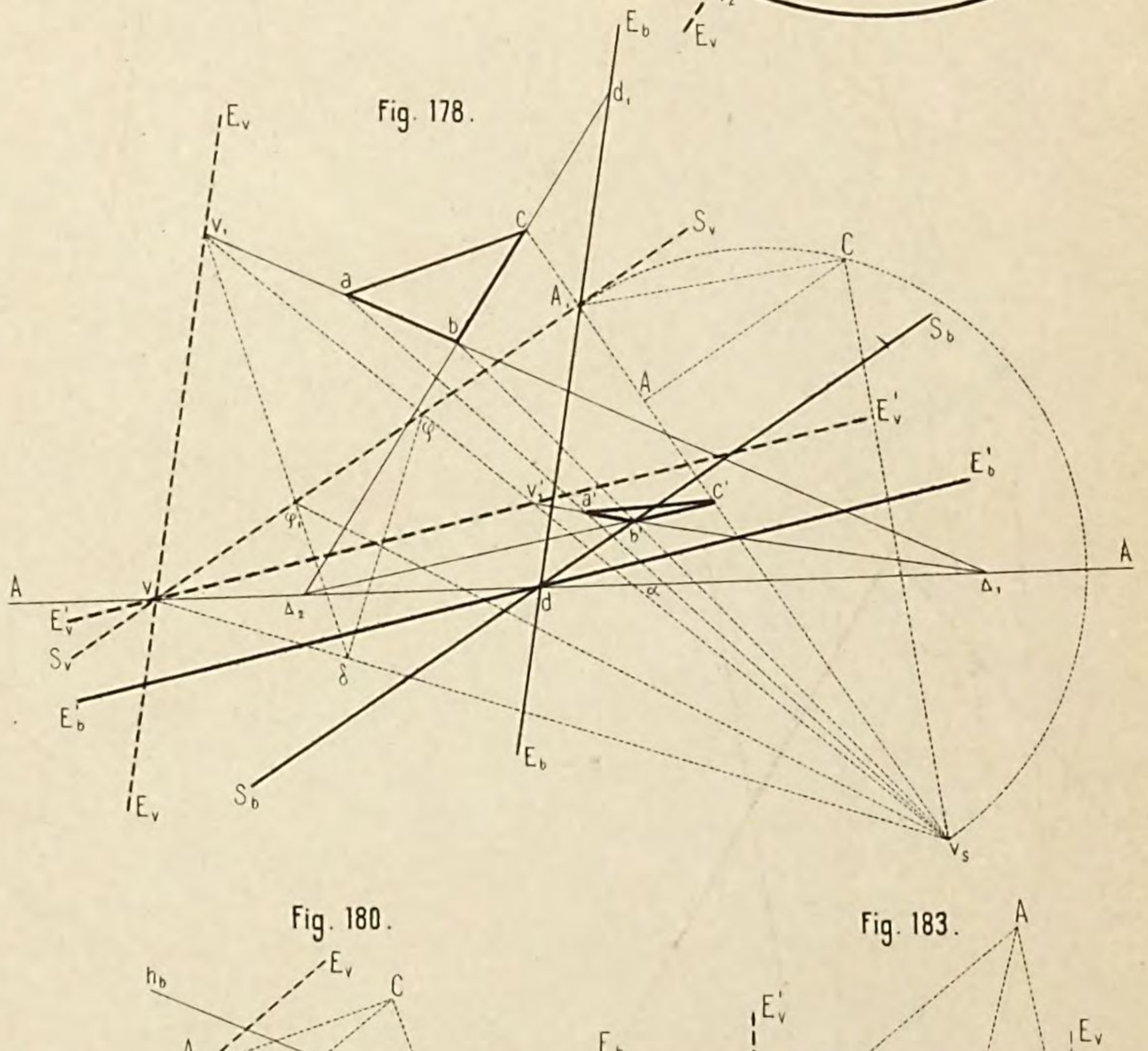


Fig. 179.

Fig. 180.

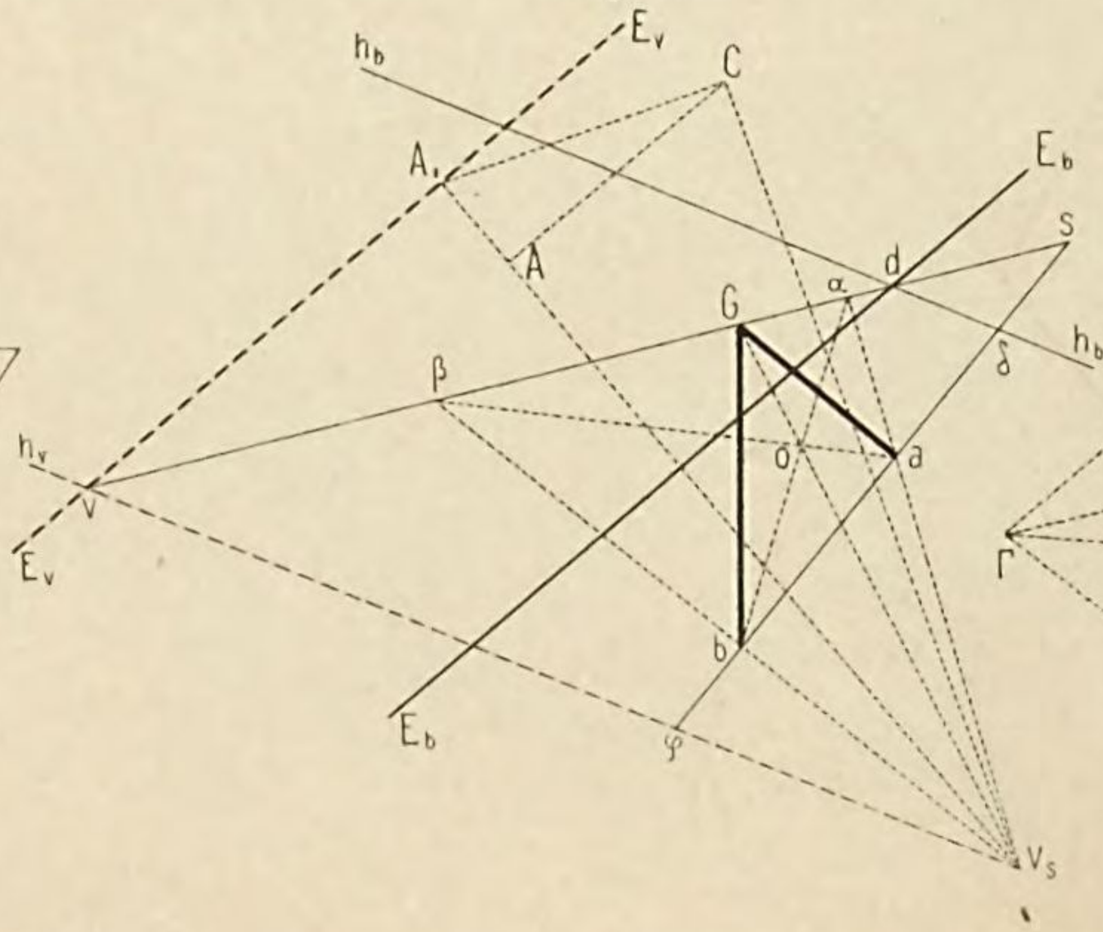
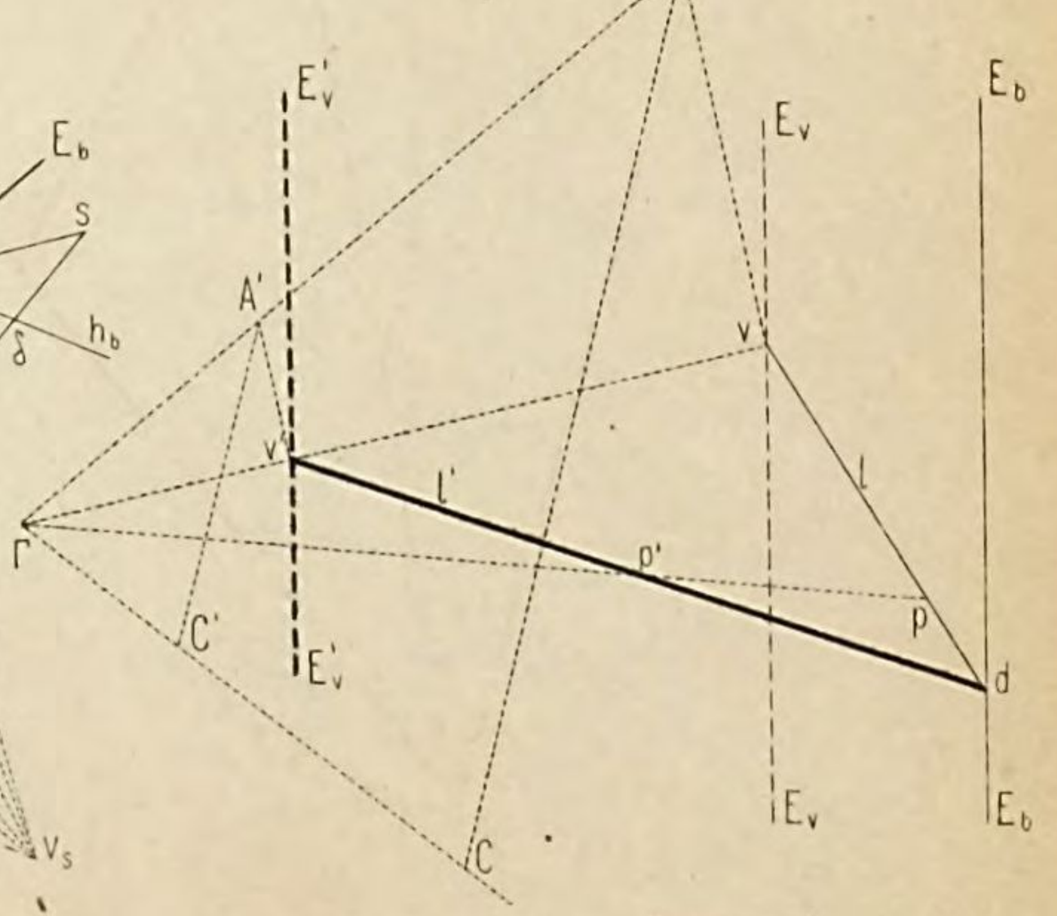


Fig. 183.



Buchhandlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka.

Fig. 184.

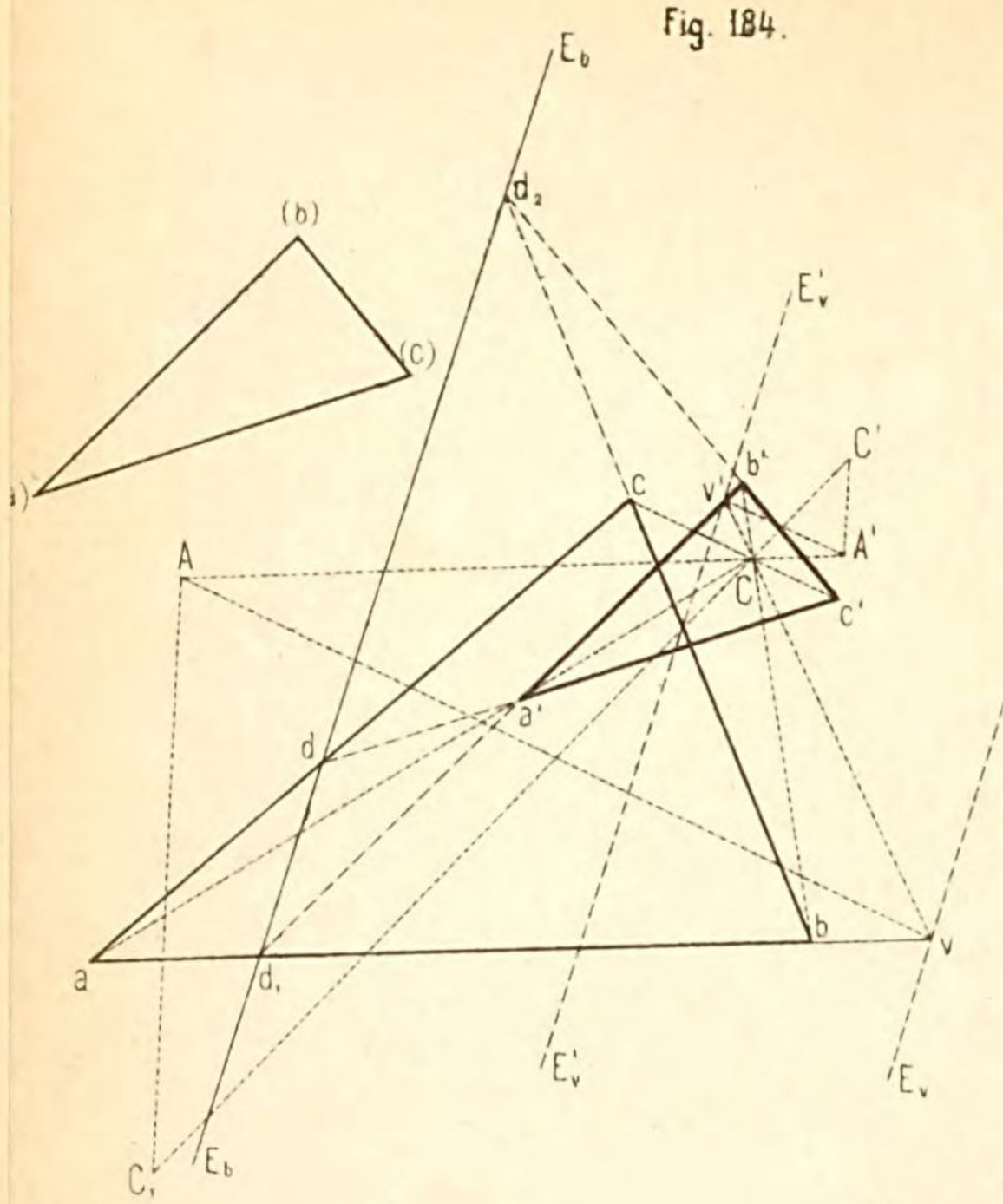


Fig. 185.

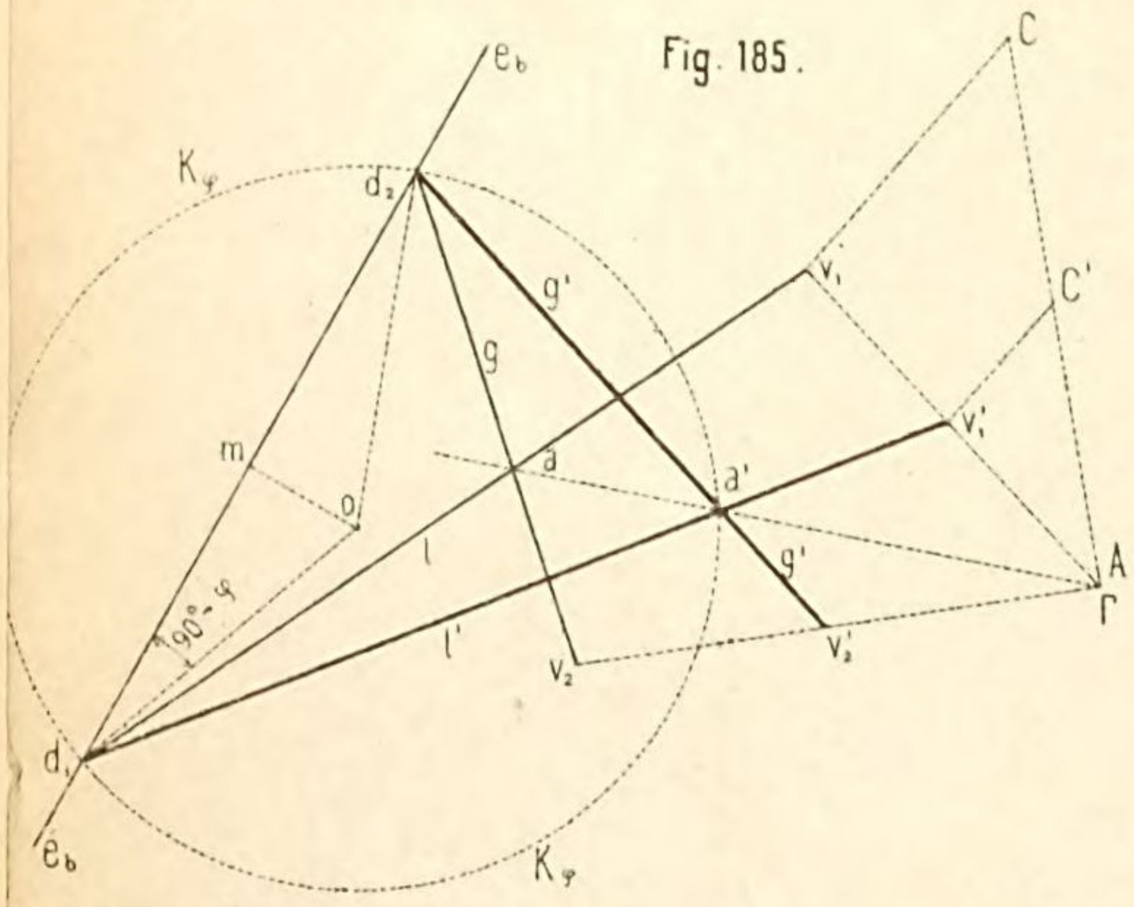


Fig. 186.

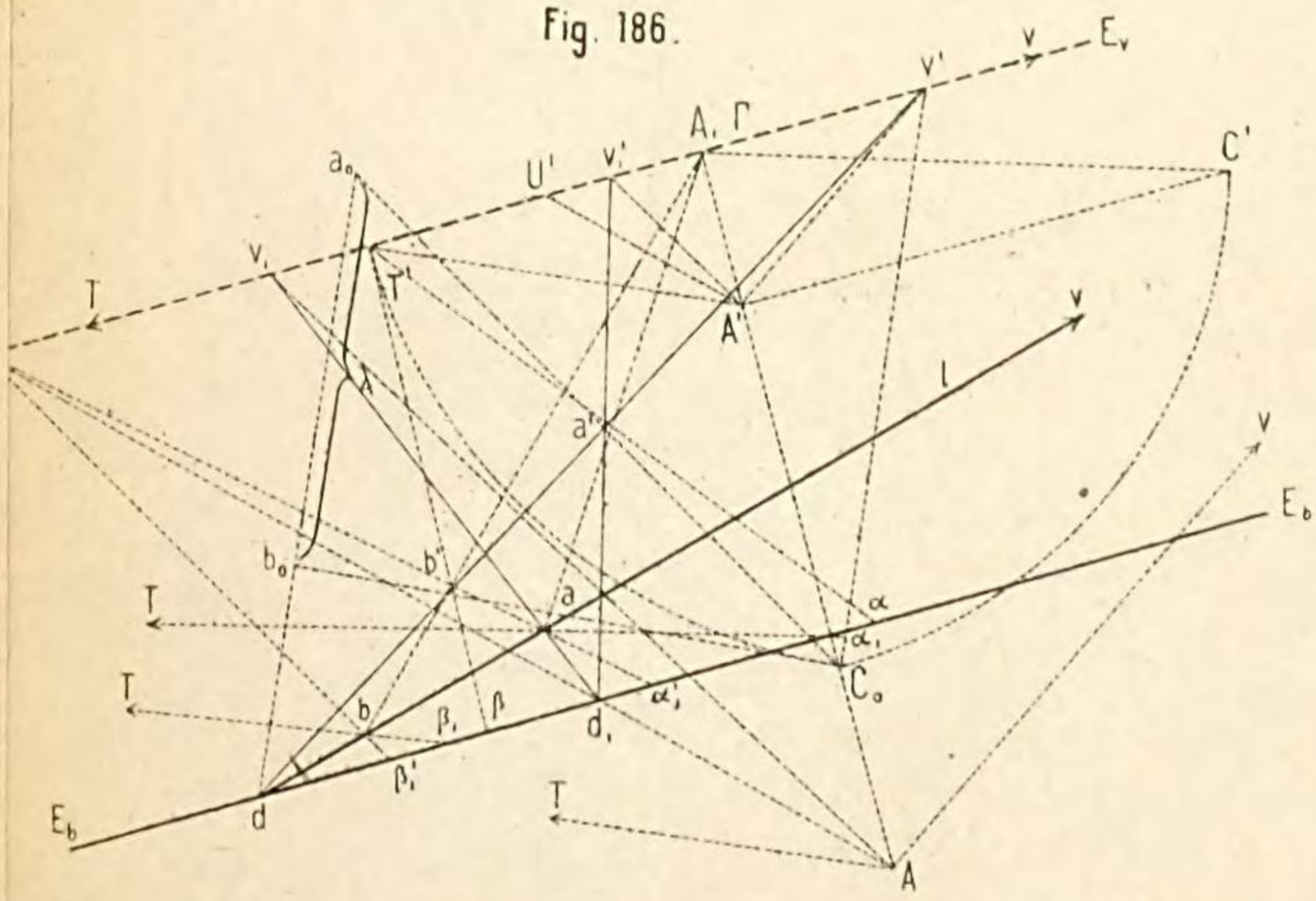


Fig. 187.

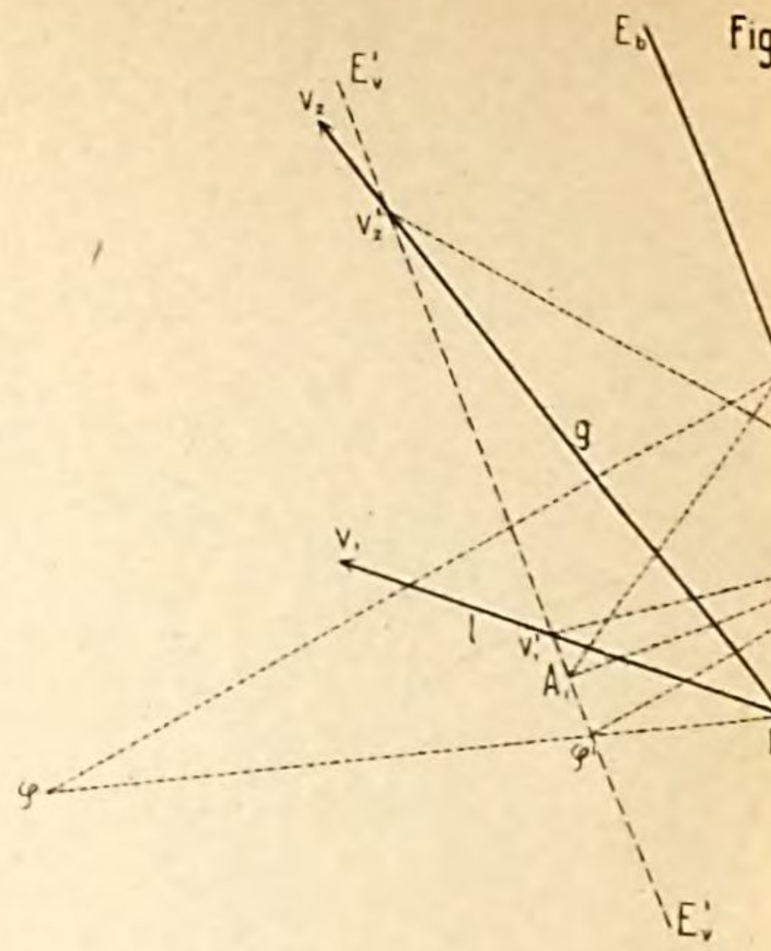


Fig. 188.

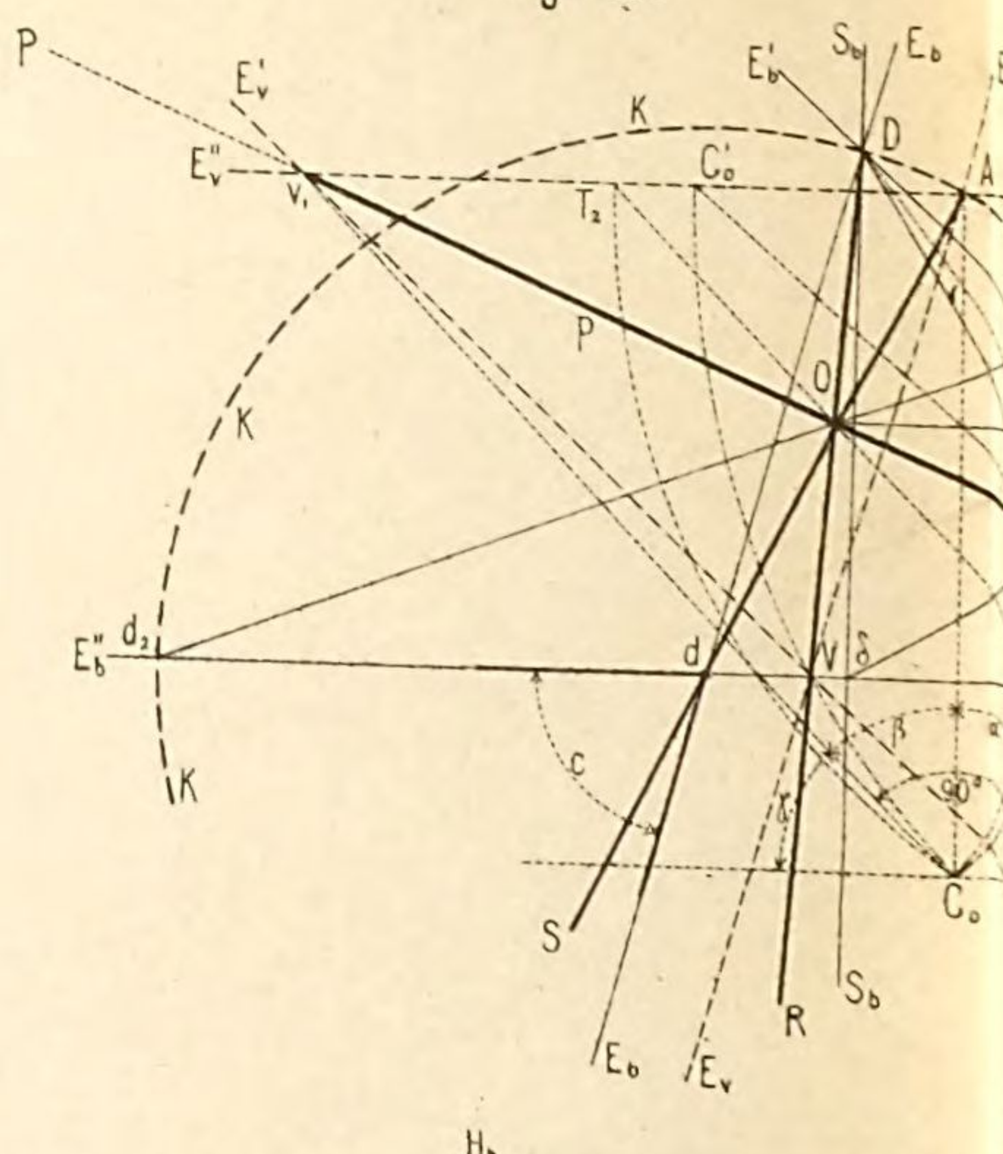
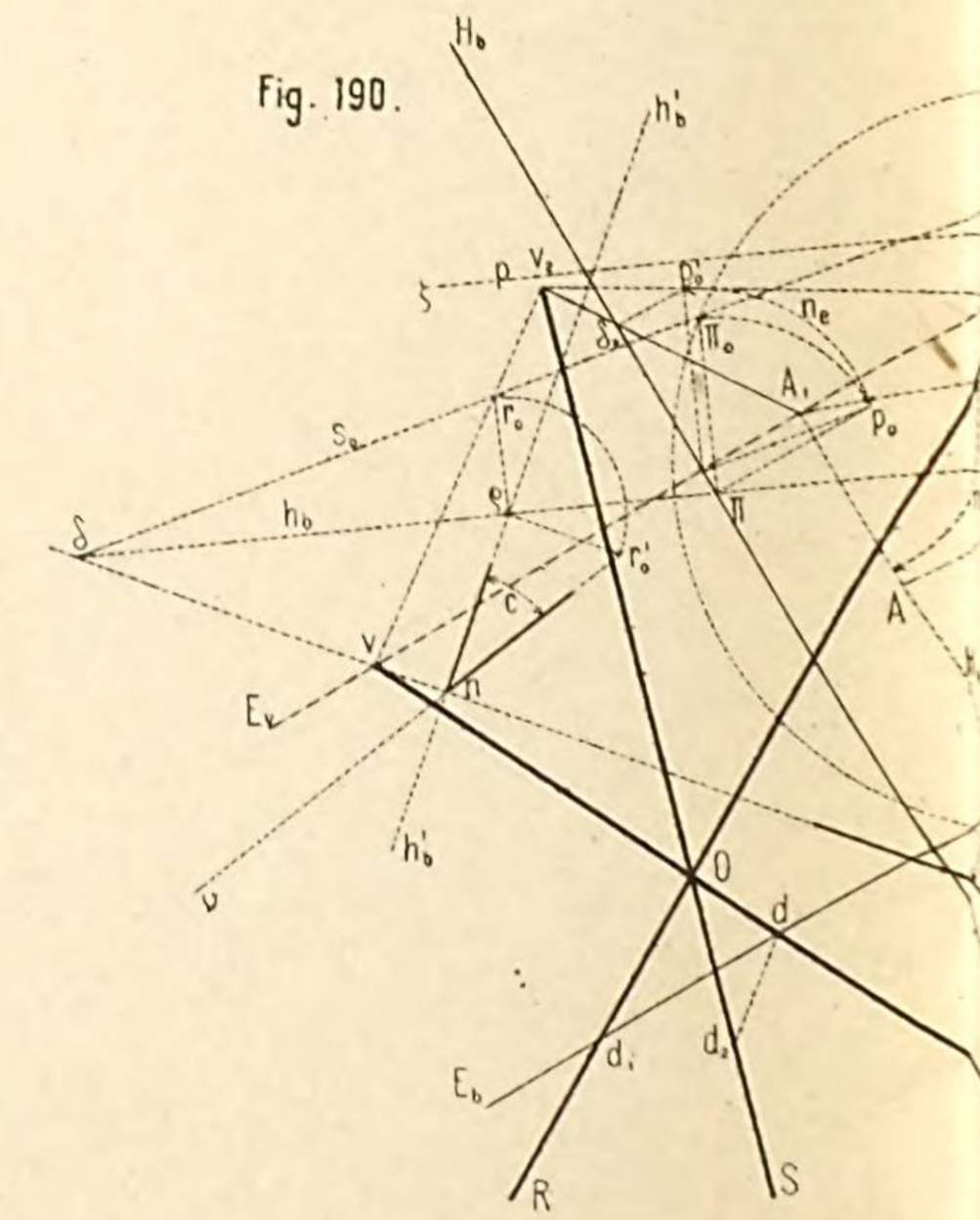


Fig. 190.



Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgärtner's Buchh

Fig. 189.

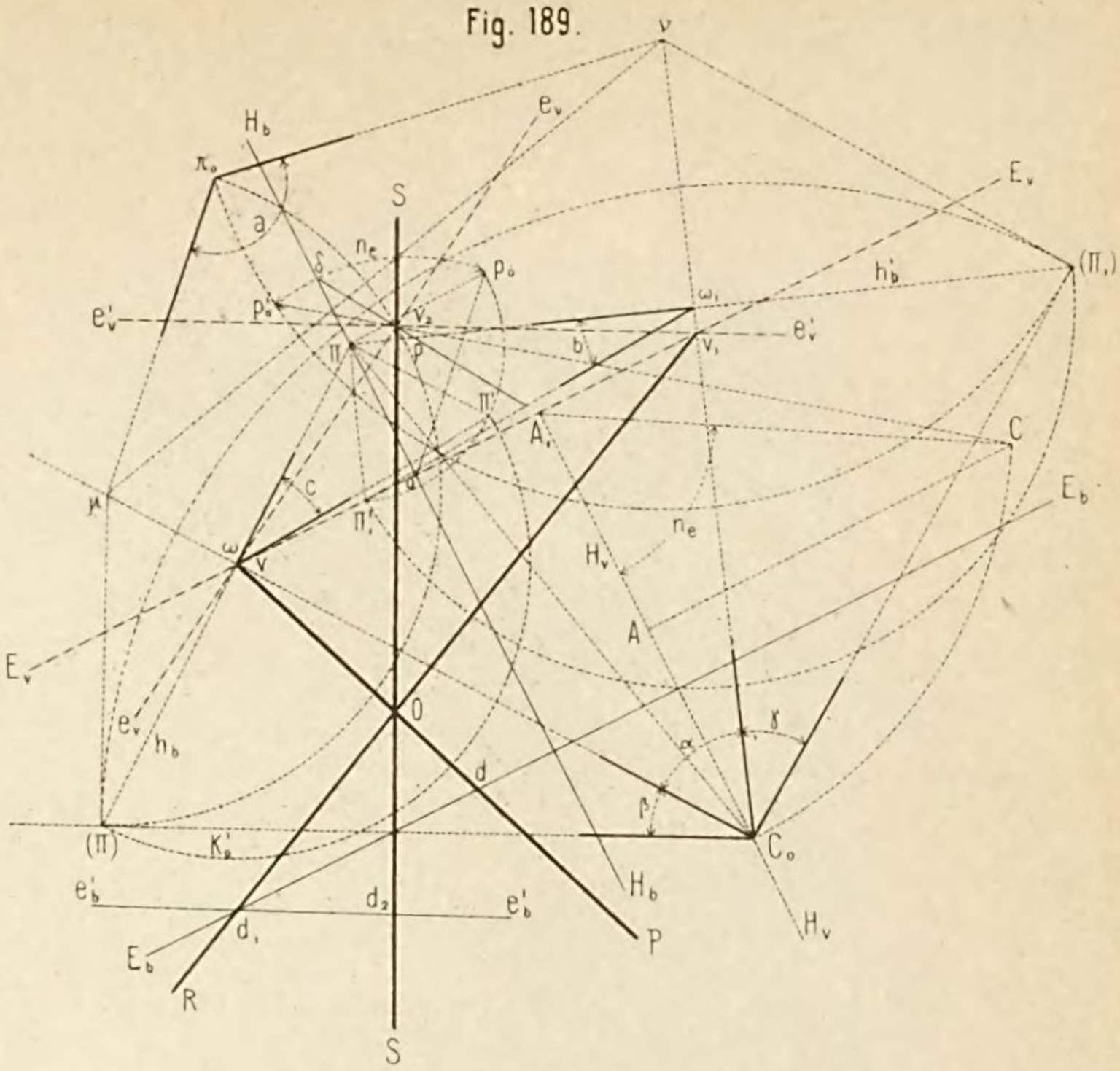
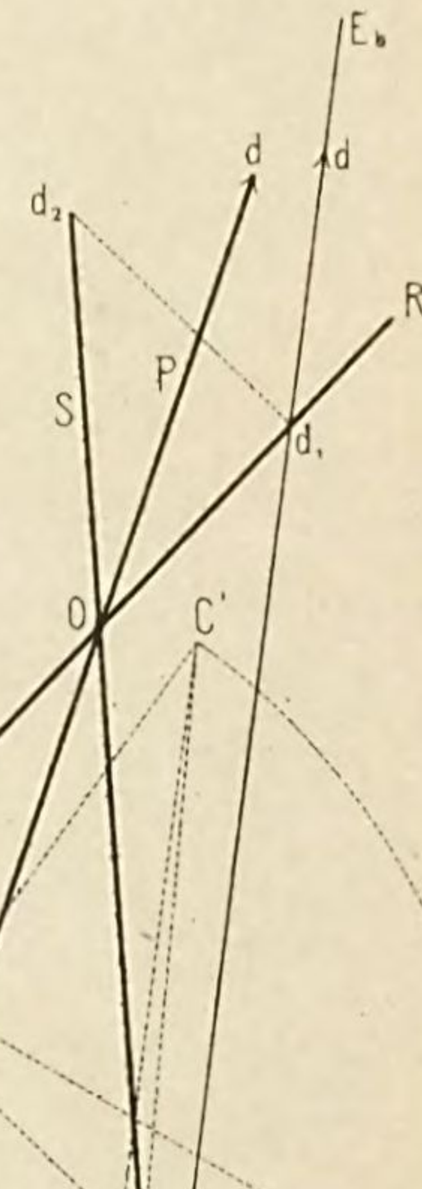
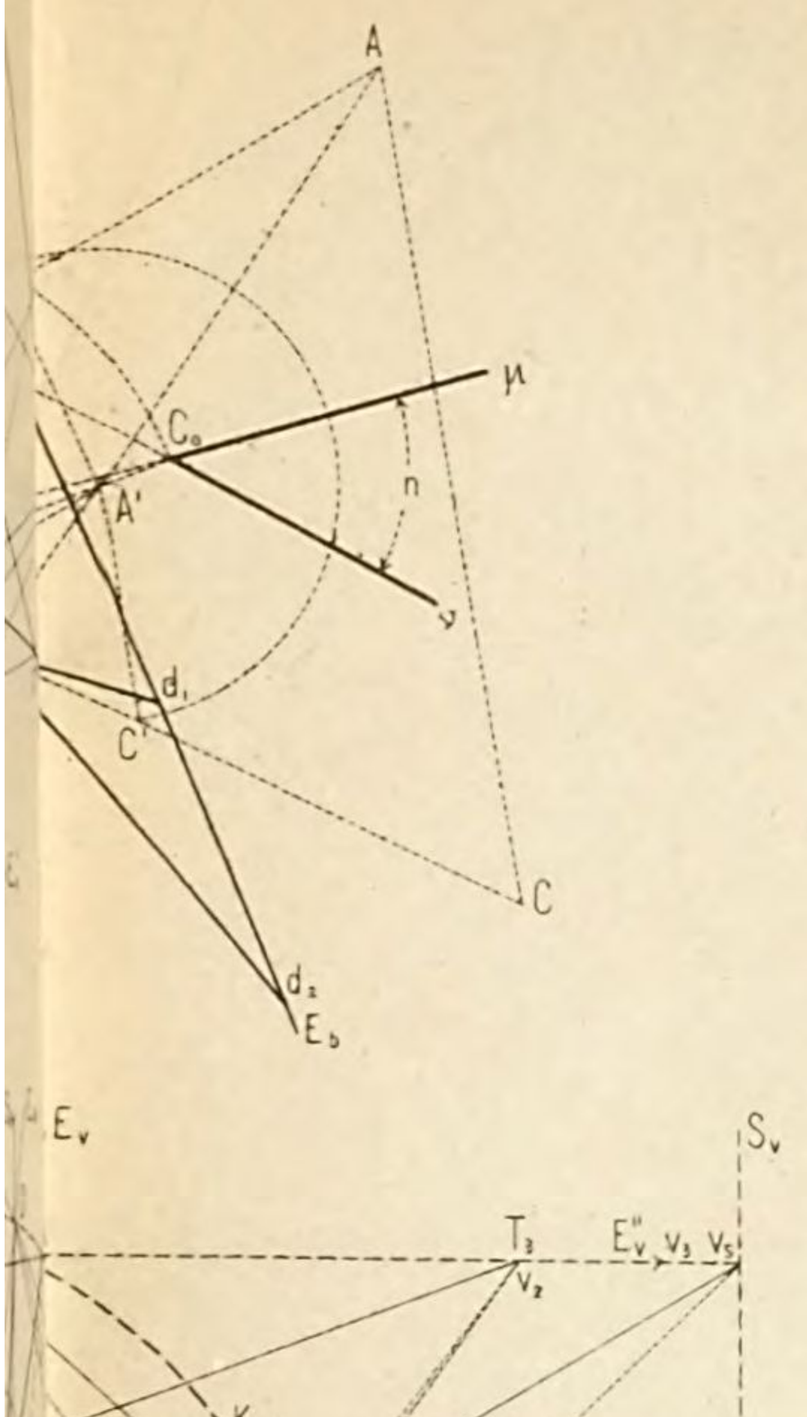
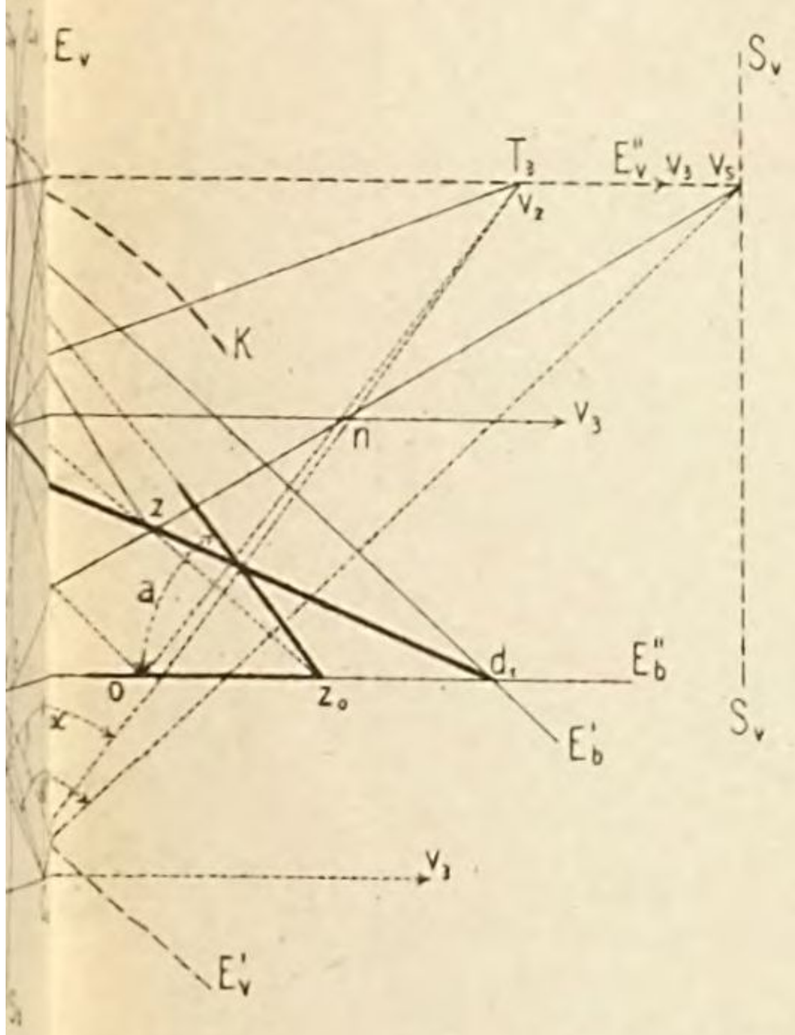
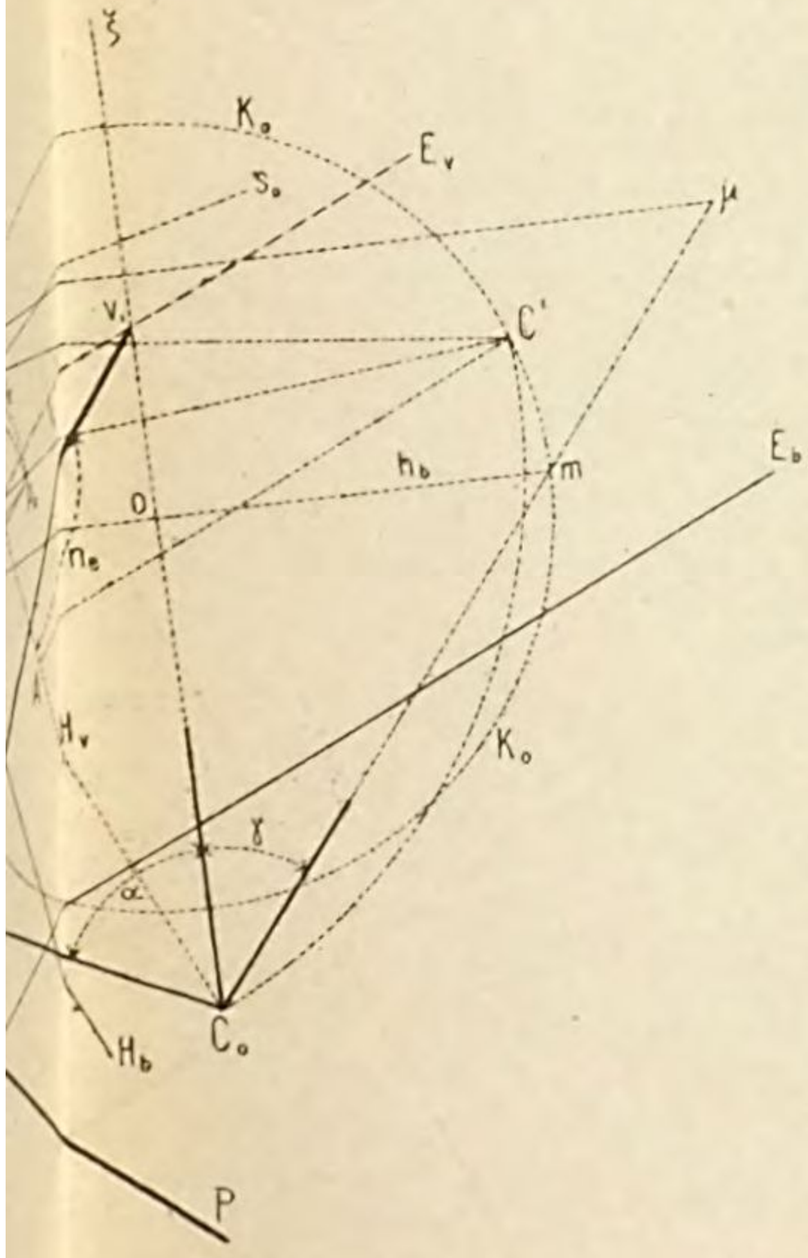


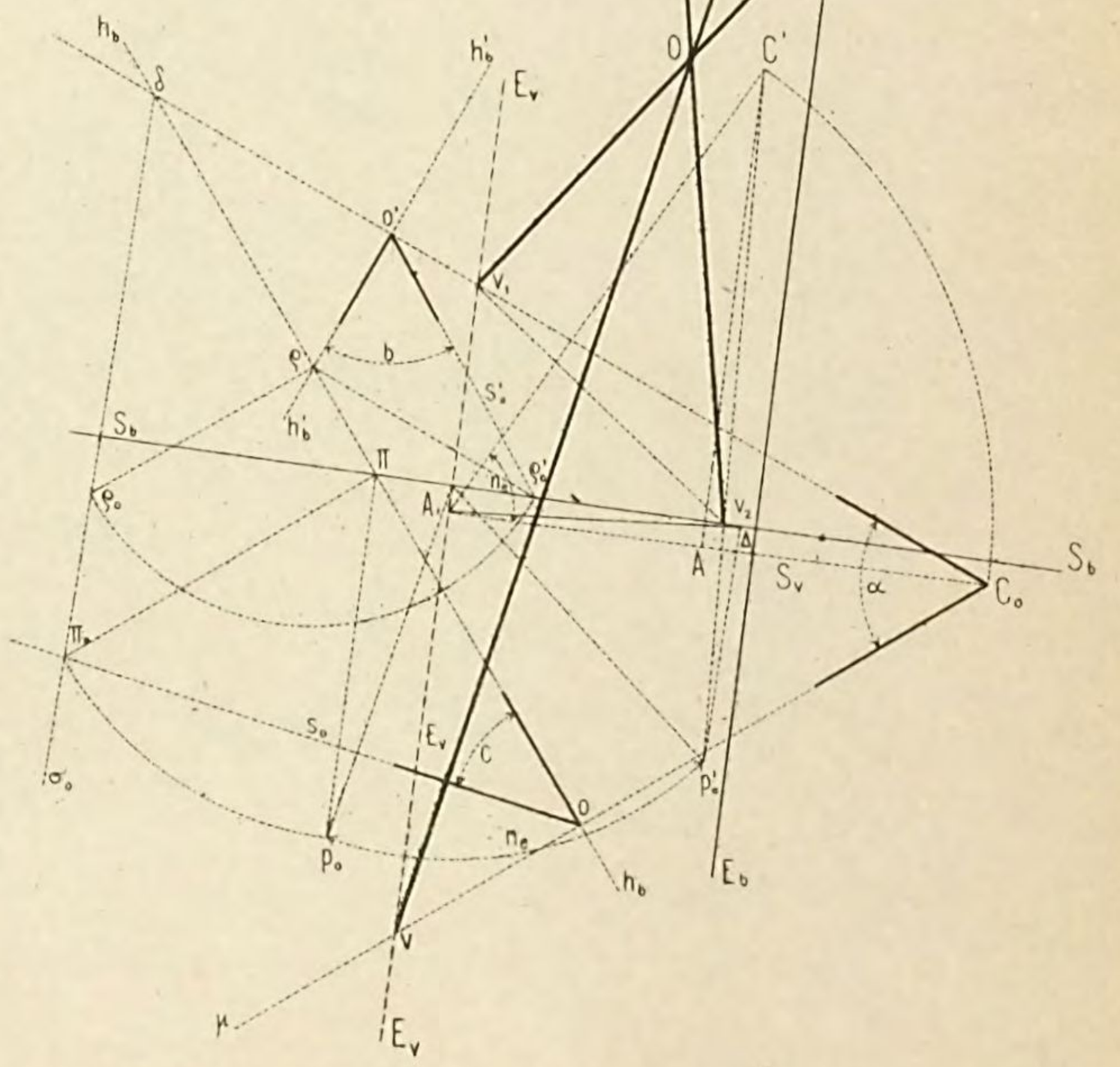
Fig. 191.











...handlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka.

Fig. 192.

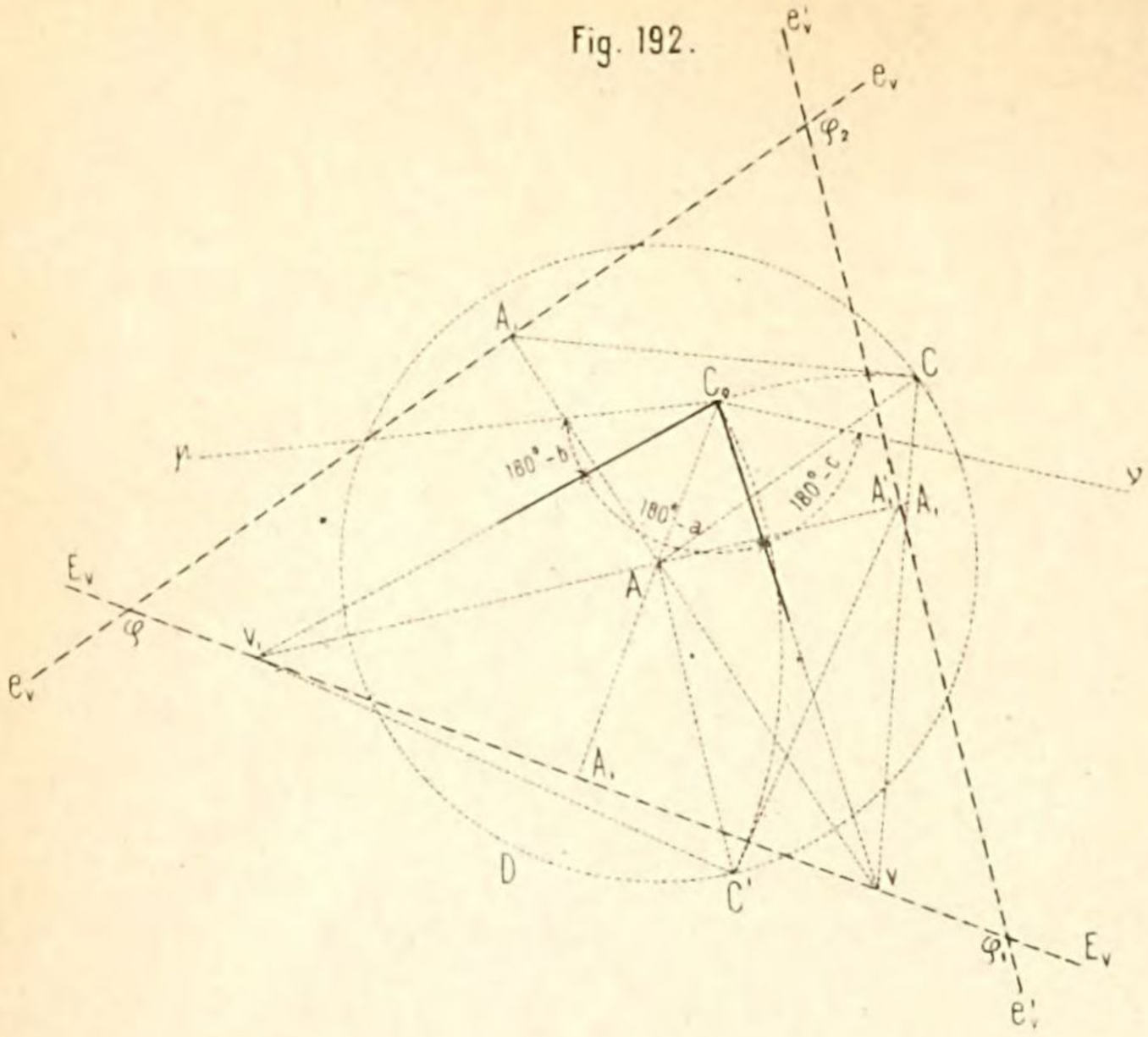


Fig. 193.

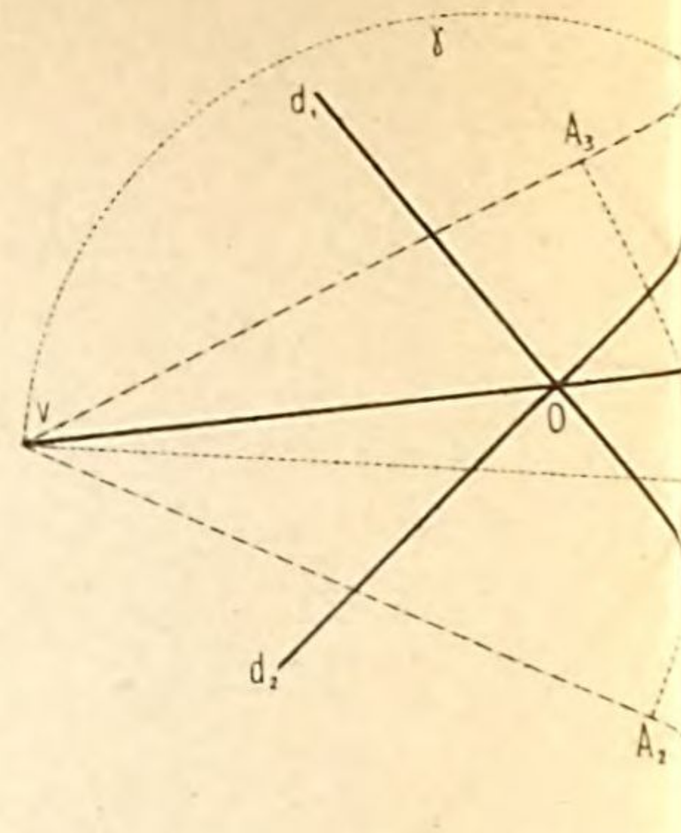


Fig. 196.

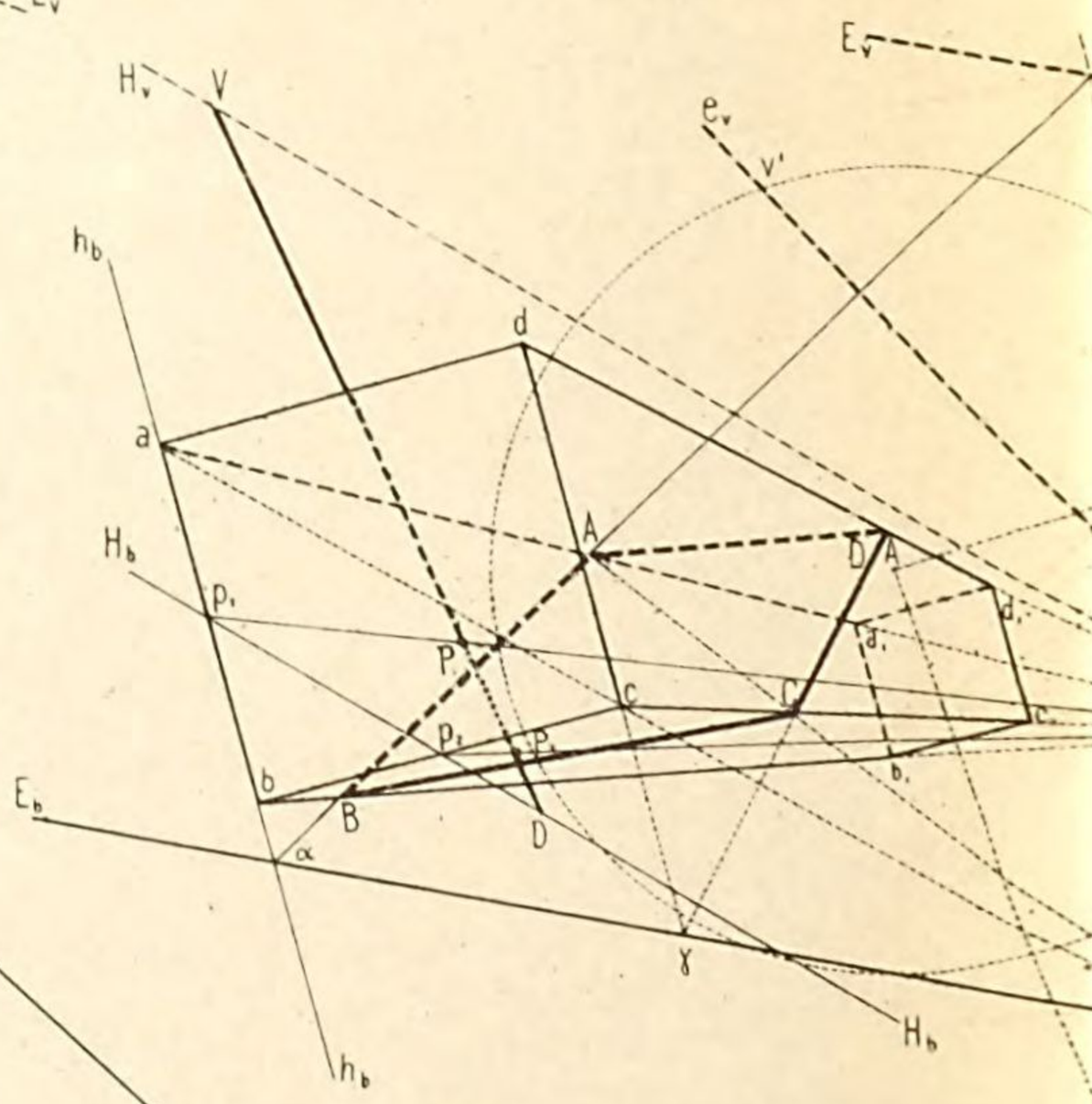
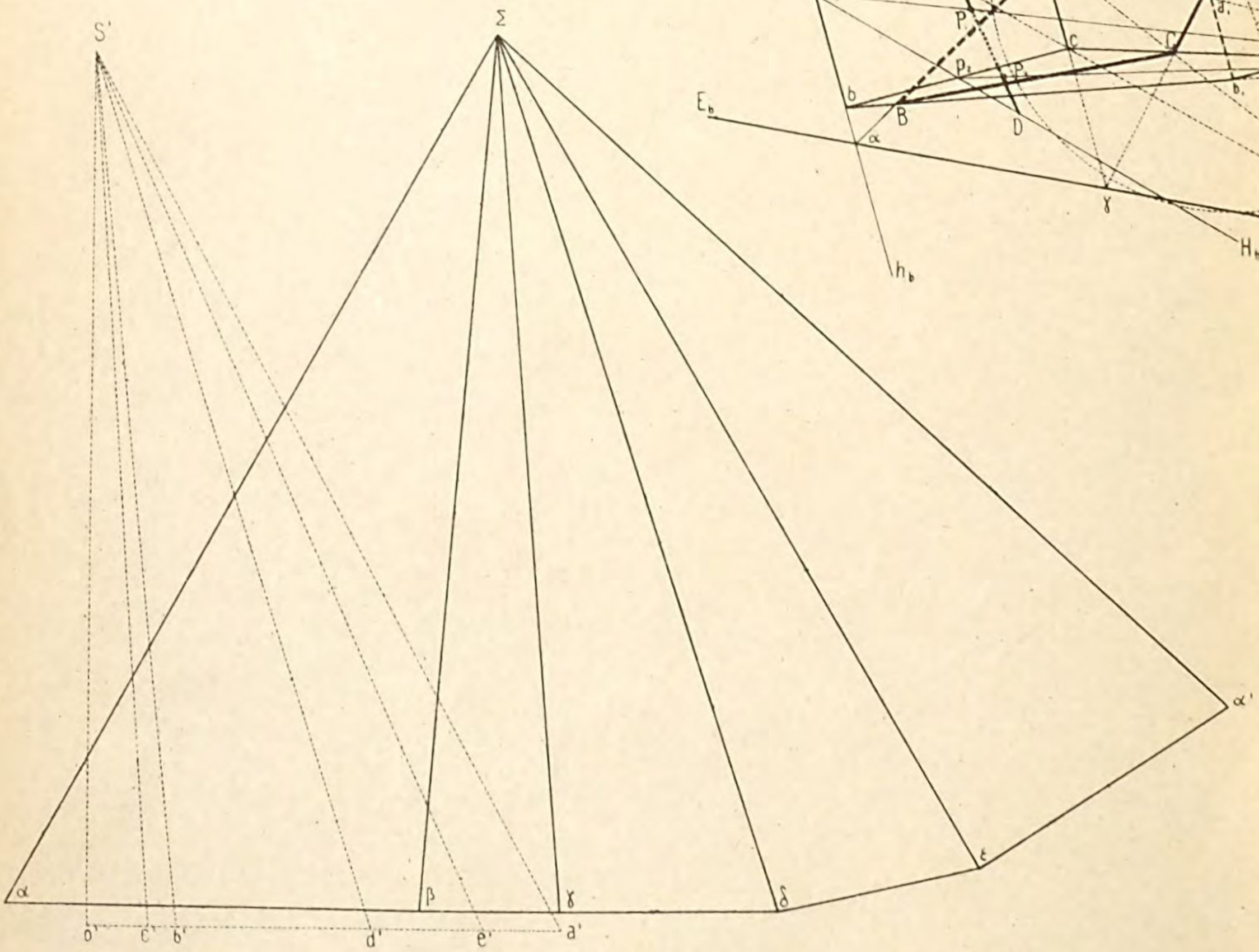


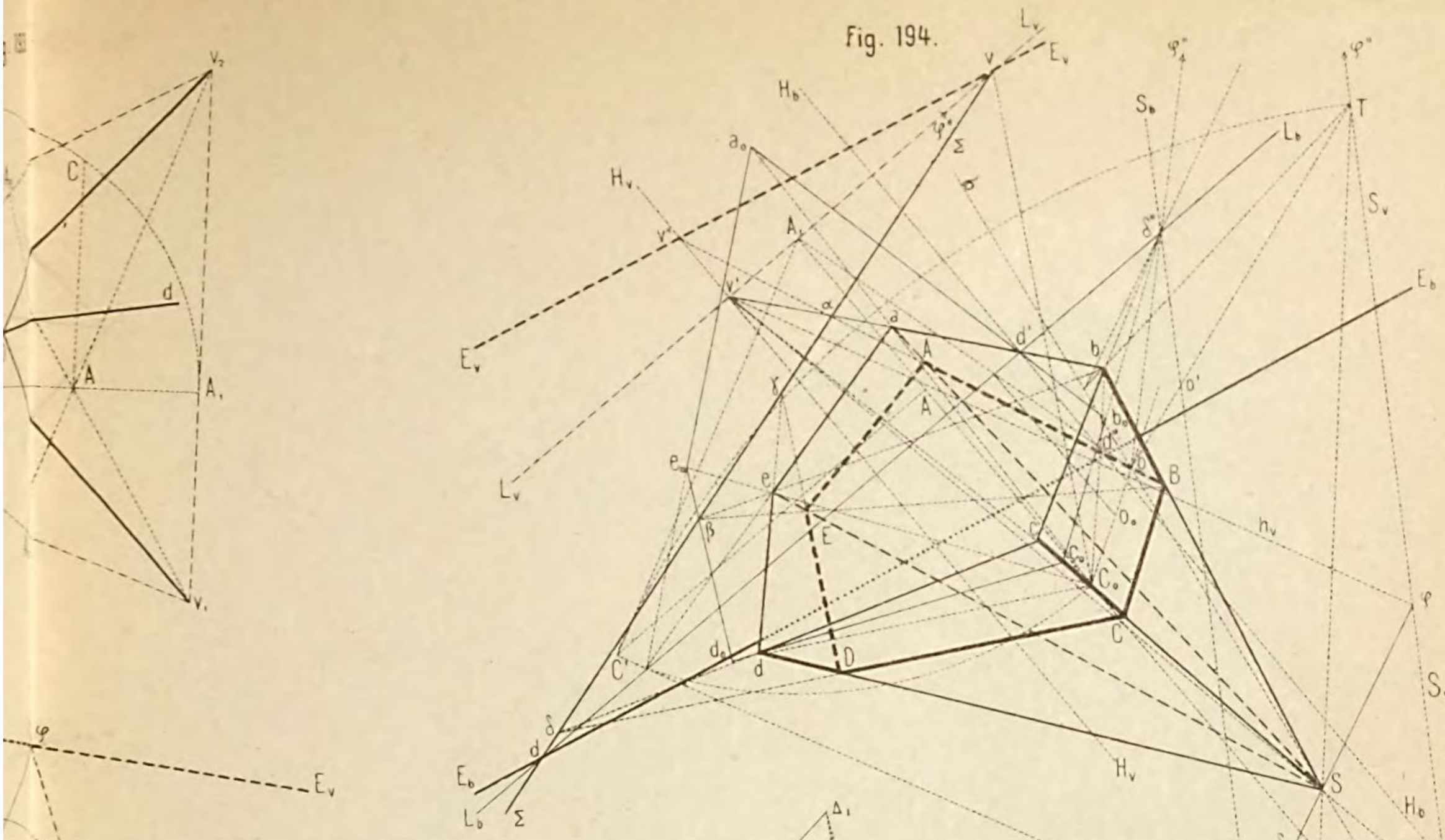
Fig. 195.



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgärtn

Fig. 194.

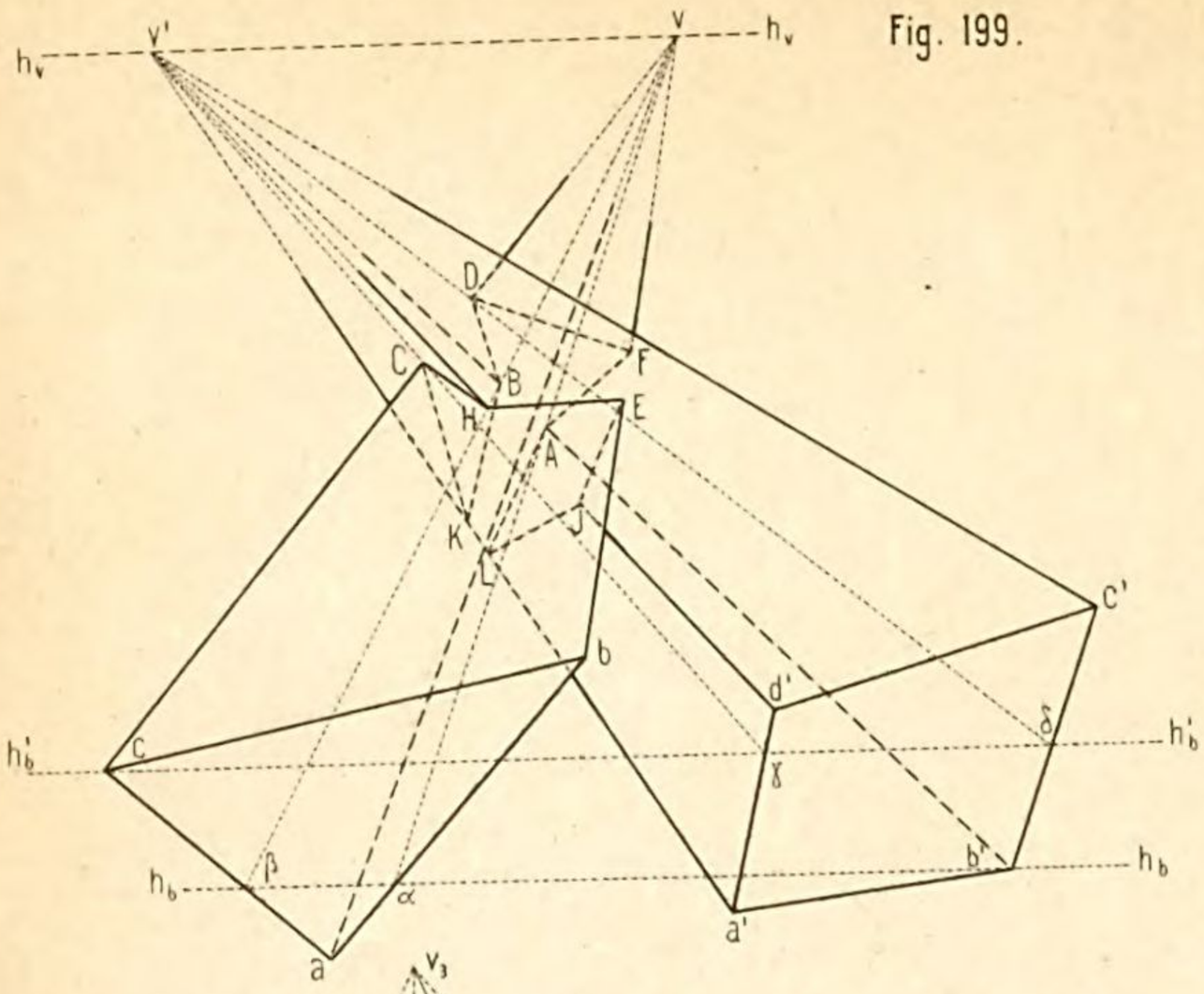


Wagner's Buchhandlung, Leipzig

Constr. u. gez. Peschka

BIBLIOTECA
REGIA
MONACENSIS

Fig. 199.



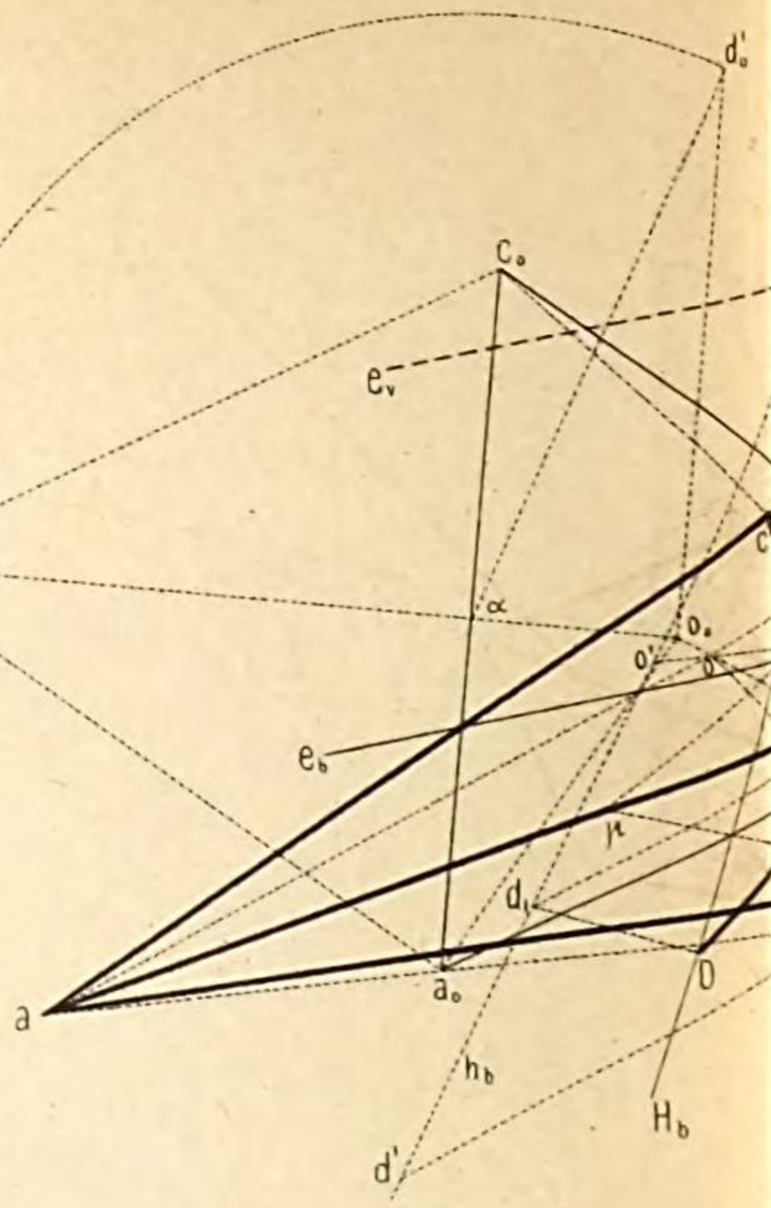


Fig. 202.

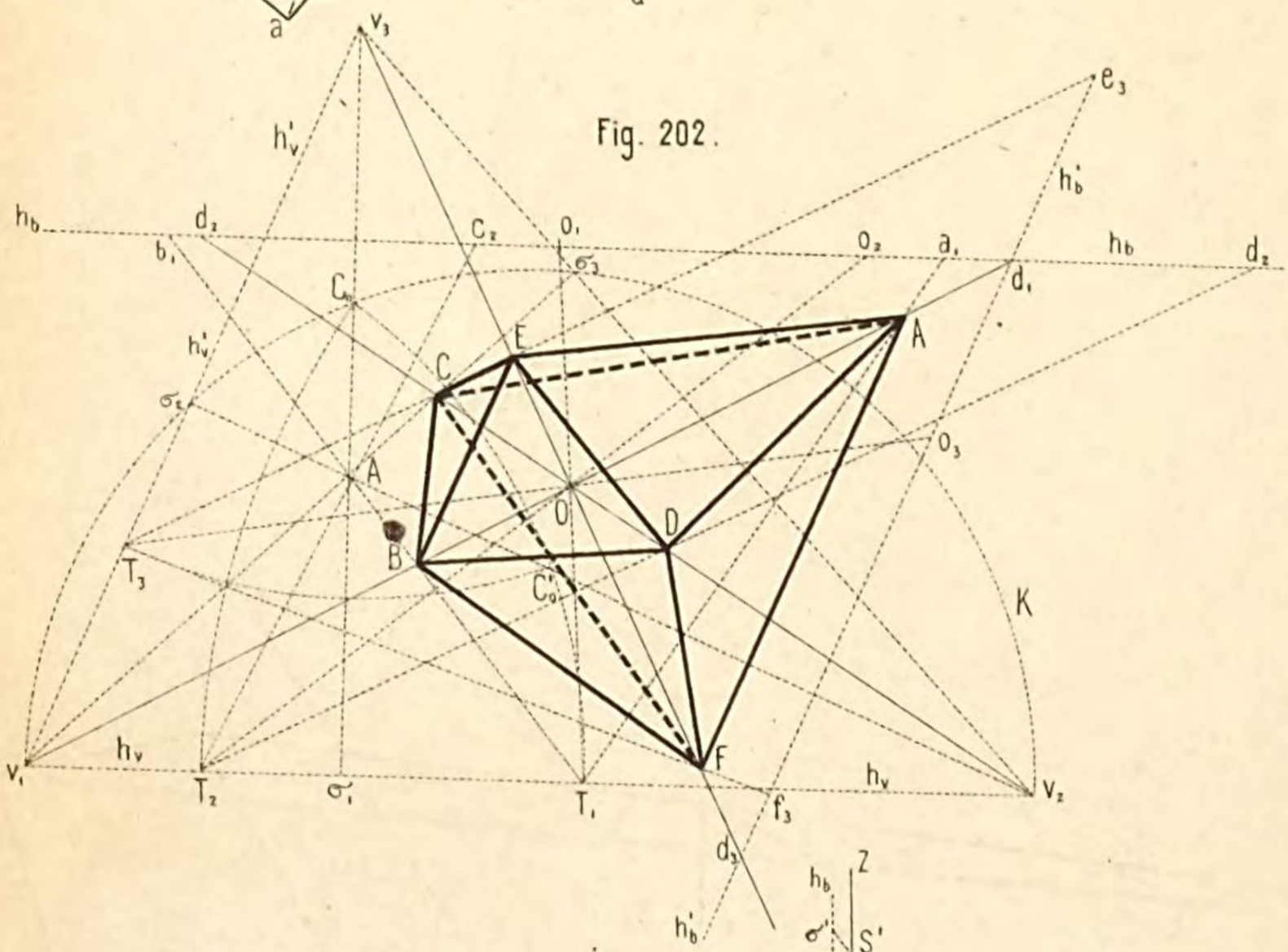
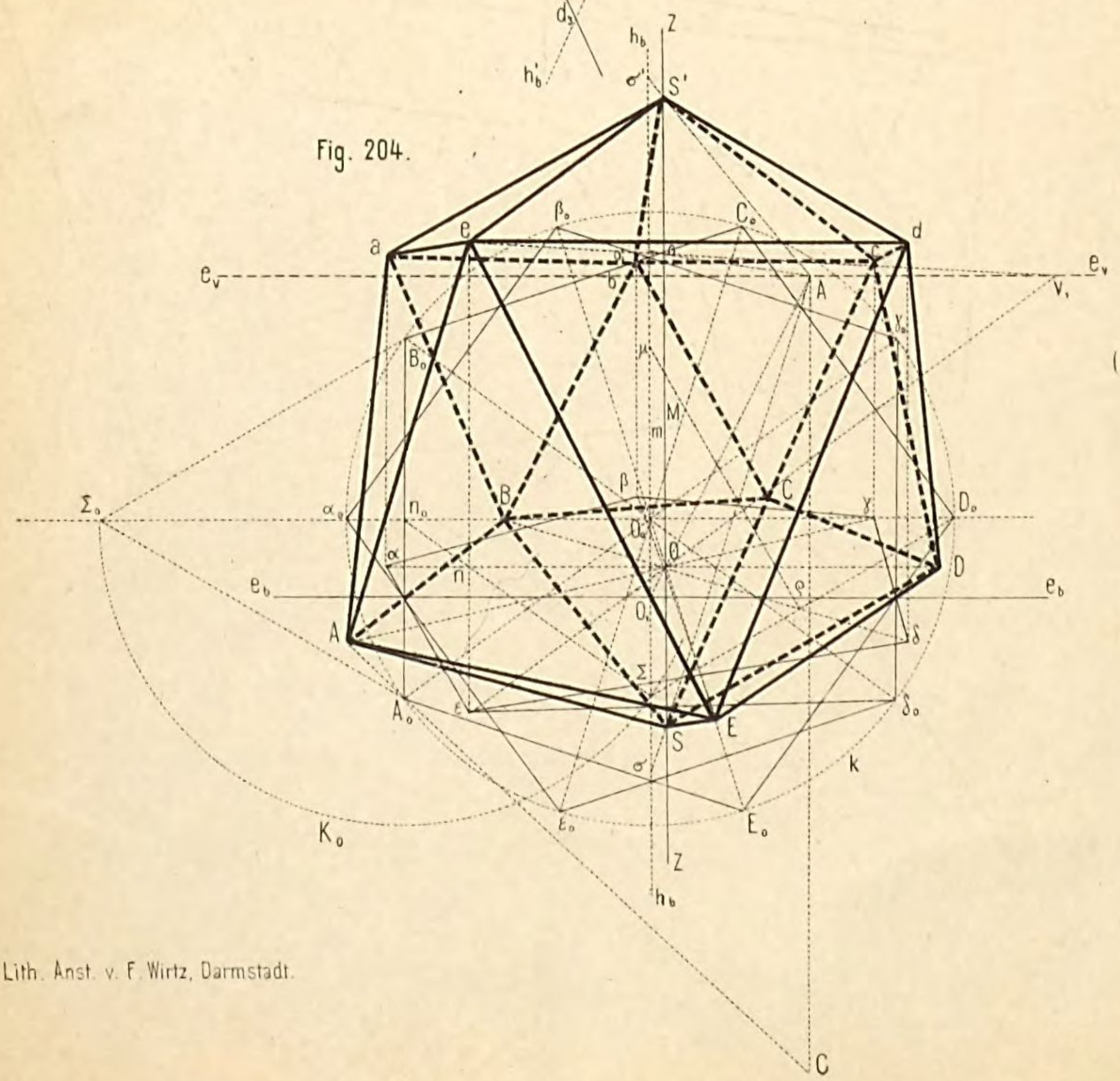
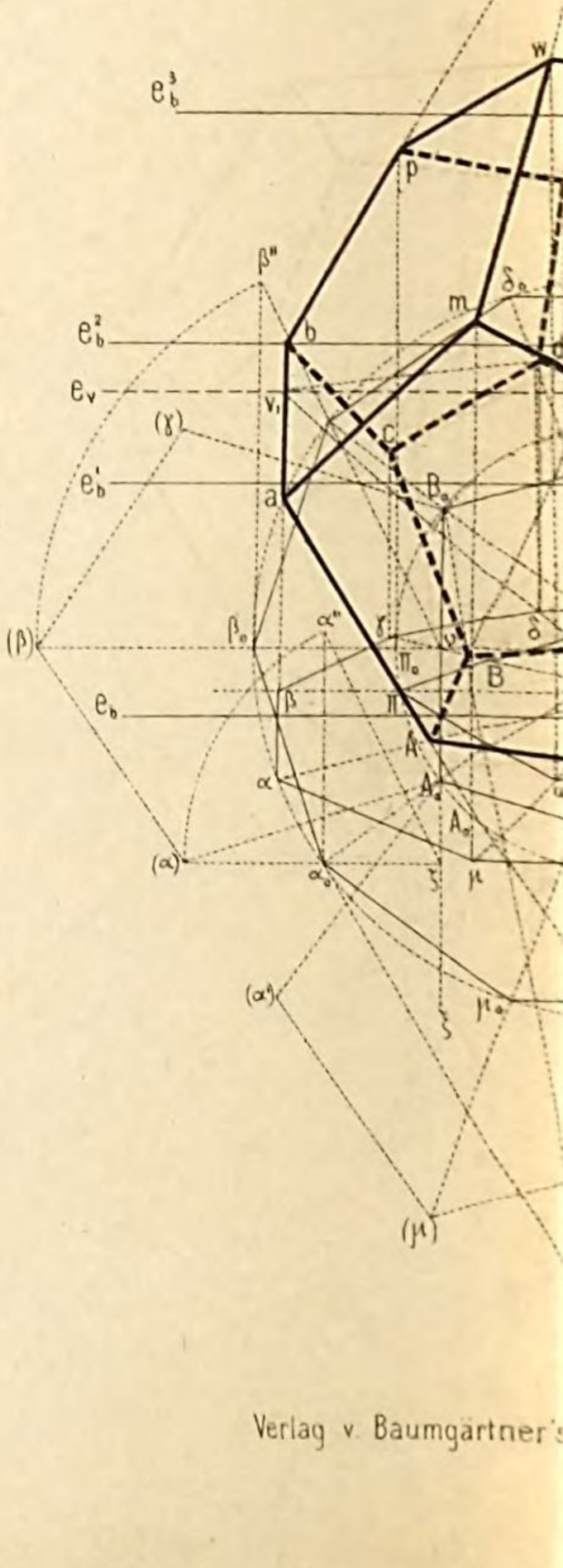


Fig. 204.





Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Verlag v. Baumgärtner's

Fig. 201.

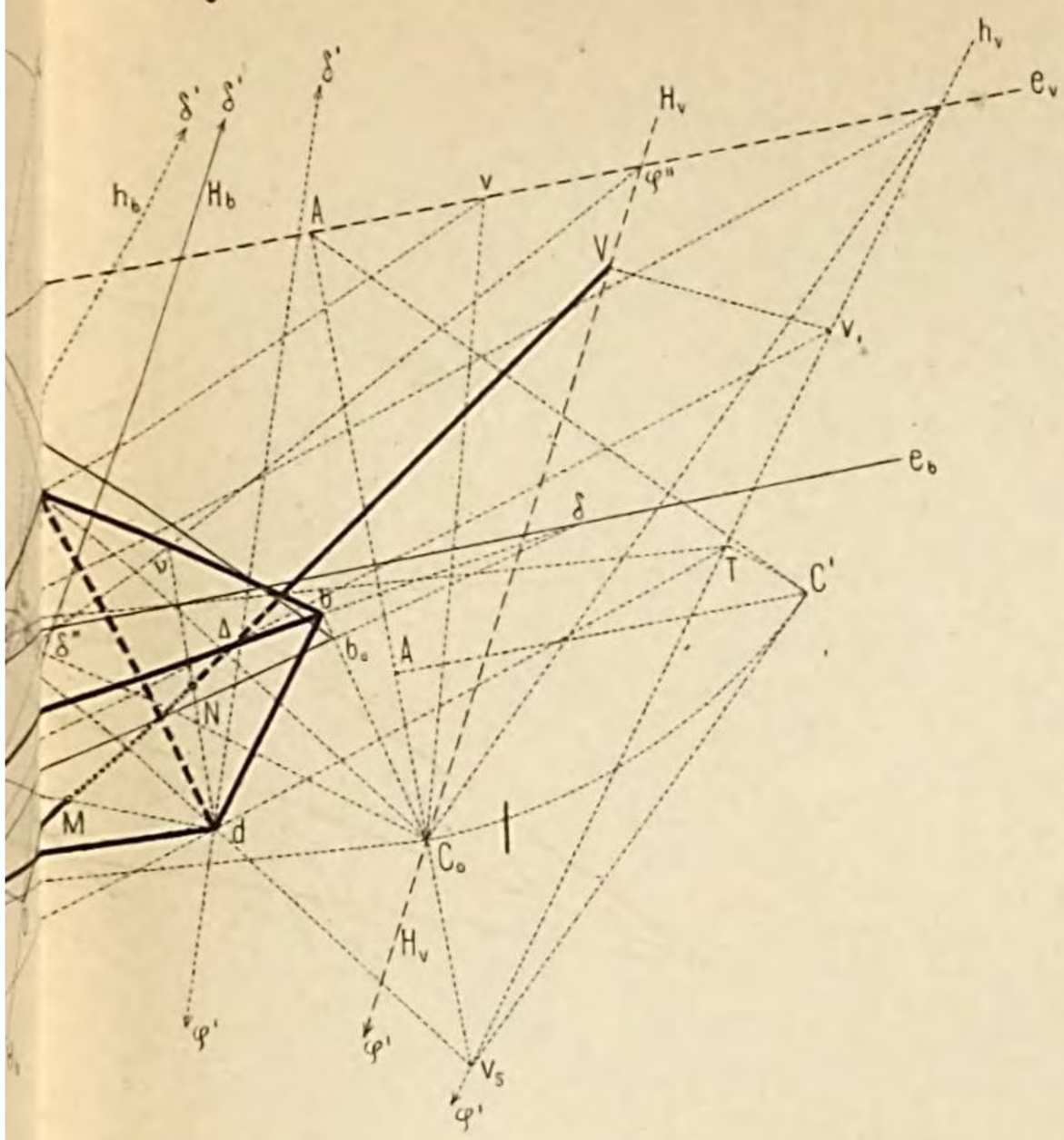


Fig. 200.

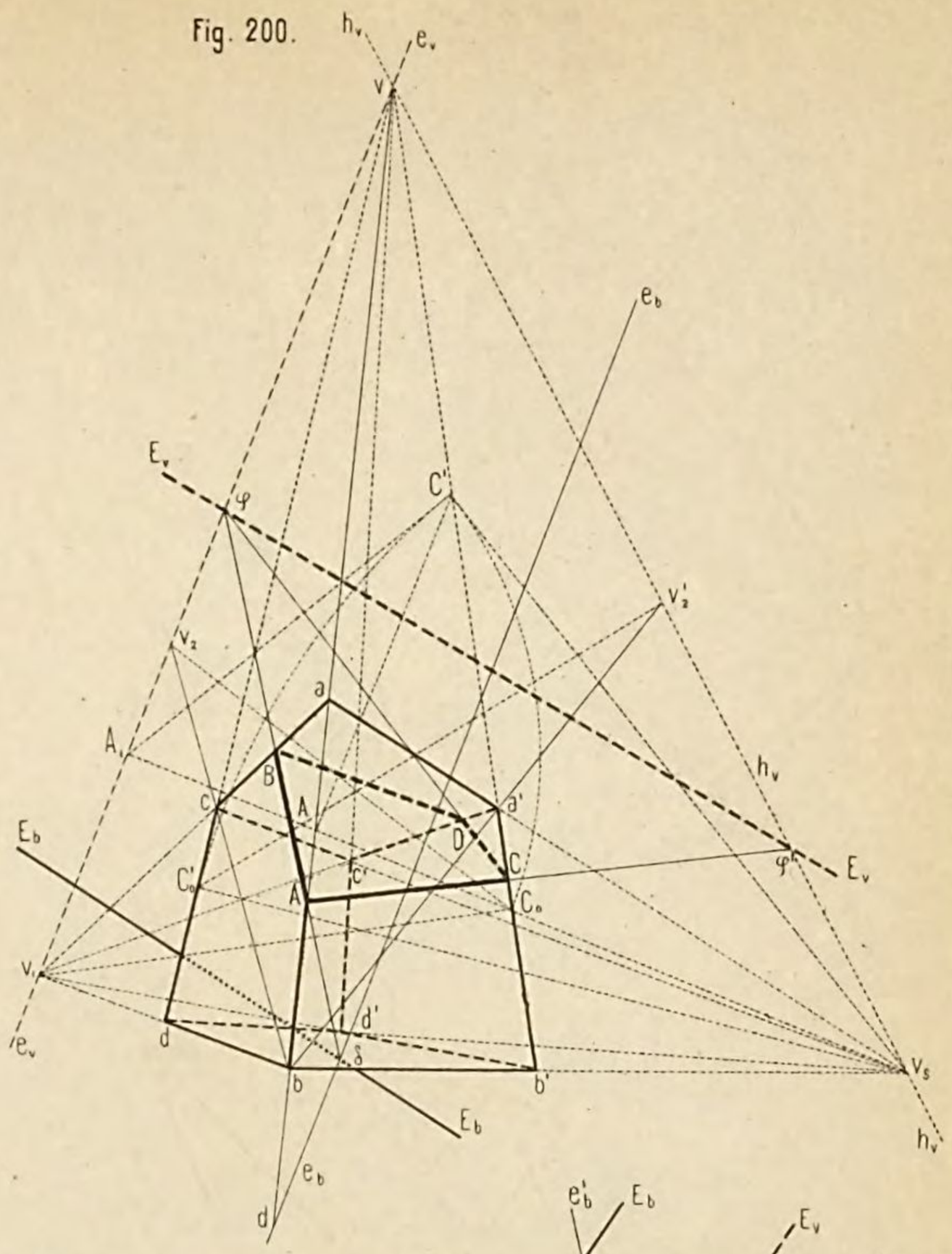


Fig. 203.

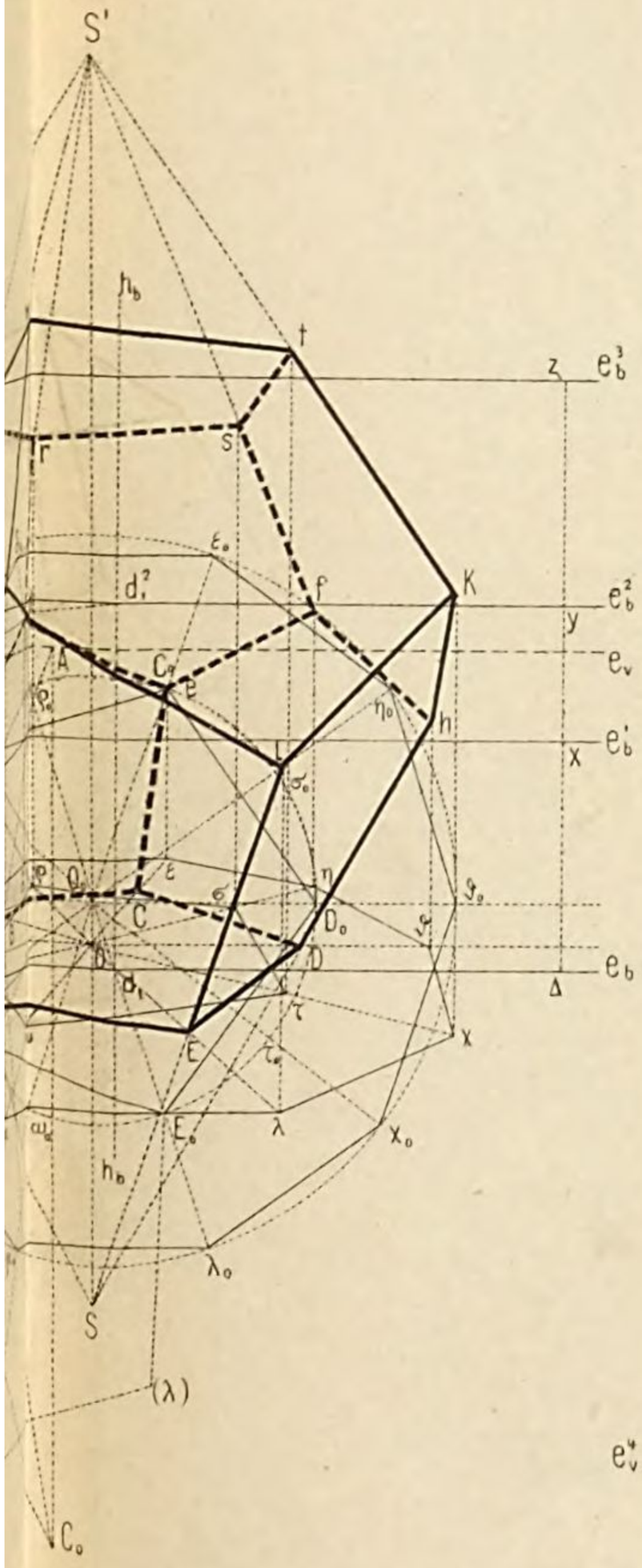
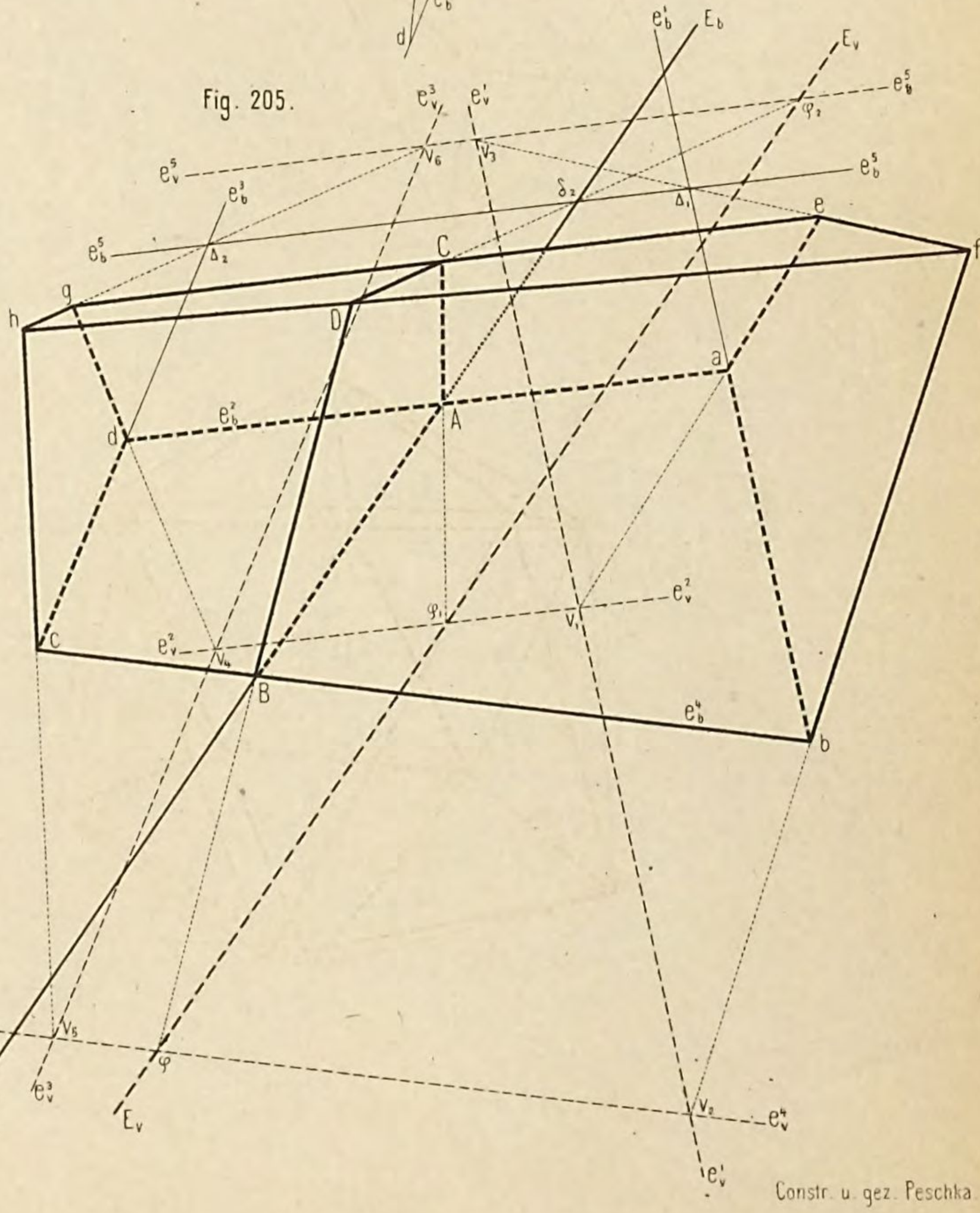


Fig. 205.



Buchhandlung, Leipzig.

Constr. u. gez. Peschka.

Ferner erschienen in unserm Verlage:

Grelle, Dr. **Friedr.**, Professor, **Principien der Arithmetik.** Lex.-8. brosch. 6 M.

— **Analytische Geometrie der Ebene.** Mit 141 Holzschnitten. 4 M.

— **Elemente der Theorie der von reellen Variabeln abhängigen Funktionen.** Ein Leitfaden zu Vorträgen über höhere Mathematik. Mit zahlreichen Holzschnitten. 4 M.

Hattendorf, Dr. phil. **K.**, Professor. **Einleitung in die höhere Analysis.** Lex.-8. brosch. 8 M.

— **Algebraische Analysis.** Mit 11 Holzschn. Lex.-8. brosch. 4 M.

— **Die Sturm'schen Functionen.** 2. Aufl. Lex.-8. brosch. 2 M.

Funcke, Dr., **Grundlagen der Raumwissenschaft.** Mit 41 Holzschnitten. gr. 8. brosch. 3 M.

Tellkampf, H., Grundzüge der höheren Mathematik. Mit 47 Holzschnitten. 8. brosch. 2 M.

Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Sechs Abhandlungen von A. Ritter, Dr. phil., Prof. Lex.-8. brosch. 2 M.

Rühlmann, Dr. **Moritz**, Geh. Reg.-Rath u. Professor. **Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik, sowie der damit in Zusammenhang stehenden mathematischen Wissenschaften.** Mit zahlreichen Holzschnitten und 5 Porträts in Stahlstich. Bd. I. 1885. Lex.-8. In Leinwand geb. 14 M.

Ritter, Dr. phil. **August**, Geh. Reg.-Rath u. Prof., **Lehrbuch der technischen Mechanik.** 5. Aufl. 1884. Mit über 750 Holzschnitten. Lex.-8. brosch. 16 M., in Halbfr. geb. 18 M.

— **Lehrbuch der analytischen Mechanik.** Mit 193 Holzschnitten. Lex.8. 2. Aufl. 1883. brosch. 8 M., in Halbfr. geb. 10 M.

— **Lehrbuch der Ingenieurmechanik.** Mit fast 600 Holzschnitten. Lex.-8. 2. Aufl. 1885. brosch. 14 M., in Halbfr. geb. 16 M.

LEIPZIG.
Druck von Grimme & Trömel.

3. XI.

30. VI.

Albert Boser
Buchbinderei
München.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Peschka, Gustav Ad. v.

Freie Perspective [centrale Projektion] in ihrer Begründung und Anwendung mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium
Bd.: 1

1888

Math.a. 192 qb-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650433-9